ISSN: 2312-5810
DOI: 10.6278/tjme

第 7 卷　第 2 期
二〇二〇年十月
VOL. 7　NO. 2
October 2020

臺灣數學教育期刊
Taiwan Journal of Mathematics Education

國立臺灣師範大學數學系
Department of Mathematics,
National Taiwan Normal University

TAME
台灣數學教育學會
Taiwan Association
for Mathematics Education

發行單位　國立臺灣師範大學數學系
台灣數學教育學會

地址　臺北市汀州路四段 88 號國立臺灣師範大學數學系
《臺灣數學教育期刊》
電話　886-2-7749-3678
傳真　886-2-2933-2342
電子郵件　TJME.taiwan@gmail.com
網址　http://tjme.math.ntnu.edu.tw/contents/contents/contents.asp?id=21

2019-2020 年編審委員
2019-2020 Editorial Review Board

2019-2020 年編審委員（續）
2019-2020 Editorial Review Board (Continued)

主編的話

《臺灣數學教育期刊》於 2013 年籌備、隔年四月創刊，由台灣數學教育學會和臺灣師範大學數學系共同發行。左台益教授擔任本刊首任主編，於今年（2020）卸任。這七年來，左主編一直致力於出版高品質數學教育原創性論文，而在國內數學教育社群人口有限、投稿量不多的情況下，左主編既要兼顧論文品質，又要確保出刊篇數足夠，且須鼓勵審查委員與提醒責任編輯讓審查意見能正面又具建設性，同時完備編務紀錄以利 TSSCI 之期刊審查；過程之辛苦，在此對左主編的盡心竭力，致上誠摯之感謝。

本刊第 7 卷第 2 期的出版，由我接任主編工作，除了和副主編楊凱琳教授與原本的 12 位編輯委員繼續負責編務之外，也延聘兩位國際學者加入編輯委員會。一位是佘偉忠（Seah, Wee-Tiong）教授，他任教於澳洲墨爾本大學數學教育系，另一位是卓鎮南（Toh, Tin-Lam）教授，他任教於新加坡國立教育學院數學與數學教育學術組。兩位都是數學教育國際社群中活躍傑出的學者，咸信有他們的加入，本刊會更為多元。

本期刊登三篇文章。第一篇以個案研究法探討個案教師在數學臆測教學中的教學行為，以活動的擁有權和想法的擁有權構成四個象限的教師角色，本文以協調者此一教師角色為焦點，探討臆測教學五個階段的教學行為。第二篇以四百多位學童為對象進行位值概念測驗，除了探討二年級學生位值概念的層次發展，同時比較在表徵物為古氏積木、錢幣或櫻桃圖示下學生位值概念的表現，本文的結果對位值概念教學與教科書設計的表徵選擇，具有啟發性。第三篇以 52 名七年級學生進行教學介入，探討體現認知在整數加減的補救以及平行線截角性質之學習上的效果。體現認知主張學習不只是符號表徵的學習，手勢或身體動作等感官經驗也參與其中。近年來數學教育、科學教育，語言研究都關注此一觀點的探討，本文的議題符應此一教育研究的新趨勢。

本刊除了持續一直以來的宗旨，以刊登高品質的實徵性研究或具批判性回顧論文之外，也將擴展其它型態的內容，未來會將書評、學術趨勢報告等型態的文稿納入徵稿說明，請數學教育研究社群的同好一起參與學術知識的交流。

《臺灣數學教育期刊》主編

吳昭容 謹誌

臺灣數學教育期刊

第 7 卷　第 2 期

2014 年 4 月創刊　　2020 年 10 月出刊

目錄

Taiwan Journal of Mathematics Education

Vol. 7 No. 2

First Issue: April 2014 Current Issue: October 2020

CONTENTS

張廖珮鈺、林碧珍（2020）。
數學臆測教學中教師擔任協調者角色之教學行為。
臺灣數學教育期刊，7（2），1-23。
doi: 10.6278/tjme.202010_7(2).001

數學臆測教學中教師擔任協調者角色之教學行為

張廖珮鈺[1]　　林碧珍[2]
[1]新竹縣新豐鄉松林國民小學
[2]國立清華大學數理教育研究所

本研究是以個案研究法探討教師在臆測教學以協調者角色介入的教學行為。本研究採立意取樣，以一位資深的數學臆測教學六年級教師為個案教師。蒐集的資料包含因倍數單元六節教學錄影和學生學習單，資料分析架構是以活動的擁有權、想法的擁有權，來形成四個象限的教師角色，並加入第三維度代表臆測教學五個階段。本篇探討的角色以協調者為主，協調者是教師具有活動的擁有權，而學生具有想法的擁有權。研究結果發現：在臆測教學中，個案教師以協調者介入主要是在效化階段，其次是證實階段和提出猜想階段。教學行為主要是辨認、比較與整合。臆測教學不同階段採用不同的教學行為介入，在提出猜想階段，以協調者角色介入的目的是在徵求學生比較自己的猜想和其他猜想的異同；在效化階段，是在徵求學生表達自己的立場；在證實階段，是為了徵求學生辨認各種猜想之間的包含關係。本研究也發現即使相同的教學行為在教學不同階段的介入也會不同，比較在提出猜想階段，是為了觀察更豐富的數學關係。比較在效化階段，是為了區別不同猜想之間的前提條件是否相同，比較在證實階段是為了幫助學生釐清各種猜想證明的先後順序。整合在效化階段，是為了幫助學生從多個類似的猜想中選出或整合出一個最完整、最具代表的猜想。

關鍵字：協調者、教師角色、教學行為、數學臆測教學

通訊作者：林碧珍，e-mail：linpj@mx.nthu.edu.tw
收稿：2020 年 7 月 26 日；
接受刊登：2020 年 10 月 23 日。

Journal homepage: http://tjme.math.ntnu.edu.tw/contents/contents/contents.asp?id=21

Chang Liao, P. Y., & Lin, P. J. (2020).
Teaching behaviors of teachers: The role of moderator in teaching mathematical conjecture.
Taiwan Journal of Mathematics Education, *7*(2), 1-23.
doi: 10.6278/tjme.202010_7(2).001

Teaching Behaviors of Teachers: The Role of Moderator in Teaching Mathematical Conjecture

Pei-Yu Chang Liao [1]　　Pi-Jen Lin [2]
[1] Song-Lin Elementary School, Hsinchu
[2] Graduate Institute of Mathematics and Science Education, National Tsing Hua University

The purpose of the study was to explore teacher behavior when playing the role of moderator in teaching conjecture in mathematics. A teacher was selected as a case study. The case was a sixth-grade teacher experienced in teaching conjecture. Collected data included six lessons of factors and multiple units. The analytical framework is based on the ownership of activities and ideas to form the role of teachers in the four quadrants, and the third dimension is added to represent the five stages of conjecture teaching. The role discussed in this article focuses on quadrant II－Moderator, which is characterized with the teacher having ownership of the activity and the student having ownership of thought. The results indicated that the role of the moderator frequently occurred in the validation stage, followed by the justification stage and formulation stage. Teaching behaviors consisted of recognizing, comparing, and integrating. In the formulation stage, the moderator asked students to compare their own conjectures with those of others. In the validation stage, the moderator asked students to express their position. In the justification stage, the moderator called for an inclusive relationship among the generalized conjectures. Students were required to compare in the formulation stage as the case teacher asked them to look at additional mathematical relationships, whilst they were required to compare in the validation stage to clarify the similarities and differences of the premises among the conjectures. In the justification stage, the case teacher asked students to compare in order to sequence the conjectures to be justified. In the validation stage, students were asked to integrate or select the most complete and representative conjectures.

Keyword: moderator, teacher role, teaching behavior, teaching conjecture in mathematics

Corresponding author：Pi-Jen Lin，e-mail：linpj@mx.nthu.edu.tw
Received：26 July 2020;
Accepted：23 October 2020.

壹、緒論

本研究探討以臆測為數學本質的教學取向，觀察數學教室中，進行臆測教學的教師所需扮演的角色，將角色聚焦於教師的具體教學行為。臆測教學是由教師規劃完整的教學活動，透過活動中的數學任務來引發學生進行觀察、比較、論證等過程，學生依據觀察的現象提出猜想，培養學生建立完整的數學臆測學習過程，此教學流程即是數學臆測教學。數學臆測教學模式有五個主要階段，依序為「造例階段」、「提出猜想階段」、「效化階段」、「一般化階段」、「證實階段」（林碧珍，2016）。

課室中的師生關係是複雜的，有時候教師主導全班討論活動，由教師提供鷹架來建構知識，但仍然是由學生的不同想法來達成共識；相反地，有時學生在進行討論活動時，教師卻會加入想法來微調學生理解數學的方向。因此，臆測教學課堂需要區分是由教師主導或由學生主導，還須將活動和想法分開來看（Chen, Hand, & Norton-Meier, 2017）。由教師主導活動時，教師的角色可能為分派者和協調者；由學生主導活動時，教師的角色可能為挑戰者和參與者。在課堂當中教師交錯地扮演著不同的角色，不同臆測階段教師所扮演的角色也直接地影響著學生的表現。其中協調者角色在教師角色中尤為重要，協調者是以教師來主控活動，學生主導想法來互動對話，協調者既需保有教師的角色，亦需以學生為中心提供想法，是角色當中較困難扮演的角色，然而，協調者能展現臆測教學中實際協助學生產生想法的行為細節。目前已發表有關於臆測教學教師角色的相關研究中（Chang Liao & Lin, 2019；Lin & Chang Liao, 2019），以論述其他角色的情形或探討臆測教學中教師整體角色分布的情況為主，尚未探討協調者在各階段如何協助學生提升論證品質。因此，本研究聚焦於協調者的角色，研究問題為：數學臆測教學下協調者角色的教師教學行為內涵為何？

貳、理論性觀點

一、數學臆測教學之理論性觀點

（一）數學臆測教學是素養導向的教學取向

在生活中解決新問題時，臆測是必要的歷程。數學臆測教學是林碧珍的研究團隊，以數學知識形成的歷程結合臆測的認知歷程長時間發展出來的（Lin, 2018a）。臆測教學模式的理論基礎就是根基於個體面對問題時自然產生的臆測歷程（Cañadas & Castro, 2005），伴隨著論證發生，將學生的臆測認知歷程轉化為有結構的五個教學階段（Lin & Tsai, 2016）。今從三個方面論述臆測本質作為素養導向教學取向的意涵。

1. 數學臆測符應當今教育改革強調的素養：臺灣歷經多次的教育改革，從 90 暫行綱要，92 課綱、97 正式課綱，至現今的十二年國民基本教育綱要，臆測的重要性皆屹立不搖地存在於課綱當中；可見數學思考方法與思考歷程是中小學教育課程中非常需要的，並且隨時代推進有日漸重要的趨勢。數學素養是十二年國民基本教育課程綱要數學領域的重點目標（教育部，2018）。數學素養的內涵包括了數學知識、情意涵養之外，更關注數學能力，例如：歸納、演繹、推理、一般化、特殊化、系統化、監控等，並熟悉觀察、臆測、論證的解題歷程。當學童具備數學數養，意味著他能善用假設、定義或已知的數學概念來形成數學論述，並且能夠在觀察資料或數學關係後，提出臆測出來的猜想，利用推理來驗證。學生透過數學臆測歷程，可以培養數學素養（林碧珍，2020）。

2. 數學臆測是數學知識形成的歷程：數學臆測的過程歷經觀察、猜測、找例子、一般化及證明，是形成數學知識最核心的歷程，亦是數學家創建數學定理的歷程。Lakatos（1976）提出數學知識形成必經的四個階段：從提出猜想、實驗或檢驗猜想、提出反例來反駁原猜想、重新檢驗修正原猜想、形成更精煉的猜想，證明與反駁穿插於各階段中。林碧珍（2015）提出臆測教學模式五個階段中的造例階段、提出猜想階段、效化階段、一般化以及證實階段是提供機會讓學童經驗臆測歷程獲得的數學知識，如同體驗數學家從無至有產生數學知識的歷程（林碧珍，2015）。

3. 數學臆測是啟動數學論證的引擎：數學臆測的歷程中形成假設或猜想，猜想需要找證據加以證實，也需要找證據支持或推翻，過程中自然引動了論證，主張、資料、論據、背景知識、限制和反駁等論證的元素（Toulmin, 1958）：（1）造例階段讓學童個別創造例子並且彙整到小組彙整單。（2）提出猜想階段學生觀察彙整單（資料），提出數學猜想（主張）。（3）效化階段目的是將猜想用他組的例子（論據）進行效化。（4）一般化是將效化過的猜想推論到所有例子都成立，限制範圍作為前提條件；（5）證實階段學童運用已知的數學知識進行演繹推理（Lin, 2017）。數學臆測與論證元素是緊密交織的（Cañadas, Deulofeu, Figueiras, Reid, & Yevdokimov, 2007）；也就是說臆測的歷程能有效促使論證的產生（Lin, 2018a）。林碧珍的研究也證實透過數學臆測教學可以有效引動論證的發生（林碧珍，2016）。然而，雖然臆測與論證兩者關係密切，但在數學臆測教學模式的意義不同，數學論證是一個集體對話的歷程，是學生展現的能力，是教學的結果（Conner, Singletary, Smith, Wagner, & Francisco, 2014）；而數學臆測教學則是一種教學取向，是教學的過程（林碧珍，2016）。

臆測教學模式的五個階段就是數學家形成數學知識的臆測歷程（Lakatos, 1976），提供機會讓學童體驗數學知識從無至有產生的歷程，習得一個命題的嚴謹歷程，以這樣嚴謹求真的歷程，學童從知識的接收者轉變為創造者，符合主流的教育思潮以學生為本位的教學取向；臆測教學模式是素養導向的課堂是可行的教學取向（林碧珍、鄭章華、陳姿靜，2016）。

（二）數學臆測教學課堂展現學生的 4C 能力

臆測教學課堂展現學生的 4C（創新、批判、協作、溝通）能力。相較一般數學課堂中，以課本為材料進行教學，學生被動的接受知識，臆測教學提供了給學生從自己造例出發較有感的學習機會，能從自己形成的資料中異中求同、同中求異，尋求規律、有意義地產出數學關係（林碧珍，2016）。

1. 臆測教學可以培養學生的創新能力，在於臆測教學的學習結構自然需要學童以創造性的心理歷程來運作。創造性的心理歷程包含六個階段是：（1）覺察不協調的現象；（2）分析困難處；（3）提出假設；（4）驗證假設；（5）修正假設；（6）重複前面的階段直到找到答案（Torrance, 1988）。覺察、提出假設、驗證、修正歷程，是臆測教學模式必然會歷經的過程。未經驗臆測教學的學生一開始時比較容易只看到表象的數學內涵，較少看到內在的數學的關係，易提出較多「理所當然」的猜想，例如：偶數的質因數分解中一定有 2 這個質因數，從 Lin（2018a）的實徵研究中發現，經驗一年臆測教學的學生相較於前一年，能夠提出更多關於數學性質的猜想。

2. 臆測教學可以培養學生的批判能力，在於臆測教學的學習本質包含辯證批判考的學習歷程，批判性思考包含了某些內涵傾向，像是（1）能夠思想開明，澄清並聚焦在真正的問題上，分析問題及相關的假設；（2）能善用推論、演繹和歸納推理，並可以進一步評斷前提的有效性；（3）權衡證據的可信度或判斷數據或訊息的來源是否可用等（Pithers & Soden, 2000）。臆測教學的課堂裡，學生必須凡事說理，有憑有據，尤其在效化階段需要學生以證據來判斷猜想的有效性，無論說話者是高成就或低成就的同儕，都需要回歸用例子（證據）來驗證，證據的正確性和說服力是學童會自然去聚焦的。數學臆測教學的第四階段一般化和第五階段證明時，把全班猜想推論到「所有情境」中，會形成前提，並評估該前提是否周全，形成命題後再進行證明，運用先備知識或其他證明過的數學性質來做演繹推理。臆測教學透過多例、多個猜想來歸納，再用嚴謹的演繹推理形成最後的數學知識（林碧珍、鄭俊彥、蔡寶桂，2018）。在 Lin（2018a）的實徵性研究發現，透過臆測教學，學生在集體論證的過程中，更能夠進行反駁，使用證據來論證的比例大幅增加（中年級學生使用證據的比例從 58% 增加到 90%），為了提升證據的可信度，學生經驗一年的臆測教學後更能運用有效的數學性質來做為證據說服他人（Lin, 2018a）。

3. 臆測教學可以培養學生的溝通能力，在於臆測教學的課堂的交談對話品質不是只有說明自己的想法而已，更多的交談是解釋與論證。說明和解釋不一定能達到有效的溝通，說明是將自己的想法描述清楚，說明和解釋都是站在說話者的角度，說話者要說清楚，解釋在對話框中具有澄清功能，當說話者進行解釋時，目的是讓接收者透過解釋後具備更好的理解；而論證是站在聆聽者的角度，說話者不僅要讓聆聽者聽清楚，而且要說服聆聽者；論證和解釋在目的上有所不同，論證的過程中聆聽者要採取較積極主動的方式來理解說話者的意思，因為說話者說明的目的是在尋求對方給予立場，往往是在一個具有爭論性的討論場合，說話者希望尋求接收者接受或反駁某一論點（林碧珍、鄭俊彥、蔡寶桂，2018；Walton, 2006），因此聆聽者需要清楚

理解才能表態。一般的數學課室討論經常見到小組討論的風景是：學生拿著白板進行想法的說明，但過程中不一定進行了有效的溝通，對於高成就或低成就的學生來說，未必有意願去理解他人的想法，說話者只要說清楚了，解釋的任務就也隨之結束。而在臆測教學中尤其效化階段，同儕間會大量運用數學溝通語言來支持、批判、挑戰、辯護（Berland & Reiser, 2011; Chin & Osborne, 2010），由於說話者的目的是為論點尋求立場，讓聽者聽清楚就是說話者的任務，不會講完就結束了，而聽者不僅要聽清楚，還要評估論點是否合理、有說服力，進而提出正面或反面的立場。相較於解釋，論證需要更多主動、有效溝通才能進行，臆測教學的過程中可以提供集體論證有效溝通的機會（Lin & Miao, 2018）。

4. 數學臆測可以培養學生的小組協作能力。臆測教學是促進同儕間的社會性溝通的教學取向。數學臆測提出的猜想真假未定，需要全班或小組集體論證的社會協商歷程（Lin, 2018b）。協商過程中成員們為了要使某種現象合理，將透過對話來進行支持、批判、評估、挑戰、辯護（Berland & Reiser, 2011; Chin & Osborne, 2010; Lin & Miao, 2018）。也就是說，臆測透過學生間的同儕互動，歷經論證的過程，利用證據來說服和修正已達成共識。小組活動貫穿數學臆測教學模式的每個階段，在造例階段，學生先造出 1～2 個個人例、再彙整至小組約有 8～10 個例子，各組最後集成全班約 12～100 個例子，成為可觀察規律的資料，以作為論證的證據。在提出猜想階段，學童先依據資料提猜想，經過組內成員的檢驗後，確認是依據證據為本的猜想，再整合形成小組猜想。效化階段是透過組間相互驗證，小組猜想逐一用他組例子作效化、再到歸類並檢驗，最後成為全班猜想；猜想一般化是在全班活動下進行，將猜想加入限制條件，成為恆真命題。證實階段用已知的數學知識進行演繹推理，來說服他人相信。每一個臆測活動是依循個別活動、小組活動再到全班活動的流程，用越來越多例子作為產生或檢驗猜想的論據，還要經過一般化，並且試著證明它的恆真性。數學臆測教學模式能確實發揮小組合作的實質功能，讓學生經歷協商歷程，因而提昇協商的能力（林碧珍、鄭俊彥、蔡寶桂，2018；Lin, 2017; Lin & Horng, 2017）。

二、分析教師角色的理論架構

本研究採用 Chen 等人（2017）的分析架構，探討教師在臆測教學中的角色內涵。分析架構是運用活動和想法兩個維度來區分四個象限，活動及想法之區分有其必要性。當教師進行全班討論，討論活動由老師所主導，但有時老師的問題目的是激發學生對特定概念的先備知識，或組織學生的想法以達成共識，抑或教師的對話目的是激發學生的想法並比較各種想法，以確定想法的弱點或優點並加以修正，此時教師並非在評估他們想法的準確性，想法是由學生所提供。相反，在某些情況下，學生會進行小組討論活動，但老師可能會加入討論以推動學生對知識的理解，在這些情況下，想法的所有權由老師控制（Chen et al., 2017）。簡言之，想法的擁有權關注的是學習內容、知識的提供者是誰？而活動的擁有權則是關注互動的方式為多人參與還是排

除其他人參與。

分析架構中由兩個維度劃分出的四個象限，四象限的 X 軸和 Y 軸分別表示「想法擁有權」和「活動的擁有權」。X 軸和 Y 軸的兩端分別「教師」與「學生」，Chen 等人（2017）透過紮根理論分析原案來產出 9 個行為，並將行為分類到教師角色的架構中，詳述行為特徵及舉例。Chen 等人更依據不同象限的教學行為，概念化為教師的四種不同的角色：參與者（participant）、教練（coach）、分派者（dispenser）和協調者（moderator）。將行為構築出四種鮮明的教師角色，能幫助教育研究者及現場教師快速地掌握教學行為的內涵，是此架構的特色。（1）第一象限是學生同時具有活動和想法的擁有權；教師的角色是參與者；在此象限中教師經常出現的教學行為是鼓勵學生和交換想法。（2）第二象限是學生具有活動擁有權但教師具有想法擁有權；教師的角色是教練；在此象限中教師經常出現的教學行為是挑戰、引出。（3）第三象限是教師同時具有活動和想法的擁有權；教師的角色是分派者；在此象限中教師經常出現的教學行為是講述和主導。（4）第四象限為活動擁有權是教師而想法擁有權是學生；教師的角色是協調者；在此象限中教師經常出現的教學行為是辨認、比較和整合。

教師扮演參與者的角色時，態度上是充分給予學生活動與想法的主控權，讓教師本身與學生處於平等的互動關係來參與學生的論證對話，教師也可以提出自己的立場和意見，與學生一同進行支持、反駁和辯護等論證活動，學生也會平等地去評估教師的想法，教師與學生平等地交換意見，學生通常回應一個或多個句子來建構想法。教師扮演參與者的角色，教學行為有鼓勵與交換，當學生進行討論時，教師提供客觀的意見與學生交流、**交換**想法，或用言語、肢體來**鼓勵**學生的想法，且並非暗示答案的對錯，相反地，學生能決定是否接受教師提供的想法，討論仍由學生主導，想法也由學生主控。

在學生為主導的活動中，學生進行各自的討論活動，老師從旁影響思考的方向，此時教師的角色是一位教練；教練是充分給予學生進行活動的主控權，但仍具有想法的影響力。教師允許學生自由地進行討論，而教師會在學生討論的過程中不斷挑戰與引出學生想法，並透過提問來幫助學生解決困難，透過**挑戰**刺激學生想法，透過**引出**讓學生將想法說得更清楚。

分派者是活動與想法全由教師掌控，教師聚焦於傳遞知識、解釋、回應內容與評估學生是否理解。教師用解釋與訴說的方式來傳達某個主題的相關知識和概念，或是教師用回應或指令帶領學生思考與活動的方向（Chen et al., 2017）。假若教學過程中學生較少回應，或運用單詞回應或填充教師語句，則需透過指導與講述的方式在師生對話中控制想法與活動；此時教師扮演的是一位分派者角色，的目的在指導學生發展想法和策略。**指導**是指當教師想進行知識搜尋時，透過一問一答來要求學生回答與該主題相關的知識。當教師發現學生的討論內容裡有誤，或教師試圖想要掌控討論方向時，教師提出具有高度暗示性的提問，此時教師給學生的問題是已預設答案的問題，這樣的教學行為也是指導的形式。**講述**是當教師依照事先計畫好的講稿，以口語單向地傳遞知識與訊息給學生。

教師是一位協調者的角色，活動及鷹架的提供由教師主導，但是想法是由學生提供，學生在教學活動中能自由地討論並產生想法。當學生有不同想法時，教師會介入，使學生進行辨認（recognize）、比較（compare）和整合（integrate）以達成共識。**辨認**的行為是教師徵求學生表明立場，並讓全班辨別學生的想法或論點，教師將學生的注意力聚焦於辨認某個想法的正確性。**比較**是當教師透過語言或行為來讓學生注意想法或作法之間的相似性與差異性。**整合**是教師用來合成或整併全班想法的回應（Chen et al., 2017）。無論是在辨認不同的立場、進行比較分析或整合全班的共識，最重要的是想法的來源是由學生來提供。

Chen 等人（2017）的分析架構儘管是在科學論證課堂師生互動過程中關注教師的角色內涵，然而本研究的臆測教學也是關注在引發數學論證發生的教師角色，兩者均關注的是課堂中引發學生論證發生的教師角色，所不同的是由於本研究是在數學臆測教學模式脈絡下的論證課堂。五個階段各有其師生共同建立的教學規範，例如；造例階段著重在小組資料單的分類及彙整，而效化階段著重在小組猜想的歸類及彙整，因此本研究的分析架構考慮了臆測教學每個階段的教學行為，將擴充 Chen 等人的分析架構增加為三個維度:臆測五個階段、活動擁有權、想法擁有權。

相對於傳統的講述式教學，臆測教學主要是以學生為主體來進行，讓學生能在活動中進行論證，因此目前有關數學臆測教學的相關文獻，多聚焦在探討學生的部分，分析學生在臆測活動中的論證品質（林碧珍，2015；林碧珍，2016；Lin, 2018a），然而，臆測教學的過程中，師生的互動相輔相成，並非讓單純地學生執行就能達成，需由老師從旁予以協助，學生才得以順利完成臆測任務。經常見得剛接觸臆測教學的教師及已經執行多年的教師之間，儘管是使用相同任務流程和素材，但學生猜想的品質差異甚大，致使本篇期能探究臆測專業教師對學生的互動細節。

協調者角色由教師主控活動並由學生主導想法，是現場教師較容易產生共鳴的師生互動方式，臆測教學中教師是如何透過有架構的提問使學生提高臆測的品質，學生產出的臆測內容又因此有哪些改變，是本篇想探討的，故本文先以教師是扮演協調者的角色進行教學分析。

參、研究方法

一、研究方法

本研究採個案研究，實地進入課堂中進行觀察，在完整的情境脈絡下，藉由觀察與分析獲得資料，深入瞭解教師在臆測教學中的教師角色內涵，探討教師教學的獨特現象。在蒐集資料前，充分考量影響因素再行蒐集資料，事先了解教師的背景，當進行資料分析與描述時，先對教師的行為與情境完整的了解。以課堂教學觀察法進行資料蒐集；資料收集完成後，用多元資

料進行分析與歸納，以進行來源的三角校正。解讀及解釋資料時盡量關照及還原當時課堂真實現象，以教學影片中師生互動的脈絡、語氣進行行語句之判斷，盡量降低詮釋時的誤解。本研究以質化資料呈現個案教師在數學課堂的教學行為特徵，質化的個案研究是本研究的研究方法。

二、研究對象

本研究的研究對象是任職於新竹市某中型公立小學有 31 班級規模的一所小學的六年級班級菁菁老師及班上的 24 位學生，其中男生 12 人，女生 12 人。由於本文目的是要提供一個素養導向的數學課堂教師有效扮演協調者角色的教學行為的範例，以利培養學生的數學素養，尤指數學論證。所以研究對象採立意選樣，需要選擇一位數學臆測的任務設計與教學實務能力的資深教師作為觀察對象。菁菁老師教學年資 28 年，具數理教育碩士學位，參與本文第二作者林碧珍主持的科技部臆測教學團隊研究計畫，將數學臆測活動融入數學教學中已有七年的經驗，其數學臆測的任務設計與教學實務，在研究團隊扮演領航的角色，不僅支援團隊中其他教師往前拓展而且是被諮詢的對象，這些指標顯示菁菁老師在臆測教學具有相當水準的熟練度。

臆測教學研究計畫旨在協助教師設計臆測任務並實施數學臆測教學。研究團隊中的教師每學期須進行一至二次的臆測任務設計與實踐於課堂，教學的前置作業包含了教材分析、設計有理論背景的臆測任務、報告教學計畫與修正，並於教學後撰寫臆測教學模組初稿。菁菁老師的教學將全班四人小組採異質性分組成 6 組，其中班上有 4 位學生中年級是菁菁老師班上學生，已接觸過兩年的臆測教學。從教學歷程來看，菁菁老師的教學是採用臆測教學的教學模式，依照造例、提出猜想、效化、一般化及證明的五個階段進行臆測教學。為了創造數學課堂中充滿著論證的聲音，將數學課室經營成為學生的討論社群，課堂中的結論並非取決於教師的權威，而是由學生自主地相互辯證、論述與推理來達到的共識，從教學特徵來看，菁菁老師對本研究而言實屬合意的抽樣對象。

三、資料蒐集與分析

非參與觀察法（nonparticipant Observation）是本研究蒐集資料的方法。本次蒐集資料的單元是六年級上學期第一單元質因數分解與短除法，這個單元總共進行 9 節課，前 3 節是基本的質因數概念建立，因非臆測活動，故不納入資料蒐集的範圍，本研究蒐集之資料從第 4 節至第 9 節，臆測活動進行 6 堂課，共 243 分鐘。每次資料蒐集時，教室都會架設攝影機及錄音筆。該班學生由於是科技部研究計畫的參與班級，經常作教室觀察，觀察員或攝影機成為是教室中自然存有的人與物，為了能使研究對象及班級都能在最舒適、自然的情況下被觀察以得到最自然且真實的資料。數學課堂全程錄影、錄音蒐集資料並記錄觀察師生的課堂討論、肢體與反應的

隨手筆記。全班討論時攝影機置於教室後方拍攝上課全景；當進行小組討論或個別造例時，則走近小組拍攝教師其與學生的互動過程，以錄下詳實小組討論的對話內容。

本研究透過原始教學影帶的分析來進一步歸納和概念化課堂中的現象，資料分析時依照話語的意義來決定分析單位，因此本研究以言談（utterance）作為分析單位，言談意即一段話語中只有一個想法或概念，也就是依照話語的意義來決定單位。當表達連貫的語意時，會算成同一個單位；當一連串的話語中，句子表達的意思不同，則會計算成多個個別的分析單位，例如「好，有沒有人要表達自己想法？這在你們的想法，在你們、你們是支持還是反駁？有沒有在你們什麼地方不成立的？」三句話在教學流程中教師雖然是接連著說，但第一句旨在在開放徵求學生提供猜想，而第二句詢問小組的立場同意與否，第三句則需請學生關注彙整單找出反例。三句話語意均不同，故被判定為三個單位。

本研究的分析架構包含三個維度：X 軸和 Y 軸採用 Chen 等人（2017）的架構，以活動和想法為兩軸，擁有權是教師或學生，而形成四個象限，每個象限特徵化教師的不同角色和教學行為。本研究增加 Z 軸，代表的是臆測教學五個階段，期能在臆測教學各個階段觀察教師的比重變化，然因臆測階段的進行僅有正方向，無負方向，故 Z 軸方向僅有正軸，如圖 1。

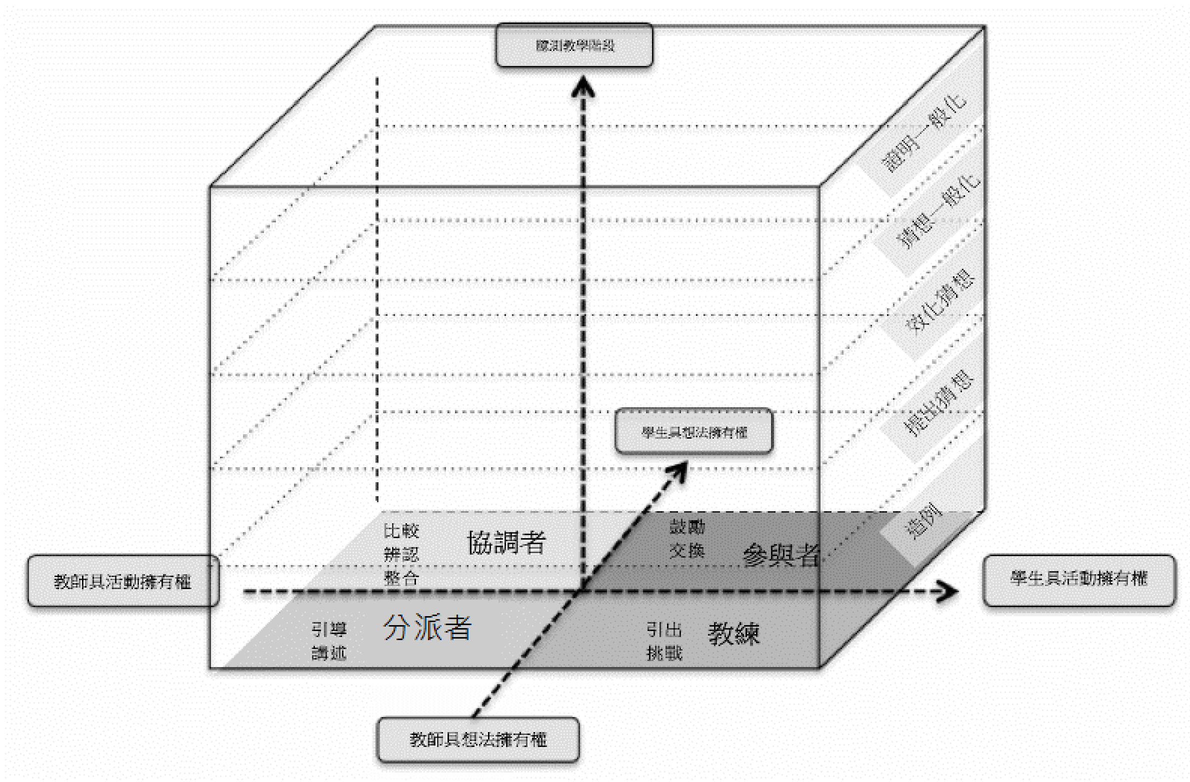


圖 1　臆測教學下教師角色分析研究架構

依研究架構發展編碼系統來分析教學原案，將臆測階段、教學行為及角色別以符號做代表形成編碼表：第一碼為階段由造例 C1、提出猜想 C2、效化 C3、一般化 C4 到證明 C5；第二碼

為教師的角色：參與者 P、教練 C、分派者 D、協調者 M；第三碼為該角色中的行為號碼（1~3），辨認行為（M1）的目的在於教師透過問話徵求學生表示立場或讓學生釐清自己的想法；比較行為（M2）教師目的在於徵求學生關注內容的共同點或相異處；整合行為（M3）教師徵求學生將想法分類、彙整（Chen et al., 2017）。

當分析單位確定後，將判別不同的教師行為，進行編碼和次數統計，編碼的依據根據 Chen 等人（2017）所產出有關教師行為的描述作為分析標準，有關教師是協調者角色的教學行為編碼及提問範例如表 1。

表 1
效化階段的協調者角色和教學行為及提問範例

效化階段的協調者角色		
教學行為	目的	提問範例
辨認（M1）	徵求學生表示立場。	為什麼你同意他們的想法？
	徵求學生釐清自己想法。	這個想法是要看誰和誰的關係？
比較（M2）	徵求學生關注於內容的異同。	這兩種想法有哪裡不同？
		有沒有發現這些跟這些之間有什麼樣的關係？
整合（M3）	徵求學生統整各種想法。	如果要把這麼多想法分類，可以分成幾類？
	徵求學生歸納繁雜的資訊，進行歸類或彙整。	這兩個想法我們要用哪一個想法當做代表？

本次研究進行六堂課（共 243 分鐘）的教學原案分析，共統計出 1756 個言談。為提昇資料分析者的信度，本研究採用三角校正法來檢核研究的信度，將錄影檔轉錄為逐字稿後，將其中一堂課的逐字稿由兩位具有數理教育背景的研究者進行分析，給予兩位評估者分析標準，並用口頭介紹一次，確認評估者已了解分析架構和標準，才由評估者觀看錄影檔和逐字稿各自進行分析。分析完成後進行兩位評估者編碼結果的交互比對，透過交互比對，單位擷取中評分者之間約有 10% 單位相異，針對相異的部份進行反覆討論，直到達成共識為止。接著再各自為第二份逐字稿進行編碼，再比對與討論。編碼相異的部份則經兩位評分者進行反覆討論，直到達成共識為止。

四、研究脈絡

在臆測教學中教師的言談 1756 次中，扮演角色的頻率由高到低分別是參與者 438（25%）、教練 283（16%）、分派者 883（50%）、協調者 152（9%）。協調者角色敬陪末座，只佔了 9%，也就是在臆測教學教師最常扮演的角色是主控活動和主控想法，教師最少扮演的角色為教師主控活動但由學生主導想法。

造例階段及提出猜想階段最重要的目的是讓學生執行操作及彙整的任務，教師最常以分派者和參與者的角色，說明臆測教學規範時，是以分派者的角色直接向學生說明，一旦進入個人或小組猜想時，菁菁老師便轉換為參與者的角色將活動和想法的擁有權交還由學生自己主導。效化階段及證實階段是臆測教學中較為複雜的階段，需要學童理解他人的猜想，證實階段更要進行演繹推理，因此，效化階段及證實階段教師擔任分派者角色比例較高（均為 51.2%）；一般化階段較短，因此教師介入的次數較少，其中又以教練（50%）挑戰的行為為主。

表 2
臆測教學五個階段教師扮演的四種角色次數

臆測教學階段	參與者	教練	分派者	協調者	總數
造例	19（12.8%）	5（ 3.4%）	124（83.8%）	0（ 0.0%）	148
提出猜想	125（32.2%）	89（22.9%）	139（35.8%）	35（ 9.0%）	388
效化	183（25.1%）	102（14.0%）	373（51.2%）	71（ 9.7%）	729
一般化	2（12.5%）	8（50.0%）	4（25.0%）	2（12.5%）	16
證實	109（22.9%）	79（16.6%）	243（51.2%）	44（ 9.3%）	475
合計	438	283	883	152	1756

肆、研究結果

雖然協調者在各個階段的比例都甚少，但協調者的角色在臆測教學的重要性卻不容小覷，當更進一步以質性的角度分析協調者角色時，可以從學生學習的前後脈絡，看見協調者的行為對學生進行論證的影響。表3是在不同臆測教學階段以協調者身分介入的152次中的三種教學行為的行為比率。

表3資料顯示在臆測教學中，菁菁老師最需要以協調者角色介入的教學階段，是在效化階段，介入了71次/152次，占了47%，其次是證實階段和提出猜想階段，分別介入了44次和35次，佔了29%及23%。

而以協調者角色的介入的三種教學行為中，三種教學行為出現的頻率百分比中，以徵求學生進行比較猜想的異同最高，62次（41%）；其次是徵求學生辨認想法的意義共有52次（34%）；頻率最少的是整合，計有38次（25%）。

表 3
教師在不同臆測教學階段扮演協調者角色的教學行為次數

教學行為／臆測教學階段	協調者			合計
	辨認	比較	整合	
	次數 （%）	次數 （%）	次數 （%）	
造例	0	0	0	0
提出猜想	3（ 2.0%）	27（17.8%）	5（ 3.3%）	35（23%）
效化	30（19.7%）	21（13.8%）	20（13.1%）	71（47%）
一般化	2（ 1.3%）	0	0	2（ 0%）
證實	17（11.2%）	14（ 9.2%）	13（ 8.6%）	44（29%）
合計	52（34.0%）	62（41.0%）	38（25.0%）	152

以下將分別描述在臆測教學各階段中菁菁老師以協調者介入的教學行為內涵：

一、造例階段的教學行為

造例階段的主要目的是創造資料，整理和彙整資料。在造例階段，菁菁老師不以協調者的角色介入學生的學習，造例階段協調者角色的佔比為 0%，然而從造例階段的活動目標去思考即不難理解其原因：造例階段是讓學生製造例子，而協調者的教學行為如辨認、比較、整合需要以學生的猜想作為素材，才能有立場進而比較及整合，故在造例階段教師幾乎不以協調者的角色介入，而是著重於扮演引導學生操作和鼓勵支持學生的角色。

二、提出猜想階段的教學行為

在提出猜想階段的教學中，教師擔任協調者進行比較行為有助於學生看到更豐富的數學關係。諸如以下的教學對話舉偶，菁菁老師徵求學生比較以「你覺得質因數跟這邊有什麼關係，這邊跟質因數有什麼關係，每一個這邊跟這邊有什麼關係」（行 62）介入，幫助學生關注兩數與最大公因數的質因數分解之間的數學關係。學生開始關注到彙整工作單中欄與欄之間的共同點，因為察覺到共同點就有機會讓學生逐漸發現規律、提出猜想。

62	教師	：	你覺得質因數跟這邊有什麼關係，這邊跟質因數有什麼關係，每一個這邊跟這邊有什麼關係，有發現嗎？
63	25 號	：	都有這個
64	教師	：	那叫什麼 （25 號回應模糊）
65	教師	：	這個咧？
66	25 號	：	它是質數
68	教師	：	所以呢
69	6 號	：	我好像又找到了
70	教師	：	好，你找到什麼，你說一下　（1070907 錄）

又如當教師不斷聚焦於數字的共同點，問道：「都沒有發現規律性？」「這些的質因數分解有沒有什麼關係？」，以幫助學生看見數字間的共同點，老師請學生觀察後提猜想，當學生卡

住的時候，提供依循的架構給學生參考，學生能在老師提供的架構下，尋找共同點的方式提出想法。

265	教師	:	來，它們的質因數分解都是怎麼，沒關係，盡量找，你盡量找，來，它的這個跟它的，來，這 2 個數的質因數分解，這個跟這個有沒有什麼規律性，有沒有什麼規律性？（學生未回應）
266	教師	:	有沒有發現？都沒有發現規律性？
267	教師	:	來，看看，這些的質因數分解有沒有什麼關係？
268	學生	:	都會有這個
269	教師	:	對啊，就可以寫啊，那還有...

（1070907 錄）

臆測教學中討論的主要內容都是從學生猜想而來，而學生猜想都在此階段產出，猜想數量、品質都會直接影響接下來的各個階段，也就是說，提出猜想階段的重要性不容小覷。當學童缺乏經驗觀察，或彙整單的資訊量較大，教師適時扮演協調者角色介入，對學童的產出有直接的幫助，對臆測活動的整體品質也有直接的影響。

三、效化階段的教學行為

在效化階段的教學中，教師均有進行辨認、比較和整合的行為來協助活動進行。當菁菁老師徵求學生進行辨認時，主要目的是在幫助學生表明立場，菁菁老師經常會以徵求學生表達立場（行 81） 的介入方式，協助學生主動質疑、批判、反駁、支持。表達立場需要充足的理解及批判的思考後才能提出，如果猜想不夠完善，學生也可以提出修正的意見。例如，當學生認為 8 號提出的猜想不夠完整，應該要將「任意選兩個數」數擴充成「任意選三個數」相乘也可以成立（行 86），此時菁菁老師會以順著學生的意思介入，增加內容或刪除內容來協助修改猜想。

61	8 號	:	任意選兩數相乘，得到的積會是某數的因數。
62	教師	:	得到的積、會是...好。
			⋮
77	教師	:	請問，同意嗎？ （學生點頭）
78	教師	:	同意，好。都 OK？
79	教師	:	好，有沒有人要表達自己想法？
81	教師	:	這在你們的想法，在你們、你們是支持還是反駁？
82	教師	:	有沒有在你們什麼地方不成立的？（學生搖頭）
83	教師	:	好，謝謝浚翔
84	教師	:	有沒有在你們不成立的？（學生搖頭）
85	教師	:	好，請問，已經這裡有講一個，任意選兩個數。
86	8 號	:	三個數。
87	教師	:	三個數也可以嗎？
88	學生	:	可以。 （1070910 錄）

效化階段的目標是確認猜想在所有例子中都是成立的，一個猜想能不能成為全班猜想，需要經過全班的驗證，並經過全班的同意，因而在效化階段會充分地讓學生說明立場－同意或不同意。然而，學生的學習習慣多半都不會去檢驗台上同學提出的想法，通常是聽完就接受了。所以辨認行為在此階段有其重要性。

除了辨認行為之外，各組猜想的歸類也在此階段是重要的任務之一，教師透過比較行為進行猜想的歸類。當教師徵求學生進行比較時，能使學生聚焦猜想的前提條件，以利正確分類。當某一組學生報告完一個猜想後，要進行歸類，和全班檢核是否歸類正確，這個過程就需要教師不斷聚焦到猜想「是否相同」，才能順利完成歸類，比較並確認認為相同的各組想法。例如，在 10 號學生提出一個猜想「兩個數只要有公倍數關係，它們的質因數分解都會有一樣的數字。」後進行了一連串的討論，有許多組別也提到相同的猜想（其他組的發表對話過程在此部份暫不呈現以避免失焦），經過解釋，老師把這個猜想的前提（兩個數只要有公倍數關係）拉出來談（行 127），為的是幫助後續其他組別歸類猜想。後來歸上來的猜想也會一樣先檢查前提是否相同（行 193），再詢問學生整個想法是否相同（行 213）。

127	10 號	:	兩個數只要有公倍數關係，它們的質因數分解都會有一樣的數字。
			⋮
177	教師	:	好，來，它的條件是什麼？ （全班多處有回應）
178	教師	:	兩個數有倍數關係，這個是我們的條件，
179	教師	:	那看到什麼關係？（全班多處有回應）
180	教師	:	他的兩個質因數分解裡面會有相同的算式，對不對？（學生未回應）
181	教師	:	會有相同的質因數相乘的算式，對不對？（學生點頭）
182	教師	:	好。還有沒有（相同的猜想）？
183	學生	:	有。
184	教師	:	有，對。不要說沒有哦，因為老師都幫你們整理出來
185	教師	:	哪一組還不曉得自己在寫什麼？ （5 號走上台）
186	教師	:	來，你們看這一組，來，哲慶 ，你講的是用哪一個例子來。
187	5 號	:	兩數公倍數的質因數分解，會有一些相同，這是 15=3*5；45=5*3*3，這乘數又等於公倍數 45。都有、他們都有相同的...。
188	教師	:	你們拿錯張，你們這個不是拿這一個吧
189	教師	:	你們的什麼？對啊，拿錯了，你看，歸錯了，拿回去。沒有認真聽。來第幾個？
190	5 號	:	第二個。
191	教師	:	對啊，所以，要罵誰？你啊。來，上來。 （11 號走上台）
192	11 號	:	只要某一個數和另一個數，如果是它的倍數。
193	教師	:	請問，這條件有沒有一樣？ （部分學生點頭）
194	教師	:	你看，只要某一個數和另外一個數如果是它的倍數…
195	教師	:	你看我們昊子（10 號）寫的多好，你寫這麼長，其實就是什麼？ （學生多處回應）
196	教師	:	兩個數只要是公倍數關係！
197	教師	:	語文程度馬上就知道了，對不對？來，可是下面來（教師用手指示意請學生繼續說）。
198	11 號	:	那兩個數就一定會有兩個公因數。
			⋮
213	教師	:	那這兩個，是相同的想法嗎？
214	學生	:	不太一樣….差不多….。
215	教師	:	一個是講會有相同的質因數分解的算式，對不對？

（1070906 錄）

當在確認猜想是否要歸到某一類時，菁菁老師以先聚焦於比較猜想的「前提條件」的介入方式（行 193），讓學生了解比較前提條件是命題之間最關鍵的部分。在效化階段，菁菁老師協助學生先關注到前提條件的比較，學生了解到若「前提不同」就無法反駁，「前提相同」才能繼續比較後面所描述的性質是否也相同。當學生被問「兩個想法相同嗎？」，學生會先聚焦在「猜想的前提相同嗎？」再關注於「猜想的性質關係相同嗎？」。

歸類完猜想後，下一步即是整合出一個代表性的猜想作為全班猜想，因此在效化階段，當進行猜想歸類之後，菁菁老師會徵求學生從多個類似的猜想中選出或整合出一個最完整、最具代表性的猜想。此時學生經常從字體大小、整齊程度、有無舉例說明、用詞是否容易理解，作為評斷依據，來評估猜想間的優劣。

42	12 號	：	最大公因數除了質數和 1，它們的質因數分解有的算式都會出現在最小公倍數質因數分解的算式上，也和兩數的質因數分解有關係。
			⋮
65	教師	：	好，有沒有同學有寫到這個想法？請拿出來。[學生進行猜想歸類]
			⋮
102	教師	：	最小公倍數做的質因數分解都有在兩個數的質因數分解中出現，一樣嗎？（學生搖頭）
103	教師	：	它只是反過來講，對不對？（學生點頭）
104	教師	：	兩個數的質因數分解，都出現在最小公倍數的質因數分解裡面，是不是一樣的？（學生點頭）
105	教師	：	來，看這個。兩個數最小公倍數質因數分解之後，會是兩個質因數分解合起來。
106	教師	：	這一個，講的跟他們的、有點不太一樣，差別在哪裡？
107	教師	：	前面是講什麼？
108	12 號	：	出現。
			⋮
115	教師	：	啊這邊講什麼？
116	12 號	：	合起來。
117	教師	：	請問合起來和出現有一樣嗎？
118	12 號	：	沒有。
119	教師	：	什麼是出現？什麼是合起來？
			⋮
126	教師	：	來，我們來解釋、讓他解釋一下，他認為的合起來。

（1070911 錄）

從語料中可以看出學生在整合之前需要理解並掌握每一個猜想之間的差異性，針對猜想中描述的語詞，如「合起來」、「出現」等不同用詞（行 108, 119, 126），讓學生先做解釋，確認全班都理解後，再讓全班共同決定全班猜想的描述方法要使用哪一種，這樣的整合過程就不會是貿然的評斷，也不是指透過寫字的美醜、字體的大小而定，而是基於數學的理解做更有價值的評估。

辨認、比較和整合在效化階段都各自有重要的功能，菁菁老師會在不同時機交錯介入，協助學生建立效化階段的教學規範。

四、一般化階段的教學行為

一般化階段中，教師鮮少扮演協調者角色，唯獨在詢問立場時，會運用到辨認的行為，學生大膽假設該猜想是一個恆真猜想之前，必須去設想所有的情況，再給予肯定的立場。由於，一般化階段的目的是要將每一個猜想推論到所有例子，學生不需要提出證據，只需要大膽假設，或將猜想增加限制條件來讓猜想排除掉被反駁的可能性，因此，在此階段，菁菁老師扮演較多的角色是教練，挑戰猜想，讓學生主動去檢核猜想的適用範圍，並將猜想加入更多限制條件，較少扮演協調者的角色。雖然一般化階段過程很短，但在論證的歷程中卻不可或缺，學生在短短的過程中經歷複雜而嚴密的思考。

五、證實階段的教學行為

證實階段是臆測教學最後一個階段，目的在於讓學生運用已知的數學知識進行演繹推理。對學生來說，用演繹推理來確認猜想的合理性是困難的，需要在證實之前先進行證實脈絡的整理。在臆測教學脈絡下，從同構的數據資料中所提出的猜想往往都會有些關連。菁菁老師經常在證實猜想前會介入，徵求學生先做整理，了解各種猜想間的包含關係。

在證實階段的一開始，比較行為有助於從猜想的前提條件或猜想的意義來篩選出猜想之間的包含關係或支撐關係，或是無法融入其他猜想的獨立猜想（行 365）。

365	教師	:	有沒有哪一些是比較特別的想法，是獨立的，跟別人沒有關係的？
366	教師	:	這邊 1 到 12 有沒有哪些是它都不會跟別人有一樣的？
367	學生	:	12。
368	教師	:	12！？
369	教師	:	看前面那邊有沒有不會跟別人一樣，它自己是獨立的？
370	學生	:	1。
371	教師	:	1 為什麼是獨立？
372	學生	:	因為它是講質因數分解。
373	教師	:	其它也講質因數分解啊？
374	學生	:	因為它是講它的分解。
375	教師	:	它是講質因數分解跟什麼？
376	學生	:	因數。
377	教師	:	從質因數分解講因數，
378	教師	:	好！再來！還有誰？
379	學生	:	4
380	教師	:	4 為什麼是自己獨立？
381	9 號	:	它在講奇數、它在講奇數分解。

（1070914 錄）

找出獨立的猜想意味著那些猜想是需要被單獨證明的，剩餘的想法則是屬於有共同點、可以分類的，透過比較想法之間相似之處，可以再做分類整理，如教師提問「好！那你們覺得哪一個地方，那感覺你們不覺得這兩個很像？」（1070914 錄－行 105），當猜想間有共同的前提，就有機會能夠放入相同的證明脈絡之中。

105	教師	：	好！那你們覺得哪一個地方，你們不覺得這兩個很像？沒有？
106	5 號	：	都是在講倍數嗎？
107	教師	：	對！它們都是在討論什麼情況？
108	學生	：	倍數關係。
109	教師	：	有倍數關係的話！
110	教師	：	一個是說質因數分解裡面會有相同的數相乘，對不對？（學生點頭）
111	教師	：	一個會說它就是它的什麼？（師生共同說因數），一個是，就這個會是最大公因數，一個是最小公倍數，對不對？（學生點頭）
112	教師	：	那你有沒有發現這兩個有辦法合併嗎？

（1070914 錄）

整合的教學行為介入亦有助於證明之前先梳理出具有從屬關係的猜想，以節省教學時間。菁菁老師徵求學生整合不同猜想的介入時機具有規律性，通常是在準備證明之前會介入。由於全班要證明的猜想通常有數個甚至超過十個（本次教學原案中有 12 個），若要逐一證明，則會耗費許多教學時間。菁菁老師採取的方式是擔任協調者的角色主導全班梳理出猜想的證明先後順序，但先後順序的安排卻由學生主導。不同猜想之間的包含關係是決定證明猜想先後的依據，當釐清了猜想間的包含關係，證明了其中一個猜想之後，另外一個想法自然就會成立。

諸如：語料中教師提問以「哪一個範圍比較大？哪一個範圍比較小？」（行 500）介入，目的是協助學生察覺猜想 3、6、7 之間的包含關係。

499	教師	：	（猜想）3 跟 6 它們，跟 3 跟 6 跟 7 的差別在於什麼地方？（學生未回應）
500	教師	：	哪一個範圍比較大？哪一個範圍比較小？（學生多處回應）
501	教師	：	3 的範圍大還比較小？
502	9 號	：	大，它是指那兩個倍數
503	教師	：	兩個數有倍數關係，然後這邊講的是已經有倍數關係了嗎？沒有！這邊是講什麼？
504	教師	：	這兩個數不管有沒有倍數關係，都有這些成立！對不對？是不是
505	學生	：	嗯！
506	教師	：	嗯！一個有規定，規定是什麼？
507	學生	：	一個規定是有倍數關係的……。
508	教師	：	然後這邊是什麼？（學生回應模糊）
509	教師	：	所以呢？
510	學生	：	所以它其實……。
511	教師	：	要大的包小的還是小的包大的？
512	學生	：	大的包小的！
514	教師	：	如果這邊成立了。
515	學生	：	那個也成立啦！
516	教師	：	那這樣子，這個也可以嗎？
517	學生	：	對！

（1070914 錄）

數學關係的前提大小判別對學童來說難度是高的，因此老師透過「大」和「小」來意指「限制少」和「限制多」的猜想（行 511），進而整理出證明的脈絡要大包小，也就是當證明出限制條件範圍較大的猜想之後，那麼限制條件限制多的猜想自然就會成立了。學習有效率的整理命

題脈絡再進行證明，是邏輯能力的培養；釐清猜想間的包含關係，才不致於需要花相同的時間逐一證明每一個猜想，可以使猜想減量，不僅使證明更有效率，也降低了學生理解的負荷量。相較於零散的想法，經過疏理脈絡會更容易掌握證明的目標。

六、不同教學階段的教學行為之比較

協調者在每個階段都有不同的功能，菁菁老師會在不同階段以不同的教學行為介入，幫助學生建立每個階段的教學規範（如圖 2）：

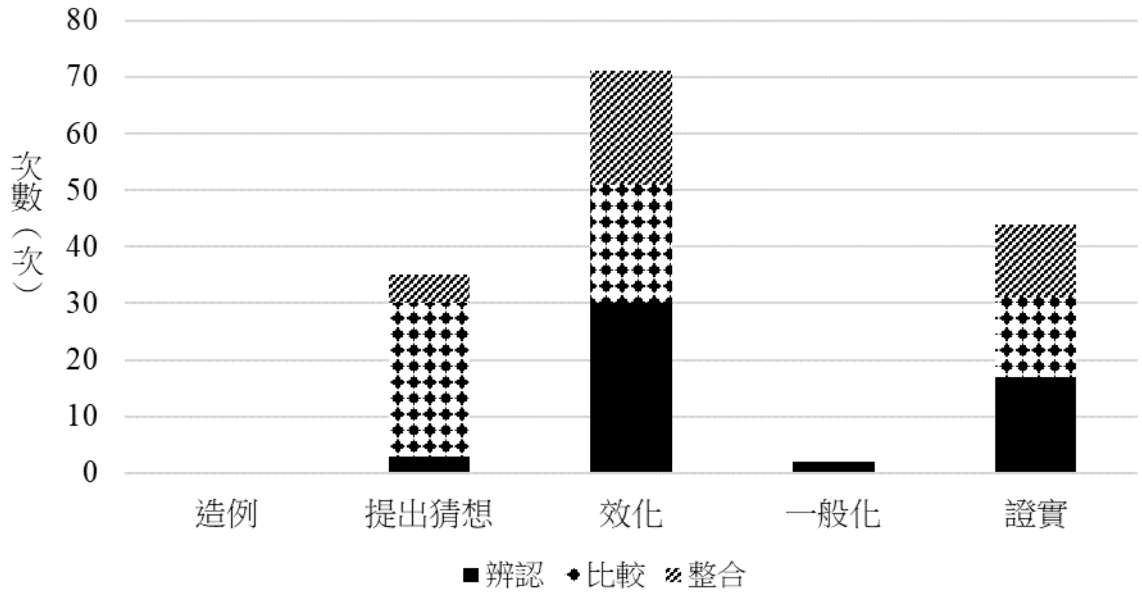


圖 2　協調者在臆測教學不同階段中教學行為次數分布統計圖

（一）辨認

在效化猜想階段，教師進行辨認行為的比例變大（19.7%），可見得教師在效化階段中的目標在於邀請每一組學生表明立場－支持或反對，菁菁老師詢問「請問這個有成立嗎？」「你們同意嗎？」請學生辨認自己的立場，在證實階段（11.2%）確認學生對於證實過程是否同意亦為重要的目標。在一般化（1.3%）所提出的假設及在證實時所提出的理由，為確認學生的立場是否同意，因此一般化階段協調者僅進行辨認行為，其他行為則是 0 次。總的來看，臆測教學階段教師所進行辨認的行為，其目的相同，問話的方式也相似。

（二）比較

比較行為在不同的臆測階段有不同的目的。在提出猜想階段，比較行為的比重較大（17.8%），其目的在於幫助學生有效觀察彙整單，進而提出豐富的數學關係，因此會請學生比較資料的異

同之處，如：「你覺得質因數跟這邊有什麼關係，這邊跟質因數有什麼關係，每一個這邊跟這邊有什麼關係？」；在效化階段比較行為比重也較大（13.8%），然其比較的目的在於進行猜想的歸類，比較焦點放在猜想之間的前提條件，如：「這條件有沒有一樣？」「那這兩個，是相同的想法嗎？」；證實階段（9.2%）比較的焦點也是猜想的前提條件，然而不同的是，其目的在於重新疏理證實的脈絡，找到猜想間相似處或是找出無法歸類的猜想要單獨證實，有助於增加證實的效率。

（三）整合

整合行為在臆測教學中進行得較少，卻仍有其重要性。在效化階段協調者進行整合的行為（13.1%），是在歸類好各組猜想之後，在同一類猜想中，為了推派出最具有代表性的猜想，則要進行同類猜想之間的整合，像是老師問道：「這三個要用哪一個（作為代表）？」學生需要在猜想中進行評鑑，篩選出最清楚、最具代表性的一個猜想作為代表，有時會整合不同張猜想的內容，形成較好的全班猜想；整合的教學行為在證實階段時（8.6%），教師的目的則在於疏理待證實命題之間的包含關係，因此請學生聚焦的內容不再是數學語言，而是關注於猜想的前提條件，試圖將較多限制條件的猜想包含進較少的限制條件的猜想之中，例如「哪一個範圍比較大？哪一個範圍比較小？」釐清包含關係後再證實之，有助於提昇證實的效率。

伍、討論與建議

一、結論

本研究探討個案教師在臆測教學課堂不同階段以協調者角色介入的教學行為內涵。個案教師在臆測教學擔任協調者的角色，主要以提問策略介入，以徵求學生提供想法。臆測教學的每一個階段都有其目的，雖然協調者在臆測教學中佔的比重不到全部次數的一成，卻是教師在臆測教學中協助學生論證扮演很關鍵性的角色。教師擔任協調者的角色會依照不同階段的性質及目的，進而調整其主要的行為，以讓臆測教學的效果達到最大。依據前述的研究結果，本研究得到下面兩個主要結論：

（一）個案教師在臆測教學以協調者的角色介入的教學時機主要是在效化階段，其次是證實階段和提出猜想階段。介入主要的教學行為包含：辨認、比較與整合。其中比較是最常發生的教學行為，其次是辨認。

（二）個案教師的教學行為在不同階段介入的目的不同。辨認的教學行為在效化階段，個案教師的介入是為了徵求學生表達立場，是要支持或推翻他組的猜想；在證實階段，介入是為了徵求學生辨認各種全班猜想之間是否具有從屬或包含關係。比較的教學行為在提出猜想階段，介入是為了幫助學生觀察到資料彙整單更豐富的數學關係；在效化階段，介入是為了徵求學生比較不同猜想之間的前提條件是否相同；在證實階段，介入是為了幫

助學生釐清各種猜想證明的先後順序。整合的教學行為，在效化階段，當進行猜想歸類時，個案教師以整合的教學行為介入，會徵求學生從多個類似的猜想中選出或整合出一個最完整、最具代表性的猜想。

二、討論

（一）臆測的課堂提供較多的素材讓學生來進行比較和整理的練習，過程中學生產出大量且多樣的猜想，因此，相較於傳統的數學課堂，教師的在課堂上功能逐漸改變，臆測課堂中需要處理繁雜的猜想，協調者角色的教學細節似乎都能在對話中看見其影響力。讓學生進行辨認、比較和整合的工作，有助於臆測活動的進行：辨認行為使學生需理解他人的猜想，並判斷猜想正不正確、有沒有價值？在判斷過後給予一個立場，並且為該立場援例辯護它、修正它；比較行為是較高層次的認知活動，學生必須在多個想法當中抽取共同的關係；整合則是要當學生認同多個猜想後更進一步地區分出猜想品質高低，然後選擇一個代表性的、概括性的猜想，並且用最精準的語言來描述它。這些高層次的認知活動是很有價值的能力展現。

（二）個案教師在數學臆測教學四種角色的界定，是以 X 軸表示課堂中的活動和 Y 軸表示想法，兩軸的兩端分別表示主導權是屬於教師及學生，離原點越右方或越上方表示主導權是屬於學生；反之，離原點越左方或越下方表示主導權是在教師身上。X 軸和 Y 軸所構成的四個象限分別表示一種教師的角色。協調者角色是落於第二象限，教師主導活動但學生擁有想法的主導權。有關教師角色的 Chen、Hand 與 Norton-Meier（2017）的分析架構，本研究從研究結果中發現兩個值得討論的地方：1. 角色分析架構適用於科學領域，也可以拓展到數學教育領域用來分析師生互動的課堂教師的角色和教學行為。2. 分析架構中的兩軸分別是活動相對於想法、教師相對於學生，在臆測教學活動中很容易區分，故此架構有助於提高資料分析的可信度。然而，研究對於該分析架構的貢獻，是增加了第三個維度教學階段，而使得臆測教學五個階段因為教學規範不同而分析出教師需要扮演不同的角色和不同目的的教學行為。研究結果可提供給實施臆測教學的新手教師的教學處方。

誌謝

感謝科技部科教發展及國際合作司提供經費補助專題研究計畫「國小在職教師設計數學臆測活動的專業成長研究」（NSC 100-2511-S-134-006-MY3）。感謝菁菁老師及班級學生的支持與協助，感謝本期刊的主編、責任編輯與審查委員的見解與建議。

參考文獻

林碧珍（2015）。國小三年級課室以數學臆測活動引發學生論證初探。**科學教育學刊，23**（1），83-110。doi: 10.6173/CJSE.2015.2301.04

【Lin, Pi-Jen (2015). The exploration of conjecturing provoking argumentation of mathematics in a third grade classroom. *Chinese Journal of Science Education*, *23*(1), 83-110. doi: 10.6173/CJSE.2015.2301.04 (in Chinese)】

林碧珍（2016）。**數學臆測任務設計與實踐**。台北市：師大書苑。

【Lin, Pi-Jen (2016). *Task design and implementation for mathematical literacy*. Taipei: Shih-Tai-Shu-Yuan. (in Chinese)】

林碧珍（2020）。素養導向的臆測教學模式。**小學教學（數學版），1**，8-11。

【Lin, Pi-Jen (2020). Literacy-oriented conjecturing teaching model. *Primary School Teaching, 1*, 8-11. (in Chinese)】

林碧珍、鄭俊彥、蔡寶桂（2018）。國小六年級學生數學論證評量工具之建構。**測驗學刊，65**（3），257-290。

【Lin, Pi-Jen, Cheng, Chun-Yung, & Tsai, Bao-Quei (2018). The construction of measuring six-graders' mathematical argumentation. *Psychological Testing*, *65*(3), 257-290. (in Chinese)】

林碧珍、鄭章華、陳姿靜（2016）。數學素養導向的任務設計與教學實踐：以發展學童的數學論證為例。**教科書研究，9**（1），109-134。doi: 10.6481/JTR.201604_9(1).04

【Lin, Pi-Jen, Chen, Chang-Hua, & Chen, Chih-Ching (2016). Task design and implementation for mathematical literacy: developing students' mathematical argumentation. *Journal of Textbook Research, 9*(1), 109-134. doi: 10.6481/JTR.201604_9(1).04 (in Chinese)】

教育部（2018）。**十二年國民基本教育課程綱要：國民中小學暨普通型高級中等學校數學領域.**。台北市：教育部。

【Ministry of Education (2018). *Curriculum guidelines of 12- year basic education: National elementary and middle schools and general senior middle schools in the field of mathematics*. Taipei: Ministry of Education. (in Chinese)】

Berland, L. K., & Reiser, B. J. (2011). Classroom communities' adaptations of the practice of scientific argumentation. *Science Education, 95*(2), 191-216. doi: 10.1002/sce.20420

Cañadas, M. C., & Castro, E. (2005). A proposal of categorization for analyzing inductive reasoning. In M. Bosch (Ed.), *Proceedings of the CERME 4 International Conference* (pp. 401-408). Sant Feliu de Guíxols, Spain. Published online at http://ermeweb.free.fr/CERME4/

Cañadas, M. C., Deulofeu, J., Figueiras, L., Reid, D., & Yevdokimov, O. (2007). The conjecturing process: Perspectives in theory and implications in practice. *Journal of Teaching and Learning, 5*(1), 55-72. doi: 10.22329/jtl.v5i1.82

Chang Liao, P. Y., & Lin, P. J. (2019, June). *The role of dispenser in conjecturing instruction*. Paper presented at the international conference of the 2019 Classroom Teaching Research for All Students Conference (CTRAS). Beijing, China.

Chen, Y. C., Hand, B., & Norton-Meier, L. (2017). Teacher roles of questioning in early elementary science classrooms: A framework promoting student cognitive complexities in argumentation. *Research in Science Education, 47*(2), 373-405. doi: 10.1007/s11165-015-9506-6

Chin, C., & Osborne, J. (2010). Students' questions and discursive interaction: Their impact on argumentation during collaborative group discussions in science. *Journal of research in Science Teaching, 47*(7), 883-908. doi: 10.1002/tea.20385

Conner, A., Singletary, L. M., Smith, R. C., Wagner, P. A., & Francisco, R. T. (2014). Teacher support for collective argumentation: A framework for examining how teachers support students' engagement in mathematical activities. *Educational Studies in Mathematics, 86*(3), 401-429. doi: 10.1007/s10649-014-9532-8

Lakatos, I. (1976). *Proofs and refutations: The logic of mathematical discovery*. New York: Cambridge University Press.

Lin, P. J. (2016). Improving knowledge for teaching mathematical argumentation in primary classrooms. *Journal of Mathematics Education, 11*(1), 17-30. doi: 10.26711/007577152790018

Lin, P. J. (2017). Enhancing students' mathematical argumentation in primary classroom. In B. Kaur, W. K. Ho, T.L. Toh, & B. H. Choy (Eds.), *Proceedings of the 41st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 1, p.237). Singapore: PME.

Lin, P. J. (2018a). The development of students' mathematical argumentation in a primary classroom. *Educação & Realidade (Education & Reality), 43*(3), 1171-1192. doi: 10.1590/2175-623676887

Lin, P. J. (2018b). The norms of argumentation in a primary classroom. In F. J. Hsieh (Ed.), *Proceedings of the 8th ICMI-East Asia Regional Conference on Mathematics Education (EARCOME8)*(vol. 2, pp.83-92). Taipei, Taiwan: EARCOME.

Lin, P. J., & Chang Liao, P. Y. (2019, August). *Teacher's multiple roles for students engaging mathematically conjecturing in elementary classrooms.* Paper presented at the Clute International Conference, New York, NY. Abstract retrieved from https://www.cluteinstitute.com/conference-proceedings/NY19Proceedings.pdf

Lin, P. J., & Miao, J. Y. (2018, August). *Teachers' supports for students engaging in mathematical argumentation.* Paper presented at the Clute International Conference, San Francisco, CA. Abstract retrieved from https://www.cluteinstitute.com/conference-proceedings/SF18Proceedings.pdf

Lin, P. J., & Tsai, W. H. (2016). Enhancing students' mathematical conjecturing and justification in third-grade classrooms: The sum of even/odd numbers. *Journal of Mathematics Education,* 9(1), 1-15.

Lin. P. J., & Horng. S. Y. (2017, July). *The conjecturing contributing to the group argumentation in primary classrooms.* Paper presented at the 9th Classroom Teaching Research for All Students Conference, Dalian, China.

Pithers, R. T., & Soden, R. (2000). Critical thinking in education: A review. *Educational Research, 42*(3), 237-249. doi: 10.1080/001318800440579

Torrance, E. P. (1988). The nature of creativity as manifest in its testing. In R. J. Sternberg (Ed.), *The nature of creativity: Contemporary psychological perspectives* (pp. 43-75). Cambridge, England: Cambridge University Press.

Toulmin, S. E. (1958). *The uses of argument*. Cambridge: Cambridge University Press.

Walton, D. (2006). *Fundamentals of critical argumentation: Critical reasoning and argumentation*. New York: Cambridge University Press.

蔡曉回、袁媛（2020）。
國小二年級學生在古氏積木、錢幣、櫻桃表徵物問題下的位值概念研究。
臺灣數學教育期刊，**7**（2），25-44。
doi: 10.6278/tjme.202010_7(2).002

國小二年級學生在古氏積木、錢幣、櫻桃表徵物問題下的位值概念研究

蔡曉回[1]　袁媛[2]
[1]桃園市中壢區中平國民小學
[2]國立臺中教育大學數學教育系

本研究以桃園市與新北市四所國小之 431 位二年級學生為研究對象，並以自編的位值概念測驗（個位問題 18 題，十位問題 18 題）為研究工具，探討二年級學生在三種表徵物（古氏積木、錢幣與櫻桃）問題下的位值概念發展及表現。根據學生的測驗結果，本研究將題目依難易度排序後，以通過個位、十位題目之五分之四為判斷通過的標準，將學生的位值發展分為三個層次：（一）渾沌期；（二）建構期；（三）理解期，接著以變異數分析考驗學生在不同表徵物問題表現的差異。本研究的主要發現為：（一）63.6%的國小二年級學生已建構二位數位值概念，達層次三「理解期」，24.6%的學生在「建構期」，而 11.8%的學生還在層次一「渾沌期」；（二）學生在三種表徵物的個位問題並未出現表現差異，但在十位問題上，錢幣表徵問題的表現優於古氏積木表徵，且古氏積木表徵優於櫻桃表徵；（三）學生在非例行性十進位及一個一個數的十位問題表現不如例行性十進位問題。

關鍵字：古氏積木、位值概念、表徵、例行性十進位

通訊作者：袁媛，e-mail：yuanyuan@mail.ntcu.edu.tw
收稿：2020 年 9 月 14 日；
接受刊登：2020 年 10 月 23 日。

Journal homepage: http://tjme.math.ntnu.edu.tw/contents/contents/contents.asp?id=21

Tsai, H. H., & Yuan, Y. (2020).
Second graders' concepts of place value represented by problems involving cuisenaire rods, coins, and cherries.
Taiwan Journal of Mathematics Education, *7*(2), 25-44.
doi: 10.6278/tjme.202010_7(2).002

Second Graders' Concepts of Place Value Represented by Problems Involving Cuisenaire Rods, Coins, and Cherries

Hsiao-Hui Tsai [1]　Yuan Yuan [2]

[1] Chung-Ping Elementary School, Taoyuan

[2] Department of Mathematics Education, National Taichung University of Education

The objective of this study was to examine students' developmental levels and performance in relation to the topic of place value. Accordingly, questions featuring three mathematical representations were used: cuisenaire rods, coins, and cherries. A total of 431 second-grade students were enrolled from four elementary schools in Taoyuan and New Taipei City. The research tool was a self-developed test with 18 questions on place value for units and tens. On the basis of the students' test results, questions were sorted according to difficulty, and four-fifths of the questions on ones and tens were used as the criteria to create three levels for classifying students' development in relation to place value: chaos level, construction level, and understanding level. The main findings of this study are outlined as follows: (1) 64.6% of the second-year elementary school students constructed a two-digit place value concept and reached the "understanding level," 24.6% were at the "construction level," and 11.8% remained at the "chaotic level." (2) No differences existed in students' performance in the three representations of the problems involving units. However, on the problems involving tens, students performed better in the coin representation problem than they did in the cuisenaire rods representation and better in the cuisenaire rods representation than they did in the cherry representation. (3) For problems involving tens, students performed better in problems represented in routine manners than in non-routine and one-by-one representations.

Keyword: Cuisenaire rods, Place value, Representation, Canonical base 10

Corresponding author：Yuan Yuan，e-mail：yuanyuan@mail.ntcu.edu.tw
Received：14 September 2020;
Accepted：23 October 2020.

壹、緒論

一、研究動機

數與量的概念在國小數學教育中非常重要，兒童在此階段需要養成對數概念的理解，也要培養演算的能力（教育部，2018）。數概念是抽象的，它是由數符號與位值所組成，才能讓 0-9 的數碼（digit）延伸形成二位數、三位數、多位數……等。對初學數概念的兒童而言，清楚明白位值概念非常關鍵（Chan, Au, & Tang, 2014; Chan & Ho, 2010），且研究指出兒童對於位值概念的理解能預測其算術表現（Ho & Cheng, 1997; Laski, Schiffman, Shen, & Vasilyeva, 2016; Moeller, Pixner, Zuber, Kaufmann, & Nuerk, 2011），更有學者指出兒童的位值概念能預測早期的數學成就（Chan et al., 2014; Miura & Okamoto, 1989），Wong（2018）也研究發現一年級兒童對整數的數量和位值的理解，會影響四年級理解分數和小數的知識。由此可知，位值的理解對於國小兒童學習數學乃是重要的基石。

綜觀近年以位值為主題的研究內容，學者主要探討提升學生位值概念的方法，以及學童對位值的理解與未來數學成就的關係（Chan, Au, Lau, & Tang, 2017; Dietrich, Huber, Dackermann, Moeller, & Fischer, 2016; Fraivillig, 2018; Laski, Ermakova, & Vasilyeva, 2014; Laski et al., 2016; Mix, Prather, Smith, & Stockton, 2014; Moeller et al., 2011; Wong, 2018），也有一些研究者使用不同的教具教學介入，以探究其對學生學習表現的影響。例如：Mix, Smith, Stockton, Cheng 與 Barterian（2016）發現 7 歲兒童在學習數的位值概念時，符號式的教學方式適合高能力學生，而積木呈現的教學方式則適合低能力學生；許舒淳（2013）研究一年級低成就學生在不同虛擬教具教學下的進步情形，結果顯示虛擬積木組的學生進步效果比虛擬錢幣組好。教具、圖片是作為連結抽象概念的表徵，可以幫助學生建立數學符號和意義間的連結（Uttal, O’Doherty, Newland, Hand, & DeLoache, 2009）。由上述研究結果可知，使用不同的教具表徵進行教學，對學生的學習表現有不同的影響。

教師在進行位值概念的教學時，常使用兩類型教具，一是成比例教具，例如古氏積木、櫻桃、糖果；二是不成比例的教具，例如錢幣。然而這兩類教具中又可細分出具有十進位結構者，如古氏積木與錢幣；以及不具十進位結構者，如櫻桃與糖果。傳統上認為具有十進位結構且成比例的古氏積木，較容易透過教具的操作讓學生明白十進位的位值意涵，不成比例的錢幣則對學生來說較為抽象（周筱亭，1987）。而生活中常見的具體實物，雖不具十進位結構且成比例，也被認為是對學生來說較為親切且易於理解的教具。然袁媛、陳國龍和林秀卿（2017）發現低年級學生在以錢幣與雞蛋表徵的位值概念問題上表現最好，反而在以古氏積木呈現的位值問題表現較差，顯然對學生來說以錢幣與雞蛋呈現的位值問題較古氏積木表徵簡單。不過在確認此研究結果前，尚有部分需釐清的地方，例如，該研究所使用的位值概念測驗中，個位、十位題數

不對等、三種問題表徵物呈現順序對結果的影響未加以考量，以及研究設計中的雞蛋表徵存在可能的十進位結構等，所以獲得學生在錢幣與雞蛋表徵問題的表現比古氏積木好的這個結論，可能仍需再做確認。考量上述問題，本研究擬重新編修位值概念測驗、修正研究設計的方法，並以非十單位結構的櫻桃表徵取代雞蛋，以檢視不同表徵物問題對兒童位值概念表現的影響。

二、研究目的與待答問題

根據研究動機，本研究擬發展位值概念的測驗工具，分析學生的作答表現結果，以此評估二年級學生的位值概念層次發展，並探討學生在不同表徵的位值概念問題表現是否有差異。依據此研究目的，本研究提出具體問題有二：

（一）國小二年級學生的位值概念層次發展為何？

（二）國小二年級學生在古氏積木、錢幣與櫻桃表徵物問題的位值概念表現差異為何？

貳、文獻探討

一、位值概念的數學意涵與兒童位值概念的發展

國小數學基礎教育中，數與量的內容佔了很大的比例，代表數概念是國小數學教育的重點。數概念是抽象的，它是由約定俗成的數符號，也就是計數系統（numeration system）來表徵數字的值。計數系統具有四個特性，分別是位置性質、十進性質、乘法性質、加法性質（Ross, 1989）。因此，位值概念既是計數系統的特性，也是記錄及書寫多位數字的規則（Saxton & Cakir, 2006）。

位值，是指多位數字中每個數碼的值，為它的面值（face value）和其所在十進位位值單位的乘積所決定（Miura & Okamoto, 2003; Price, 2001）。例如，「89」中 8 所在位置的單位是十位，因此其位值是 8 和 10 的乘積，即 80。位值概念看似簡單，實則不然，理解位值代表要釐清數詞、計數符號與數表徵之間的關係。在數概念建立的歷程中，學生一開始視所有數字為一整體，之後逐步建構成以 10 為一單位的內在表徵，接著重複此步驟，依序往上建構百位、千位……等多位數概念結構（Fuson, 1990; Rogers, 2012; Thomas, 2004）。除此之外，學生還需要理解十進位系統中，每個數碼的位值單位都是它右邊單位的十倍，此為計數系統中的倍數關係。位值也是連結數概念與數符號之間的概念，數符號表徵數值的方式有數詞及計數符號。數詞，也就是口語表達的數量單位，在中文系統中有個、十、百、千……，當我們說七千時，即可知道數量；而數字的計數符號則會以 7000 來表示，在 7 的後面補上三個零，零在個位、十位、百位的位置中做為佔位符（place holders）。另外，我們也會使用具體物來表徵數值，能夠連結這些表徵數字的符號和其組成結構，即能清楚理解位值概念（Hiebert & Wearne, 1992）。

1970 和 1980 年代，許多探究兒童如何發展數字系統與二位數位值概念的文獻紛紛出爐。Kamii（1986）以皮亞傑的理論來檢視兒童位值概念的發展，皮亞傑認為數概念屬於邏輯數學知識（logico-mathematical knowledge），此知識為兒童在心中建立對概念的理解，非直觀而得。所以兒童之所以有學習位值概念的困難，肇因於反思抽象（reflective abstraction）的能力不同，也就是人們在心中對數學概念所建構的意義各有不同。於是 Kamii 根據此理論對兒童進行研究，他請兒童以十個一數的方式來數塑膠片，結果兒童有四種反應，分別為：層次一，兒童不懂十個一數；層次二，兒童可以十個一數，但無法保留整體數的概念（認為 70 個塑膠片的數量為 7）；層次三，仍以一個一個數的方式來數十；層次四，可以十個一數，並保留對數字整體的概念。Ross（1986）認為數字的部分與全體關係（part-whole relationship）是理解位值的先決條件，他對 60 位國小二到五年級的學生（每個年級 15 位學生）做了一系列測驗，並提出兒童位值概念發展的五個階段：階段一，學生只認識數字的整體；階段二，學生可以分別十位與個位的位置；階段三，學生認為十位的數碼就是數字的值，即為面值；階段四，學生可以區分個位、十位的數值意涵，但卻不穩固；階段五，學生已能區分個位、十位的數值，且能以多樣的方式呈現數值。有鑑於英文和華語數詞表達的差異，對數的兩階結構之表達有不同，例如：英文中「三十五」的十位數詞讀法（thirty）無法直接像華語數詞（三十）能連結十進位結構，這樣文化環境差異下兒童的位值概念發展是否有所不同，值得進一步探討。

目前，以我國低年級兒童位值概念發展為主的研究顯示，學童對十位位值概念的掌握尚不穩固。羅素貞（2005）以高屏地區國小一到三年級學生為研究對象，發現二年級學生對於指認「個位」數值已十分熟悉，但只有 60%的學生成功指認「十位」數值。袁媛等人（2017）以自編的位值測驗，檢測桃園市國小一、二年級學生之二位數位值概念發展，其中只有 50%的二年級學生已達理解個位、十位的階段。由於低年級為建立基礎數概念的關鍵期，課程內容也多著墨於位值概念的建立，但學生十位位值概念的建立並不理想。

二、表徵物與數學學習表現的關係

表徵為人們溝通數學概念的橋樑，教師為了讓學生學習以抽象符號運思數學概念，會使用不同的表徵進行教學，如具體物、符號、圖畫、表格……等。過去許多研究也顯示，表徵的運用及教學使用可能影響學生的學習。例如：黃一泓和謝進泰（2016）研究發現在透過基準量及比較量關係進行解題時，學生在成比例線段圖的解題表現會優於長度線段圖（圖 1）；Schiffman 與 Laski（2018）研究 29 位 6 歲左右的幼稚園學生，分別以不規則排列表徵與線性排列表徵教導學生數量關係（圖 2），結果顯示使用線性排列表徵學習的學生在加法問題的解題正確率提高。因此，表徵物的使用及教學是會影響學生的學習及表現的。

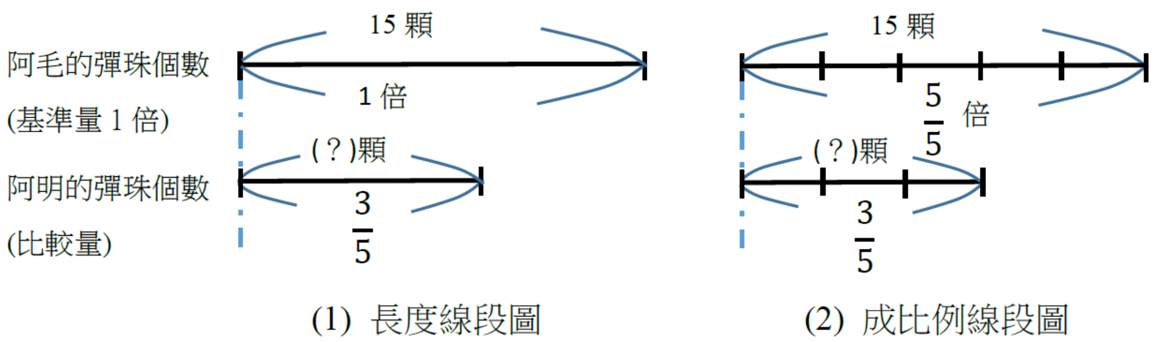


圖 1　長度線段圖與成比例線段圖呈現問題的方式

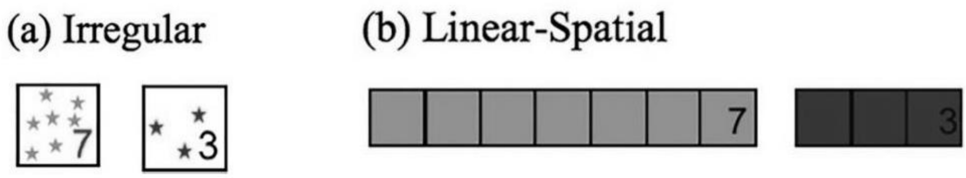


圖 2　兩種不同的表徵(a)不規則排列的表徵(b)線性排列的表徵。引自”Materials count: Linear-spatial materials improve young children's addition strategies and accuracy, irregular arrays don't,” by J. Schiffman and E. V. Laski, 2018, *Plos One*, *13*(12), p.4.

根據目前課程綱要及學校數學教材的內容安排，國小低年級學生需理解位值結構與單位換算。教師以及教科書在引導低年級學生數數，以及學習一百以內數的位值概念時，常使用冰棒棍、豆子、古氏積木與錢幣等表徵物做教學。根據這些表徵物的性質，我們可將其分為成比例與不成比例的表徵兩類。這些表徵物對於兒童學習位值概念都十分重要，若兒童能以豐富且抽象的方式理解數概念，代表能整合不同表徵之間的關係，從而彈性的解決問題。成比例的表徵物即為數量和表徵的大小有比例關係，舉櫻桃為例，10 顆櫻桃組成的大小是 1 顆櫻桃的十倍，所以屬於成比例的表徵物。而不成比例的表徵物則沒有按比例來分數量大小，如錢幣，十元錢幣和一元錢幣的大小之間沒有 10 倍差距。在九年一貫課程能力指標中（教育部，2009），低年級數學有強調錢幣的換算，代表不成比例教具在位值理解上的重要性。不只如此，錢幣也是生活中常見的物品，相關研究指出，使用生活情境的問題或具體物能幫助學生解決數學問題、理解數學概念（Baranes, Perry, & Stigler, 1989; Carraher, Carraher, & Schliemann, 1985）。

在學校中，古氏積木中的「一和十」是最常使用作為位值概念教學的成比例教具，它含有十進位結構，白色正方體小積木代表「一」、長條橘色棒子可以看到劃分成十等分的線條，代表「十」。透過古氏積木所呈現的位值概念，可以讓兒童明白數系統，古氏積木成比例的特性也能讓兒童明白數系統中的十進位性質（Chan et al., 2017; Hiebert & Carpenter, 1992）。然而，已具備

高層次抽象概念的教師，可以同時明白長條橘色棒子表徵「1 個十」也是「10 個一」，但兒童還沒建立這樣的概念以前，無法同時並存這兩種想法（Baroody, 1989; Kamii & Housman, 2000）。若教師在教學時，沒有仔細引導兒童建立此概念，可能會讓兒童處在面值（face value）階段，即以數字表面的值來理解數字。然而只要運用得當，古氏積木可以是強而有力的支持性表徵，引導學生思考數符號結構間的關聯，從而建立堅實的表徵系統（Fuson & Briars,1990）。

袁媛等人（2017）以低年級學生為對象，使用 Ross（1986）所區分的三種數字排列方式設計位值概念測驗，並分別以古氏積木、錢幣與雞蛋三種表徵物呈現問題，分析一、二年級學生的位值發展現況並予以分類，並比較學生在此三種表徵物問題下的表現差異。其結果發現，大部分的一年級學生尚不理解位值的意涵，而二年級學生只有一半左右具備二位數位值概念。學生在三種表徵物問題的表現中，錢幣與雞蛋問題沒有差別，但學生在古氏積木問題的表現是最差的。此研究結果與傳統認知上的並不相同，一般認為古氏積木的問題對學生來說會感到較容易，因為它具有十進位結構，而且是成比例的表徵物。而學生會在錢幣的位值問題上感到較困難，是因為錢幣並非成比例的表徵物。由於過去少有這方面的研究，而且此研究設計還有須要改進的地方，例如，測驗題本沒有經過對抗平衡設計，固定的表徵物問題順序讓學生可能因練習效應影響表現。其次，該研究所使用的位值概念測驗裡，個位題目只有 9 題，十位題目卻占了 18 題，整整多了一倍，位值題型所占的比重不同，是否會影響學生在不同表徵物問題下的表現，此有待商榷。此外，該研究測驗中所選擇的雞蛋表徵，因以十為單位呈現仍具有十進位結構，所以該研究實際尚未探討到非十單位結構的成比例表徵問題對學生概念表現的影響。

基此，本研究擬修正該研究設計上的不足，以驗證不同表徵物問題對學生位值發展的影響。首先，本研究將測驗工具修正成個位與十位題目各佔一半，以避免位值題目數影響表現。第二，將測驗以對抗平衡的方式設計，避免所有學生皆先測古氏積木問題，造成表現失準。第三，研究對象以二年級學生為主，是因二年級在個位與十位位值學習的時間較長，且作答較穩定，不易有漏答的情形，造成樣本數的缺失。本研究以櫻桃表徵和古氏積木與錢幣表徵物做比較，主要是想藉由研究設計的修正，探究非十單位結構表徵物問題對學生位值表現的影響。先前袁媛等人（2017）的研究結果顯示，學生在雞蛋問題的表現優於古氏積木問題，可能是因雞蛋在生活中會以十為單位結構做包裝，此特性就如內建的十進位結構，讓學生在作答時感到較容易。若將非十單位結構的櫻桃加入問題，與古氏積木、錢幣問題作對照，可以拓展不同表徵物問題影響學生位值概念表現的研究。

參、研究方法

一、研究對象

本研究主要係修正袁媛等人（2017）先前的研究設計，再次檢驗國小二年級學生的位值概念，考量接受施測者的配合度及與先前研究對象的地區相似度，本研究以方便取樣方式選擇 481 位二年級學生作為研究對象。抽樣的學生來自四所國小，其中三所桃園市八德區的國小，各抽 4 個班級，合計共 311 位學生。另外一所為新北市三峽區的國小，抽樣 7 個班級，共 170 位學生。新北市三峽區的國小鄰近桃園市八德區，四所皆為市郊小學，住商混合，班級人數在 25～29 人之間。

二、研究工具

為收集學生的位值概念表現，本研究編修位值概念測驗工具，以下針對位值概念測驗之編製內容及計分方式進行說明。

（一）位值概念測驗

本研究所編製的「位值概念測驗」修正自袁媛等人（2017）的位值概念測驗，在原來的 27 題測驗中，再增加 9 題個位題目，讓個位與十位題目都占 18 題，以平衡測驗的題型。測驗經修訂後請專家審核並進行預試，最後測驗題目共 36 題，其中 12 題為「古氏積木」、12 題為「錢幣」、12 題為「櫻桃」。本研究的位值概念測驗內容架構表，見表 1。每種表徵物測驗都有 6 題個位題目與 6 題十位題目，個位題目的數字表徵形式皆為「一個一個數」，而十位題目的數字表徵形式是根據 Ross（1986）的分類，分為「一個一個數」、「例行性十進位」和「非例行性十進位」。

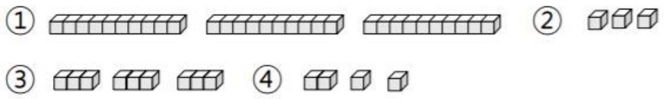
表 1
位值概念測驗內容架構表

表徵類型	位值	表徵物	題號	題數
一個一個數	個位	古氏積木	1, 3, 5, 7, 9, 11	18
(one-to-one collection)		錢幣	13, 16, 19, 21, 23, 24	
		櫻桃	25, 28, 30, 31, 33, 35	
一個一個數	十位	古氏積木	4, 8	18
(one-to-one collection)		錢幣	17, 20	
		櫻桃	27, 32	
例行性十進位		古氏積木	2, 12	
(canonical base 10)		錢幣	14, 18	
		櫻桃	26, 34	
非例行性十進位		古氏積木	6, 10	
(noncanonical base 10)		錢幣	15, 22	
		櫻桃	29, 36	

為建立測驗工具的專家效度，本研究另邀請二位任職於國小的低年級教師針對位值概念測驗內容進行檢核，主要針對各問題是否符合表 1 的內容架構進行確認及各問題選項的設計進行修正，例如：將非 1 個的各群數降低至 5 個以下，以避免因數數而造成的解題困難。以下就「古氏積木」、「錢幣」、「櫻桃」三種表徵物，說明十位題目的三種題型。

1. 古氏積木表徵物題目（測驗第 1 題）

(　　)1. 下面哪一個選項，可以代表 53 個積木中的 3？

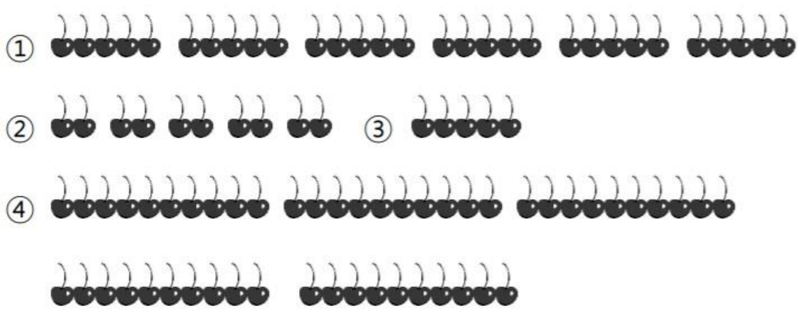


2. 錢幣表徵物題目（測驗第 13 題）

(　　)13. 下面哪一個選項，可以代表 87 元中的 7？

3. 櫻桃表徵物題目（測驗第 25 題）

(　　)25. 下面哪一個選項，可以代表 15 顆櫻桃中的 5？



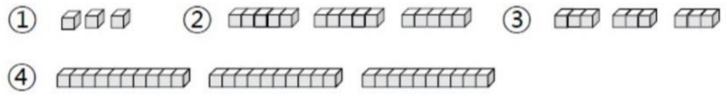
以下以「古氏積木表徵」來舉例十位題目中數字的三種呈現方式（錢幣與櫻桃表徵的呈現方式雷同）：

1. 一個一個數：如第 4 題的第 4 個選項所示，20 個積木是一個一個排列。

(　　)4. 下面哪一個選項，可以代表 26 個積木中的 2？

2. 例行性十進位表徵：如第 2 題的第 4 個選項所示，30 個積木是以 10 個積木為一條，共 3 條積木來排列的，以此稱為例行性十進位表徵，因其呈現方式和十進位位值相同。

(　　)2. 下面哪一個選項，可以代表 39 個積木中的 3？



3. 非例行性十進位表徵：如第 6 題的第 2 個選項所示，10 個積木是以兩條 5 個積木來排列，此排列方式迥異於十進位呈現方式，故稱為非例行性十進位表徵。

(　　)6. 下面哪一個選項，可以代表 13 個積木中的 1？

（二）計分方式及發展層次判定

位值概念測驗共 36 題，答對一題一分，滿分為 36 分。根據兒童在二位數位值概念的發展，兒童是先發展個位位值，再發展十位位值，因此本研究依據先前文獻（袁媛等人，2017），也將學生在個位及十位問題的表現分為三個層次。未通過 15 題以上個位與十位問題的學生，屬於層次一「渾沌期」：兒童不理解數字中個別數碼的實質意義；通過 15 題以上個位題，卻沒有達到十位問題標準的學生，屬於層次二「建構期」：兒童已理解個位數值的意涵，但尚不清楚十位與個位數值的差別；皆通過 15 題以上個位與十位問題的學生，屬於層次三「理解期」：兒童已建構二位數概念結構，清楚明瞭個位與十位在二位數字中的意義。

（三）位值概念測驗的預試與修正

本測驗於 2019 年 1 月以桃園市中壢區三個二年級班級共 86 位學生進行預試，回收有效樣本數為 72 位，並以內部一致性係數（Cronbach Alpha）進行信度分析。「古氏積木」題目信度值為 .86；「錢幣」題目信度值為 .87；「櫻桃」題目信度值為 .87。而在「個位」題目的信度值為 .93；「十位」題目的信度值為 .97。整份測驗的信度係數值達 .95。吳明隆（2013）指出研究工具的內部一致性估計值須達 .80 以上，才普遍被接受，因此本測驗工具預試結果的信度值佳。

由於測驗問題內容相似，但只在表徵物上的不同，因此本研究在施測時，將測驗的編排以對抗平衡方式呈現，即將「古氏積木」、「錢幣」與「櫻桃」題型做成三種順序的測驗卷，並將不同順序的測驗題本以不同顏色區分，平均發給施測學生，以避免問題呈現的先後順序出現練習效應而影響表現。

1. A 卷順序（黃卷）：「古氏積木」—「錢幣」—「櫻桃」
2. B 卷順序（藍卷）：「錢幣」—「櫻桃」—「古氏積木」
3. C 卷順序（粉卷）：「櫻桃」—「古氏積木」—「錢幣」

三、施測程序

本研究於 2019 年 4 月底到 5 月初之間進行正式施測，施測前研究者與班級導師說明測驗實施方式，並由該班導師協助施測，所有接受測驗的學生均在取得測驗卷後兩個星期內完成。測驗實施時，導師依班級座位排數，一排發一種考卷（A 卷、B 卷或 C 卷），若有餘剩的學生，則用抽籤來決定何種考卷。學生作答前，老師先說明測驗指導語：「各位小朋友，在這份測驗中的每一個問題中都會有一個數字，你需要把題目中要你選出的答案填在（　）中，例如：12 這個數字中的 1（老師指著數字並圈起來）代表多少？請你把正確的答案寫在（　）中。有沒有問題？」在確認學生了解意思後，接著讓學生開始作答，大部分學生均能在 20 分鐘內做完，若未做完仍給了學生充分時間做答，因此受測學生均有充足的時間做答。

四、資料蒐集與分析

在聯繫學校同意後，共計有四所國小 19 個二年級班級中的 481 位學生接受測驗，經扣除特殊學生及有漏答的廢卷後，共計回收有效樣本數為 431 份，其中 A 卷有 147 份、B 卷有 145 份、C 卷有 139 份。研究者回收位值概念測驗後，將學生的答案鍵入 Excel 檔案中，並以資料轉換的方式算出學生的得分，先以描述性統計呈現學生在各試題的答題表現，據以判定學生的二位數位值概念發展層次。再依學生在三種不同表徵物問題的得分表現進行相依樣本變異數分析，以考驗學生在三種問題表徵物問題的表現是否有顯著的差異。

肆、研究結果與討論

一、二年級學生的位值概念發展

本節以描述性統計說明二年級學生在位值概念測驗的作答結果與位值概念發展狀況。

（一）二年級學生的測驗結果

接受施測的學生共計481位，去除特殊學生及有漏答的廢卷後，共計有效樣本數為431位，學生在36題測驗的答對率，見表2。從表2可知，學生在個位題目的答對率範圍是88.6%至96.1%，平均答對率為92.8%；十位題目的答對率範圍是65.7%至80.5%，平均答對率為70.0%。從學生在個位問題及十位問題的各題答對率可看出，每一個個位問題的答對率均高於十位問題，顯見個位問題對學生而言比十位問題簡單。

表 2
二年級學生在位值概念測驗上的答對率

個位問題	**古氏積木**						
	題號	1	3	5	7	9	11
	答對率	93.3%	92.6%	91.2%	93.7%	92.8%	88.6%
	錢幣						
	題號	13	16	19	21	23	24
	答對率	91.9%	91.9%	90.0%	96.1%	91.9%	94.4%
	櫻桃						
	題號	25	28	30	31	33	35
	答對率	90.5%	93.7%	94.4%	94.4%	95.8%	92.8%
十位問題	**古氏積木**						
	題號	4	8	2	12	6	10
	答對率	69.4%	66.6%	71.7%	71.2%	68.4%	69.1%
	錢幣						
	題號	17	20	14	18	15	22
	答對率	71.2%	71.9%	77.7%	80.5%	71.2%	68.0%
	櫻桃						
	題號	27	32	26	34	29	36
	答對率	67.7%	66.6%	66.1%	65.7%	68.9%	68.2%

（二）二年級學生的位值概念發展層次

為了解目前國小二年級學生在個位、十位位值概念的發展情形，本研究依據學生在位值概念測驗試題的表現情形做位值概念層次的分類。位值概念測驗共分兩類題目：18題個位問題及18題十位問題。首先，研究者以題目數的五分之四（80%）為通過標準（Usiskin, 1982），分別探討二年級學生在個位與十位問題上的發展情形，並將學生分為三個發展層次。未通過15題以上個位與十位問題的學生，屬於層次一「渾沌期」；通過15題以上個位題，卻沒有達到十位問題標準的學生，屬於層次二「建構期」；皆通過15題以上個位與十位問題的學生，屬於層次三「理解期」。從這個層次分類的標準中，可以知道達到層次三的學生只能在十位問題中錯3題以內，因此這些學生在十位題目的三種表徵形式（一個一個數、例行性十進位和非例行性十進位）已能掌握及了解。

在分析樣本資料的過程中，發現其中有四位學生通過十位位值題目的標準，卻沒通過個位位值題目的標準。詳細查看這四位學生的作答狀況，發現其中一位答對全部的積木問題與錢幣問題，唯獨答錯櫻桃問題中的個位題目，另一位答錯位值概念測驗中所有的個位題目。剩下的兩位學生分別答錯了五題與八題個位位值題目，檢查這兩位學生的選擇的答案皆是以群集作為單位數量，無法分清楚位值意涵。舉例來說，學生認為36中的6代表6條以5為單位的積木所組成。

就如同Kamii（1986）所說的，無法分割10與1個概念。也處在Ross（1989）提出的「建構期」中，面對「十」與「一」的概念還是暫時性的，容易因外在物的不同而混淆觀念。綜觀這四位學生的作答情形，發現學生雖然只答錯2題十位位值題目，卻在個位位值題目上出現混淆的情形。因此，研究者將這四位學生歸類為層次一，尚不理解個位與十位位值。431位二年級學生中，屬於層次三「理解期」的學生有274位，占63.6%；層次二「建構期」的學生數為106位，占24.6%；層次一「渾沌期」的學生數有51位，占11.8%。二年級學生位值概念的層次百分比，見表3。

表 3
二年級學生位值概念發展層次之次數與百分比

層次	次數	百分比	累計百分比
層次一 渾沌期	51	11.8%	11.8%
層次二 建構期	106	24.6%	36.4%
層次三 理解期	274	63.6%	100.0%

Ross（1989）發現二年級學生答對6題數字對應測驗題目的人數為0，沒有答對任何一題的人數為8人（總人數15人），占53.33%。與本研究相比，我國二年級學生的位值概念發展比該研究的學生（美國加州）好。這有可能如Miura與Okamoto（1989）所述，亞洲語系兒童因數字語言與十進位結構相仿，所以學生在學習位值時較能得心應手。袁媛等人（2017）發現二年級學生約半數達到層次三，本研究一開始也是以答對題目的80%作為通過標準，而二年級學生達到層次三的有63.6%，略高於袁媛等人的研究結果。由於後者的研究對象有較多的新住民與原住民學生（約十分之一），而本研究對象雖為同地區學校之學生，然新住民學生身份比例較少（每班1～2人），因此可能造成表現上的差異。另一方面，兩個研究的施測時間點也有不同，袁媛等人的研究收集資料在4月初，而本研究在4月底至5月初，因二年級學生在課程安排上也正加強學習數的位值概念建立，一個月左右的時間差也可能造成兩次測驗結果略有不同。

二、二年級學生在三種表徵物問題上的表現差異

（一）學生在三種表徵物問題上的表現差異

二年級學生在三種表徵物問題表現上的描述性統計與變異數分析摘要表，詳見表4。學生在古氏積木問題的平均得分為9.69（標準差$SD = 3.05$）；錢幣問題的平均得分為9.97（$SD = 2.83$）；櫻桃問題的平均得分為9.65（$SD = 2.88$）。為了進一步了解三種表徵物問題的差異情形，以重複量數變異數分析檢定三種表徵物問題平均分數上的差異顯著性，結果$F(2, 860) = 11.53$，$p < .001$，$\eta^2 = .03$，代表三種表徵物問題的平均數之間有顯著差異存在。以Scheffe法進行事後比較，發現國小二年級學生在古氏積木問題的平均得分與櫻桃問題無顯著差異，而兩者得分均顯著低於錢幣問題。

表 4
三種表徵物問題之變異數分析摘要表

測驗項目	平均數（*M*）	標準差（*SD*）	*F*值	事後比較
1.古氏積木問題	9.69	3.05		
2.錢幣問題	9.97	2.83	11.53***	2 > 1 = 3
3.櫻桃問題	9.65	2.88		

*** $p < .001$

袁媛等人（2017）發現低年級學生在錢幣問題的表現比古氏積木問題佳，原本研究者認為可能是因題本設計的順序影響學生的作答表現，然而經過修改測驗表徵物問題的呈現順序並隨機配發試卷後，仍然發現學生在錢幣問題上的表現比古氏積木佳，代表錢幣問題較簡單。錢幣屬於生活上常見的物品，學生可能有相關的經驗，所以會在問題情境中有較佳的表現（Baranes et al., 1989; Carraher et al., 1985），而古氏積木並非生活上常見的物品，且Cobb（1987）認為這些教具並不會自動傳遞數學概念，所以學生將此表徵內化的過程可能需要花較長的時間。本研究將袁媛等人所使用的雞蛋表徵改成櫻桃表徵後，結果發現其表現比錢幣問題差，然雞蛋問題在袁媛等人的研究中是和錢幣問題沒有差別的，推測會有這樣的差異結果，可能因為雞蛋是生活中的常見實物，且在該研究中試題的呈現具有十單位結構所致。

（二）十位題目中三種表徵物問題之表現差異

依據位值概念測驗內容架構表，本研究進一步將測驗問題分為個位題目與十位題目來分析。學生在三種表徵物問題的個位題目上並無統計考驗之差異。然在十位題目中，三種表徵物問題之統計考驗則有差異，其描述性統計與變異數分析摘要表，詳見表5。學生在古氏積木問題的平均得分為4.16（$SD = 2.46$）；錢幣問題的平均得分為4.41（$SD = 2.28$）；櫻桃問題的平均得分為4.03（$SD = 2.42$）。以重複量數變異數分析，考驗三種表徵物問題平均數的差異顯著性，結果$F(2, 860) = 21.55$，$p < .001$，$\eta^2 = .05$，顯示在十位題目中三種表徵物問題的平均數之間有顯著差異存在。隨後以Scheffe法進行事後比較，發現國小二年級學生在位值概念測驗中的十位題目中，錢幣問題表現最佳，其次為古氏積木問題，櫻桃問題表現最差。

表 5
十位題目之三種表徵物問題之變異數分析摘要表

測驗項目（十位）	平均數（*M*）	標準差（*SD*）	*F*值	事後比較
1.古氏積木問題	4.16	2.46		
2.錢幣問題	4.41	2.28	21.55***	2 > 1 > 3
3.櫻桃問題	4.03	2.42		

*** $p < .001$

本研究進一步探討學生在何種問題上受到表徵物影響，結果在例行性十進位題目中出現錢幣問題優於古氏積木，且古氏積木問題優於櫻桃問題的現象，$F(2, 860) = 47.78$，$p < .001$，$\eta^2 = .10$。學生在十位題中的一個一個數題目上，則是錢幣問題表現最優異，古氏積木與櫻桃問題沒有表現上的差異，$F(2, 860) = 6.12$，$p = .002$，$\eta^2 = .01$。而學生在十位問題中的非例行性題目上，則是三種表徵物均沒有出現差異。另外，學生在例行性十進位的題目表現上比一個一個數以及非例行性十進位的題目好，然而一個一個數與非例行性十進位題目兩者之間沒有差異，$F(2, 860) = 13.67$，$p < .001$，$\eta^2 = .03$。

林晉如（2006）曾以一年級學生為對象，請學生觀察以例行性排列的糖果、古氏積木與錢幣，並回答數量是多少、有幾個十、幾個一。結果學生在錢幣上的正確率最高，古氏積木次之，糖果最差。林晉如認為是因錢幣有明顯的「十」可供觀察，所以學生在回答有幾個十的時候，較容易反應。本研究結果顯示二年級學生在例行性十進位與一個一個數的錢幣問題上表現最好，有可能是當學生具有十位位值的概念時，例行性排列的錢幣問題會以清楚可辨識的1個十呈現在學生眼前，學生內心不再需要將10個一湊成1個十來回答問題，直觀便能正確反應。而一個一個數的錢幣問題，則是1元硬幣的組合，學生在此問題形式上有好表現，可能是因生活上常有數錢的經驗所致。學生在例行性十進位的古氏積木問題表現比櫻桃問題優異，然而在一個一個數以及非例行性十進位的題目上，兩種表徵並沒有出現任何差異。因課本及學校教學的學具使用，學生多很熟悉例行性排列的古氏積木形式，而且也可以藉由此種排列的方式選擇正確的位值。但是沒有十單位結構的櫻桃，就算排列方式是例行性的，學生仍感到較困難。低年級學生在例行性十進位的題目中表現比非例行性以及一個一個數的題目佳，表示學生習慣例行性的數字排列方式。

本研究發現學生在三種表徵的例行性十進問題表現有差異，但非例行性表現差異未顯著。可能因為題目設計中知覺干擾的因素，例如非例行性的積木表徵中，「十」並不是以一個「十」的積木加以表徵，而是由二個「五」表徵之，其中包含了知覺線索上的干擾，增加了學生的認知負荷；而錢幣以非例行性十進位方式排列時，學生的表現也沒有和其他兩種表徵有差異，這顯示非例行性的問題仍是學生不熟的數表現方式。

伍、結論與建議

一、結論

（一）六成以上的國小二年級學生已能掌握十位數字的意義，並能正確選出代表其數值的不同表徵形式

本研究的研究對象在接受測驗之時，已學習到百位位值，本研究在分類層次是以通過 80%的題目數為標準，其中有 63.6%的學生已經達到層次三「理解期」，這些學生只能在十位問題中

錯 3 個問題以內，在十位問題的三種表徵形式（一個一個數、例行性十進位和非例行性十進位）多能掌握，顯見其位值概念清楚穩固。

（二）二年級學生在錢幣表徵物問題上有最佳的表現

在三種表徵物問題中，本研究發現二年級學生較能掌握不成比例的錢幣表徵，所以答題正確率都比古氏積木與櫻桃問題好，而在古氏積木及櫻桃表徵問題上則未有表現上的差異。若進一步以個位及十位問題分析，則學生在三種表徵的個位問題上並無差異，但十位問題則出現錢幣問題表現最佳，其次是古氏積木問題，最差則為櫻桃問題，顯示二年級學生在錢幣表徵的位值問題上有最佳的表現。

（三）學生在例行性十進位櫻桃表徵物問題表現較差

針對十位題目所設計的三種表徵物類型（一個一個數、例行性的十進位及非例行性十進位）問題，研究結果顯示在非例行性十進位問題上，學生在三種表徵物問題上並未出現差異；在一個一個數的問題，則是錢幣表徵最好，古氏積木及櫻桃表徵問題並未出現表現差異；在例行性的十進位問題，則出現錢幣問題表現最佳，其次是古氏積木問題，最差則為櫻桃問題。在 18 個十位題目中，2 個例行性櫻桃問題（26 題及 34 題）的難度也是所有題目中最難的，顯示例行性十進位櫻桃表徵是學生最感困難的問題。

（四）學生在非例行性十進位及一個一個數的十位問題表現不如例行性十進位問題

學生較容易回答以例行性十進位排列的問題，然而非例行性十進位以及一個一個數的問題形式對學生來說較困難。一個一個數的排列方式與非例行性十進位排列方式相似，都不是以十單位為基準排列，若受到練習影響或仍停留在面值階段的學生，就容易出現這個現象（Ross, 1986），顯示學生不習慣以非例行性十進位及一個一個數的方式表現一個數。

二、建議

（一）位值概念教學需善用及考量表徵物的特性引導學生學習，並強調數值的意涵

本研究發現學生能藉由錢幣的特性順利回答十位的位值問題，而且表現比古氏積木佳。可能由於十元錢幣是已經將 10 個一換成 1 個十的單位，所以學生不需自行合成十的結構，直接觀察外顯的十元硬幣即可得知十位位值，而且錢幣也有生活化的優勢。然而對剛學習十位位值的學生來說，需要先建立 10 個一是 1 個十的概念，但因錢幣是不成比例的表徵物，學生較難以錢幣理解此數概念，所以還需古氏積木作為搭配。教師可透過古氏積木蘊藏十進位結構的特性，引導學生理解十位的合成過程，並讓學生將經驗內化後，再以錢幣加強 10 為新單位的概念。

而本研究也發現，學生在櫻桃問題上的表現較差，顯然沒有十單位結構的櫻桃對學生來說較難以和位值做連結。但位值概念穩固的學生，是能順利回答不管是以古氏積木、錢幣或是櫻

桃來呈現的位值問題。所以，教師在教學時，應著重在引導學生發現數值的意涵，並透過多元表徵強化此抽象概念，讓學生將位值概念轉化為內在表徵，並能靈活的運用。

（二）教師在做位值教學時可補強非例行性的表徵物排列方式

學生在例行性十進位的題目中有最佳的表現，可是卻不熟悉非例行性的表徵物排列。Price（2001）指出能以非例行性方式排列數字的學生，其位值概念是良好的。但學校教學所使用的古氏積木或實物教具，通常為了教學生數字的十進位系統，會強調例行性排列的表徵，練習題也多以此種型式出現，例如：問 78 有幾個十，幾個一。教科書和教師會傾向強調學生要以例行性十進位方式呈現，如：7 個十，8 個一，這會無意間讓學生產生迷思，以為數字只有例行性的表示方式。另外，在一年級數學教材中有「分與合單元」，它是介紹加減法的前置經驗。但它隱含的概念是數字有多元的組合和分解方式，可惜教材中較強調 10 以內的分與合。所以學生在之後學到加減法進退位問題等需要以非例行性位值概念思考數字時，就會流於機械式運算。只知操作卻不知其運算模式是因數字的組合方式多元。所以建議教科書編輯者在編審時，可設計將「分與合單元」與「位值」教學做融合，讓位值教學不再只強調例行性的表示方式，也讓學生在學習以分與合為基礎的加減法進退位單元時，能融會貫通數字的多元呈現方式。除此之外，教師在以多元表徵，如古氏積木、錢幣、花片……等呈現數字時，應注意不要只是強調例行性的表示方式，也應讓學生理解非例行性的表示方式亦是正確的，避免讓學生產生迷思概念。

（三）未來可進一步探究學生在錢幣表徵物表現較佳的可能原因

本研究以櫻桃、古氏積木及錢幣分別代表成比例不具十進結構、成比例具十進結構、以及不成比例具十進結構的表徵來探討學生的位值概念，結果發現學生在錢幣表徵的位值問題上有最佳的表現。但學生為何在錢幣表徵的位值問題上表現較好，是否因為學生有使用錢幣的生活經驗，或是錢幣的面值表徵清楚（幣面上有 10），或是有其它的可能原因，本研究設計並無法解釋此原因，此為本研究的限制，未來可以進一步地探究。

誌謝

本研究感謝科技部計畫（MOST 107-2511-H-007-002）經費支助，也同時感謝四所同意參與研究計畫的老師及學生。

參考文獻

吳明隆（2013）。**SPSS 統計應用學習實務：問卷分析與應用統計**。新北市：易習圖書。
【Wu, Ming-Long (2013). SPSS statistics applied learning practice: questionnaire analysis and applied statistics. New Taipei City: Yi-xi. (in Chinese)】

周筱亭（1987）。位值的重要性。**研習資訊，36**，9-16。
【Zhou, Xiao-Ting (1987). Importance of place value. *Study Information, 36*, 9-16. (in Chinese)】

林晉如（2006）。**屏東地區國小一年級學生位值概念之研究**。未出版之碩士論文，國立屏東教育大學數理教育研究所，屏東縣。
【Lin, Jin-Ru (2006). First graders' place value concept in Pingtung County (Unpublished master's thesis). National Pingtung University of Education, Pingtung. (in Chinese)】

袁媛、陳國龍、林秀卿（2017）。國小低年級學生在不同表徵物問題的位值概念研究。**課程與教學季刊，20**(3)，113-138。doi: 10.6384/CIQ.201707_20(3).0005
【Yuan, Yuan, Chen, Kuo-Long, & Lin, Hsiu-Ching (2017). A study of first and second graders' concept of place value in problems of different representation objects. *Curriculum & Instruction Quarterly, 20*(3), 113-138. doi: 10.6384/CIQ.201707_20(3).0005 (in Chinese)】

教育部（2009）。**國民中小學九年一貫課程綱要-數學學習領域綱要修訂**。取自 https://cirn.moe.edu.tw/WebContent/index.aspx?sid=9&mid=248
【Ministry of Education (2009). The nine-year curriculum standards for primary and secondary schools-revision of the mathematics content area. Retrieved from https://cirn.moe.edu.tw/WebContent/index.aspx?sid=9&mid=248 (in Chinese)】

教育部（2018）。**十二年國民基本教育課程綱要國民中小學暨普通型高級中等學校數學領域**。取自 https://www.naer.edu.tw/ezfiles/0/1000/img/114/144789974.pdf
【Ministry of Education (2018). Twelve-year Basic Education course standards for elementary, secondary and high school (mathematics content area). Retrieved from https://www.naer.edu.tw/ezfiles/0/1000/img/114/144789974.pdf (in Chinese)】

許舒淳（2013）。**不同虛擬教具教學對提升國小低成就學童位值概念之成效研究**。未出版之碩士論文，國立新竹教育大學特殊教育學系碩士班，新竹市。
【Xu, Shu-Chun (2013). Research of different virtual manipulatives teaching to improving low achievement first grade's concept of place value (Unpublished master's thesis). National Tsing Hua University, Hsinchu. (in Chinese)】

黃一泓、謝進泰（2016）。兩種線段圖表徵解題策略在學習成效上的比較。**教育心理學報，47**(4)，581-601。doi: 10.6251/BEP.20150603
【Huang, Yi-Hung, & Shie, Jin-Tai (2016). The comparison of two mathematics problem-solving strategies of line-diagram representations on learning achievements. *Bulletin of Educational Psychology, 47*(4), 581-601. doi: 10.6251/BEP.20150603 (in Chinese)】

羅素貞（2005）。**國小學童位值概念與多位數加減問題解題表現之研究**（NSC-94-2413-153-010）。臺北市：行政院國家科學委員會。
【Luo, Su-Zhen (2005). A study of elementary school children's place value concept and the performance of solving problems of multi-digit addition (NSC-94-2413-153-010). Taipei: Ministry of Science and Technology (in Chinese)】

Baranes, R., Perry, M., & Stigler, J. W. (1989). Activation of real-world knowledge in the solution of word problems. *Cognition and Instruction, 6*(4), 287-318. doi: 10.1207/s1532690xci0604_1

Baroody, A. J. (1989). Manipulatives don't come with guarantees. *The Arithmetic Teacher, 37*(2), 4-5. doi: 10.5951/AT.37.2.0004

Carraher, T. N., Carraher, D. W., & Schliemann, A. D. (1985). Mathematics in the streets and in schools. *British Journal of Developmental Psychology, 3*(1), 21-29. doi: 10.1111/j.2044-835X.1985.tb00951.x

Chan, B. M. Y., & Ho, C. S. H. (2010). The cognitive profile of Chinese children with mathematics difficulties. *Journal of Experimental Child Psychology, 107*(3), 260-279. doi: 10.1016/j.jecp.2010.04.016

Chan, W. W. L., Au, T. K., & Tang, J. (2014). Strategic counting: A novel assessment of place-value understanding. *Learning & Instruction, 29*, 78-94. doi: 10.1016/j.learninstruc.2013.09.001

Chan, W. W. L., Au, T. K., Lau, N. T. T., & Tang, J. (2017). Counting errors as a window onto children's place-value concept. *Contemporary Educational Psychology, 51*, 123-130. doi: 10.1016/j.cedpsych.2017.07.001

Cobb, P. (1987, April). *Children's Initial Understandings of Ten*. Paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association, Anaheim, CA.

Dietrich, J. F., Huber, S., Dackermann, T., Moeller, K., & Fischer, U. (2016). Place-value understanding in number line estimation predicts future arithmetic performance. *British Journal of Developmental Psychology, 34*(4), 502-517. doi: 10.1111/bjdp.12146

Fraivillig, J. L. (2018). Enhancing established counting routines to promote place-value understanding: An empirical study in early elementary classrooms. *Early Childhood Education Journal, 46*(1), 21-30. doi: 10.1007/s10643-016-0835-5

Fuson, K. C. (1990). Issues in place-value and multidigit addition and subtraction learning and teaching. *Journal for Research in Mathematics Education, 21*(4), 273-280. doi: 10.2307/749525

Fuson, K. C., & Briars, D. J. (1990). Using a base-ten blocks learning/teaching approach for first- and second-grade place-value and multidigit addition and subtraction. *Journal for Research in Mathematics Education, 21*(3), 180-206. doi: 10.2307/749373

Hiebert, J., & Carpenter, T. P. (1992). Learning and teaching with understanding. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 65-98). New York: Macmillan.

Hiebert, J., & Wearne, D. (1992). Links between teaching and learning place value with understanding in first grade. *Journal for Research in Mathematics Education, 23*(2), 98-122. doi: 10.2307/749496

Ho, C. S. H., & Cheng, F. S. F. (1997). Training in place-value concepts improves children's addition skills. *Contemporary Educational Psychology, 22*(4), 495-506. doi: 10.1006/ceps.1997.0947

Kamii, C. & Housman, L. B. (Eds.) (2000). *Young children reinvent arithmetic: Implications of Piaget's theory.* New York: Teachers College Press.

Kamii, C. (1986). Place value: an explanation of its difficulty and educational implications for the primary grades. *Journal of Research in Childhood Education, 1*(2), 75-86. doi: 10.1080/02568548609594909

Laski, E. V., Ermakova, A., & Vasilyeva, M. (2014). Early use of decomposition for addition and its relation to base-10 knowledge. *Journal of Applied Developmental Psychology, 35*(5), 444-454. doi: 10.1016/j.appdev.2014.07.002

Laski, E. V., Schiffman, J., Shen, C., & Vasilyeva, M. (2016). Kindergartners' base-10 knowledge predicts arithmetic accuracy concurrently and longitudinally. *Learning and Individual Differences, 50*, 234-239. doi: 10.1016/j.lindif.2016.08.004

Miura, I. T., & Okamoto, Y. (1989). Comparisons of U.S. and Japanese first graders' cognitive representation of number and understanding of place value. *Journal of Educational Psychology, 81*(1), 109-114. doi: 10.1037/0022-0663.81.1.109

Miura, I. T., & Okamoto, Y. (2003). Language supports for mathematics understanding and performance. In A. J. Baroody & A. Dowker (Eds.), *The development of arithmetic concepts and skills: Constructing adaptive expertise* (pp. 229-242). Mahwah, NJ, US: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

Mix, K. S., Prather, R. W., Smith, L. B., & Stockton, J. D. (2014). Young children's interpretation of multidigit number names: From emerging competence to mastery. *Child Development, 85*(3), 1306-1319. doi: 10.1111/cdev.12197

Mix, K. S., Smith, L. B., Stockton, J. D., Cheng, Y. L., & Barterian, J. A. (2016). Grounding the symbols for place value: Evidence from training and long-term exposure to base-10 models. *Journal of Cognition and Development, 18*(1), 129-151. doi: 10.1080/15248372.2016.1180296

Moeller, K., Pixner, S., Zuber, J., Kaufmann, L., & Nuerk, H. C. (2011). Early place-value understanding as a precursor for later arithmetic performance– A longitudinal study on numerical development. *Res Dev Disabil, 32*(5), 1837-1851. doi: 10.1016/j.ridd.2011.03.012

Price, P. S. (2001). *The development of year 3 students' place-value understanding: Representations and concepts* (Doctoral dissertation, Queensland University of Technology). Retrieved from http://eprints.qut.edu.au/15783/

Rogers, A. (2012). Steps in developing a quality whole number place value assessment for years 3-6: Unmasking the "Experts". In J. Dindyal, L. P. Cheng & S. F. Ng (Eds.), *Mathematics education: Expanding horizons (Proceedings of the 35th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia)*(pp. 648-655). Singapore: MERGA.

Ross, S. H. (1986, April). *The development of children's place-value numeration concepts in grades two through five.* Paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association, San Francisco, CA.

Ross, S. H. (1989). Parts, wholes, and place value: A developmental view. *Arithmetic Teacher, 36*(6), 47-51.

Saxton, M., & Cakir, K. (2006). Counting-on, trading and partitioning: Effects of training and prior knowledge on performance on base-10 tasks. *Child Development*, *77*(3), 767-785. doi: 10.1111/j.1467-8624.2006.00902.x

Schiffman, J., & Laski, E. V. (2018). Materials count: Linear-spatial materials improve young children’s addition strategies and accuracy, irregular arrays don’t. *Plos One*, *13*(12), 1-19. doi: 10.1371/journal.pone.0208832

Thomas, N. (2004). The development of structure in the number system. *International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *4*, 305-312.

Usiskin, Z. (1982). *van Hiele levels and achievement in secondary school geometry.* Chicago, IL: University of Chicago, Department of Education.

Uttal, D. H., O'Doherty, K., Newland, R., Hand, L. L., & DeLoache, J. (2009). Dual Representation and the Linking of Concrete and Symbolic Representations. *Child Development Perspectives, 3*(3), 156-159. doi: 10.1111/j.1750-8606.2009.00097.x

Wong, T. T. Y. (2018). The roles of place-value understanding and non-symbolic ratio processing system in symbolic rational number processing. *British Journal of Educational Psychology. 89*(4), 635-652. doi: 10.1111/bjep.12249

連宥鈞、吳昭容（2020）。
手勢融入範例對低能力學生運算與幾何學習的影響。
臺灣數學教育期刊，7（2），45-70。
doi: 10.6278/tjme.202010_7(2).003

手勢融入範例對低能力學生運算與幾何學習的影響

連宥鈞[1]　吳昭容[2]
[1]國立臺灣師範大學高等教育深耕計畫辦公室
[2]國立臺灣師範大學教育心理與輔導學系／學習科學跨國頂尖研究中心

體現認知的研究發現，學生在幾何學習時以手勢配合描摹幾何圖，比起限制手勢所獲得的學習效果好，但在非幾何的材料上卻不一定有此體現效果。本研究以整數加減運算與平行線截角性質為材料，並經測驗篩出整數加減運算尚不純熟的七年級生進行實驗。在 18 位受試者的前導實驗以改善範例、練習，和程序之後，正式實驗的 52 位學生被隨機分派到使用手勢的實驗組與無手勢的控制組，進行範例學習與後測。三至四個月之後進行延宕測驗與訪談。結果顯示，兩組在整數加減的學習時間、答對率，以及認知負荷皆無顯著差異，但在延宕測驗答對率中有四種題型顯現組間顯著差異。平行線截角性質的實驗組後測遠遷移題答對率比控制組高，此一效果未出現在延宕測驗。綜合實驗一和二，在已學過的整數加減運算上未見手勢的效果，而在未學過的幾何教材上，描摹具有即時效果，但未具保留效果。體現認知效果在數學教育的實徵研究與實務應用上，尚有廣大的發展空間。

關鍵字：體現認知、範例、認知負荷、學習遷移

通訊作者：吳昭容，e-mail：cjwu@ntnu.edu.tw
收稿：2020 年 7 月 20 日；
接受刊登：2020 年 10 月 19 日。

Journal homepage: http://tjme.math.ntnu.edu.tw/contents/contents/contents.asp?id=21

Lien, Y. C., & Wu, C. J. (2020).
The effects of gesture on low-ability students' learning of arithmetic and geometry using worked examples.
Taiwan Journal of Mathematics Education, *7*(2), 45-70.
doi: 10.6278/tjme.202010_7(2).003

The Effects of Gesture on Low-Ability Students' Learning of Arithmetic and Geometry Using Worked Examples

Yu-Chun Lien [1]   Chao-Jung Wu [2]

[1] Higher Education Sprout Project Office, National Taiwan Normal University

[2] Department of Educational Psychology and Counseling / Institute for Research Excellence in Learning Science, National Taiwan Normal University

Research on embodied cognition has found that students who use gestures to trace geometric figures while learning geometry perform better than students who restrict their use of gestures. However, this effect may not appear in non-geometric learning. This study investigates this through the tasks of adding and subtracting integers and angle relationships involving parallel lines. The participants were low-ability seventh graders unable to master integer addition and subtraction on a screening test. A pilot study was conducted with 18 seventh graders, and the results were used to improve the worked examples, practices, and procedures. In formal experiments, 52 students were randomly assigned to experimental and control groups, where they studied worked examples either with or without gestures. A delayed test and interview were conducted three to four months after the experiment. The results showed that the experimental group did not differ from the control group in learning time, cognitive load, and accuracy in Experiment 1, but the accuracy of the two groups for the four question types was different in the delayed test. In Experiment 2, the accuracy of the experimental group was higher than that of the control group on the post-test far transfer problems. However, this effect was not observed in the delayed test. In summary, the present study found good gesture design combined with examples that participants have learned, enhance student learning. Also, for geometric materials that participants have not learned, gestures led by principles in textbooks can greatly enhance learning. Both the research and practice of mathematics education has considerable potential to explore the effect of embodied cognition.

Keyword: embodied cognition, worked example, cognitive load, transfer

Corresponding author：Chao-Jung Wu，e-mail：cjwu@ntnu.edu.tw
Received：20 July 2020;
Accepted：19 October 2020.

壹、緒論

數學是一門需要學習者動用大量認知資源的學科，對於抽象符號與圖像的理解是剛升上國中的學生在數學學習中需要解決的難題之一，包括學習負數運算以及幾何性質的應用。為了使數學低能力的中學生擁有良好運算與幾何的心智表徵，各種降低學生認知負荷的方法，例如：利用範例、以圖輔助，或者加入手勢常能促進學習（Hu, Ginns, & Bobis, 2015; Kalyuga, 2009; Richland, Stigler, & Holyoak, 2012）。

心理學家與教育學者已發現手勢、姿勢，或操弄教具不只有助於表達想法、促進聽者的理解，同時還能促進知識的建構（Alibali & Nathan, 2012; de Koning & Tabbers, 2011; Pouw, Van Gog, & Paas, 2014），例如以手指在閱讀材料中的文字或圖像上比劃、運用肢體操作教具，或模仿教練的動作都有助於認知活動，此一議題稱為「體現認知（embodied cognition）」。也有研究支持描摹（tracing）能提升中小學生的幾何學習效果，且有效降低認知負荷（Du & Zhang, 2019; Ginns, Hu, Byrne, & Bobis, 2016; Hu et al., 2015; Yeo & Tzeng, 2020），但體現認知對非幾何教材、數學運算的效果則實徵證據不一致，有支持的（Ginns et al., 2016; Goldin-Meadow, Cook, & Mitchell, 2009），也有不支持的（Yeo & Tzeng, 2020）。本研究除了針對七年級整數運算有困難的學生重複驗證體現認知在幾何學習上的效果之外，也以整數加減運算設計體現認知特性的介入方式，探究體現認知在非幾何教材上的效果。

低能力的學生在學習新知時較難從高認知負荷的方法中獲益，所以需為其發展認知負荷較低的教材，而之前的研究已指出從範例（worked example）學習比起傳統問題解決式的學習更能讓學生在學習新的教材上有良好的表現，也感受到較小的認知負荷（Retnowati, Ayres, & Sweller, 2010; Sweller & Cooper, 1985; Schwonke, Renkl, Krieg, Wittwer, Aleven, & Salden, 2009; Schwonke, Renkl, Salden, & Aleven, 2011），此外，在探討體現認知在中小學數學學習之實徵研究也常採用範例學習的派典（Du & Zhang, 2019; Ginns et al., 2016; Hu et al., 2015; Yeo & Tzeng, 2020），範例不僅適合低能力學生，而且適合用來示範手勢。因此，本研究的目的為：同在範例學習的框架下，比較融入了手勢的實驗組與未融入手勢的控制組受試者的數學學習成效，教材範圍擴充至非幾何性質的整數加減運算學習，同時複製過去平行線截角性質的幾何學習研究，並將研究對象的範圍限縮在低能力的學生上。

一、體現認知的理論與實徵研究

個體成長的過程中，身體參與學習是不可或缺的。「體現認知」主張認知依賴身體的感官動作經驗，而感官動作又與環境有所互動，因此與人類心智相容的身體條件是學習的基礎，身體以適切的方式與環境互動所產生的經驗影響著個體的發展與學習（Pouw et al., 2014）。例如人們

看到鐵鎚會知道它是重物、看到文字的「鹹」與「甜」便能在腦海中想像味道，皆是因為我們有最初的身體經驗帶領我們擁有這些認知。

身體的參與何以有助於認知活動呢？兩個常被提到的觀點，一是認知卸載（cognitive offloading），另一是特定模態痕跡的再活化（reenact modality-specific trace）（Hall & Nemirovsky, 2012; Risko & Gilbert, 2016; Sweller, van Merriënboer, & Paas, 2019; Wilson, 2002）。認知卸載主張外在的姿勢或操弄可以降低內在的心智操弄，進而降低認知負荷；典型的例子是，我們會不由自主地歪頭來配合閱讀歪斜的文字；又例如心算讓大腦承載了所有的認知負荷，扳手指可以降低抽象思考與記憶的負擔。痕跡活化主張離線的認知是以身體為基礎的（offline cognition is body based），姿勢或動作可以再度活化學習時知覺動作的記憶痕跡，進而促進概念提取與理解，此一觀點與 Piaget 和 Bruner 主張形式或符號的表徵源自動作的論點一致；認知心理學的多個研究議題，如心像、工作記憶、情節記憶、內隱記憶、問題解決，有許多行為或神經的發現支持此主張（Wilson, 2002）。例如認知神經的研究顯示，當抓取任務中的受試者看到長方體模型以直立的、容易抓取的方向擺放在桌上，則視覺訊號會刺激大腦的運動區域使其活化，以準備抓取此物，但若以橫向的、不易抓取的方向擺放，則此時大腦的運動區域不會活化，顯現了環境、知覺，與認知活動的關聯。

運用知覺動作的多模態（multimodalities）促進學習早有淵源。二十世紀初期，Montessori 利用剪成字母形狀的砂紙來教導幼童習寫文字，幼童聽到老師唸出來的語聲、眼睛看到砂紙的形狀、感受手指在砂紙上描摹字母的觸覺，讓多種知覺動作整合在字母學習中（引自 Hu et al., 2015）。晚近也有多種學習主題以實徵研究驗證知覺動作對學習的效果，包括水循環（Tang, Ginns, & Jacobson, 2019）、心臟結構（Macken & Ginns, 2014）、幾何（Hu et al., 2015）、數的等量公理（Goldin-Meadow et al., 2009），比較有手勢參與的實驗組與限制動作的控制組，都得到實驗組比控制組表現來得好的結果。

Goldin-Meadow、Nusbaum、Kelly 與 Wagner（2001）的研究指出，手勢可以降低認知負荷，讓受試者在同步執行的第二項記憶作業上表現得較佳。大學生與九歲孩童個別地在黑板上完成數學解題（如：$x^2-5x+6=(\quad)(\quad)$，或 $4+5+3=\underline{\quad\quad}+3$），每解完一題會有一串記憶項目（字母或詞彙），接著解釋解題，最後回憶記憶項目。每位受試者都會經歷兩種解釋情境：一是可以藉由指示性手勢（pointing gesture）圈點、連線或是描摹黑板的字來解釋；另一為手被限制在桌面上，單純以口頭解釋黑板上的算法。刪除在後一種情境出現手勢的受試者後，有效樣本是 32 位大學生與 26 位孩童。結果顯示，兩組在有手勢的情境下能回憶出來的項目數皆顯著高於無手勢的情境，也就是測得的記憶廣度較大。所以 Goldin-Meadow 等人認為，手勢在解釋的歷程中分擔了一些認知任務，使得受試者能保有較多的認知資源，進而能記憶更多的字母或詞彙。

那是否只要加入任意動作都能促進學習者的學習表現呢？答案是只在動作有配合著認知歷程時才能促進學習。Mavilidi、Okely、Chandler、Domazet 與 Paas（2018）將 120 位平均年齡 4.7

歲的幼兒隨機分派為四組，進行四週 1 到 20 的數字學習課程，並施測包括 20 以內的順數、逆數、數物、認數字、讀數字、數線估計、數字大小比較等多個數字作業。整合組學習數字時，學生須配合地上排成一直線的數字數線移動身體，例如：當老師要求學生從 1 數到 20，學生須邊數邊依序踩著數線上的數字；非整合組則做與學習內容無關的移動，例如：當老師要求學生從 1 數到 20，學生須邊數邊繞著教室周圍走；觀察組坐著進行數字學習，同時會看到整合組幼兒在旁學習的動作；控制組也是坐著學習，既無身體參與也無觀察別組動作。結果顯示，整合組的學習表現優於其他三組，但在非整合組中的表現卻與控制組無顯著差異，而觀察組的學習表現最差，比整合組與非整合組差，而與控制組無顯著差異。此篇研究也說明了當肢體動作與數學教材內容互相配合來做教學設計，則能促進學生的學習成效。但當動作僅是學習時做出的無意義舉動，並不會影響學習者的認知歷程。

二、幾何與非幾何的體現認知研究

在數學教學中，老師常會使用肢體語言來提升學生的注意力與促進學習，其中最常見的便是描摹與指示性手勢。Hu 等人（2015）的實驗一便想知道描摹與指示性手勢的方式能否有效提升學生的學習成果，並降低認知負荷。他們以平行線截出對頂角相等、同位角相等、同側內角互補的範例作為教材，將 42 位國小五年級的學生隨機分為兩組，描摹組在範例學習時被教導用手指描摹教材，控制組則將手固定放於膝上。結果發現，在遠遷移測驗的部分，描摹組比控制組的正確率顯著高，且感受到顯著較低的難度。而實驗二為了釐清多模態的效果，增加了懸空描摹的組別，結果在紙上描摹的優於懸空描摹的、懸空描摹的又優於控制組。Hu 等人認為控制組僅視覺參與，懸空描摹則有視覺和體感，紙上描摹組整合了視覺、體感，和觸覺，亦即整合越多感官動作的學習方式，其效果越好。

既然描摹對於平行線這樣的教材是一種良好的教學與學習方式，那是否可以推論至其他幾何學習的教材呢？於是 Ginns 等人（2016）在實驗一中便如法炮製的對 52 名六、七年級的學生改以三角形外角定理為教材實施幾何學習的研究。他們將學生分兩組，其中一組教導其用自己的手指做描摹學習，另一組要求學生將手放於膝上，是為控制組。而此次研究結果發現，在後測近遷移題中兩組成績與認知負荷皆無顯著差異；遠遷移題中描摹組的成績仍舊顯著高於控制組的成績，但兩組的認知負荷無顯著差異，部分支持了描摹教學可以推廣至其他幾何教材。

但描摹的有效性是否僅限於幾何這類明確具有空間特質的教材呢？許多文化都顯示數數和心算常伴隨手勢，這被認為與數量的內在表徵具空間性有關（spatial–numerical associations），且多感官的參與有助於數量的表徵（Fischer & Brugger, 2011）。但也有學者主張手指的外在表徵雖有助於初期數量概念的發展，但持續使用手勢不利於形成數的抽象概念（Moeller, Martignon, Wessolowski, Engel, & Nuerk, 2011）。這種衝突的觀點也顯現在實徵結果上。前文 Mavilidi 等人

（2018）發現了體現認知具有促進幼兒數概念發展的效果。Goldin-Meadow 與其夥伴（Goldin-Meadow et al., 2009）以三、四年級學生為對象，教導涉及等量公理的加法等式解題，例如 2+5+8 = __+8，控制組僅用口語指導；正確姿勢組則口語指導的同時，搭配以食指與中指成 V 字形指著 2+5，接著再用食指指著填空線；部分姿勢組則以 V 型手勢指著 5+8，接著再指著填空線，結果後測的解題正確率為正確姿勢組顯著高於部分姿勢組，部分姿勢組也顯著高於控制組。Ginns 等人（2016）的實驗二以四年級學生驗證了整數運算的體現認知效果。他們以多步驟整數四則運算的範例做為學習材料，並要學生在範例學習時依算式的運算順序對要進行計算的括弧與運算符號做描摹的動作。而後測的近遠遷移題的結果顯示，描摹組的成績顯著高於控制組，但在認知負荷上，兩組並沒有顯著差異。前述三篇文獻顯示了體現認知的有效性或許並不局限於幾何教材，然而 Yeo 與 Tzeng（2020）在指數律上的嘗試並未呈現體現認知的效果。Yeo 與 Tzeng 在其實驗二指導 72 位六年級學生運用描摹學習指數律的範例。受試的學生分為兩組，實驗組學習時使用手指描摹底數和指數的數字符號；控制組則是要求其將手放在膝上學習。結果顯示，兩組在近遠遷移測驗的成績以及認知負荷上皆無顯著差異，表示描摹並不能促進指數律的學習。這些運算相關的體現認知研究，提示了描摹數字可能不是促進運算知識的好方法，手勢應該與運算知識結合，例如食指與中指的 V 型手勢與數字合併的意義一致，才有助於運算原理的學習。

此外，有些研究者質疑手指描摹是否僅僅是因為吸引學生的注意力而讓學生專注於學習教材，才使學習表現變更好，而非因為描摹的動作具有空間性質使認知負荷減少。為了回應這項質疑，Du 與 Zhang（2019）便在他們的研究中的實驗一將 94 位五年級學生分三組，並沿用 Hu 等人（2015）的平行線的教材。一組學習時教導其使用自己的手指進行描摹；一組要求其學習時手放於膝上，但是他們使用的範例中的圖示上指定的位置會有線索標註，以吸引其注意力；最後一組要求其學習時手放於膝上，視為控制組。而研究結果顯示，在後測近遷移題中成績的部分，描摹組顯著高於線索組與控制組，但此兩組沒有顯著差異，但認知負荷三組皆無顯著差異；而在遠遷移題中成績的部分，描摹組顯著高於線索組，線索組顯著高於控制組。認知負荷的部分，控制組感知到的難度顯著高於線索組，線索組感知到的難度顯著高於描摹組。所以由此研究成果可見，描摹除了使學生集中注意力外（Cosman & Vecera, 2010），還有其他有助於增加學習成效的要素。

三、整數加減運算的教材分析與研究

整數運算對中學數學的學習至為關鍵，但要從具體的正數擴展到抽象的負數有許多障礙。Fuadiah 與 Suryadi（2017）以來自三所中學、學過整數概念與運算的 96 名七年級學生進行測驗，內容包括整數的先備知識、概念、運算、原則，和解題。結果顯示學生普遍在五個面向都有困

難，比率達到 50–90%。其中在負數運算部分，有近 75%的學生無法掌握含有負整數的加減運算，更有高達 95%的人在進行含有負數的減法運算上有困難，顯示涉及負數的加減運算特別困難。有 85%的學生會誤用一些運算的規則，例如以為 36－17＝17－36 而誤用交換律，或者以為－10－12－5＝－10－（12－5）而誤用結合律。另一種常見的錯誤，便是誤用「負負得正」、「正負得負」、「負正得負」的計算規則，上述的三種計算規則應是屬於乘法，但此研究指出有些學生將此三種規則誤用在整數的加減運算中，導致 19＋（－6）＝－25、－31＋（－8）＝39 以及－10－12＝22 的錯誤運算。

Janiver 將整數加減運算的教學模式分為平衡模式（equilibrium model）和數線模式（number-line model）（引自 Hativa & Cohen, 1995），前者把數視為兩類「相反」（opposite）的元素，如同黑白的棋子可相互抵銷，加的運算就被定義為合併，而減的運算是取走或是加上相反數；後者則將數表徵為數線上的位置或是在數線上的移動，加的運算被定義為位置或移動的合併，而減的運算是移動方向的逆轉。目前台灣中學教科書多採用數線模式來設計整數加減教材。

Moreno 與 Mayer（1999）以數線模式發展能區隔性質符號與運算符號意義的數位化平台，用來協助學生連結整數加減的概念性知識與程序性知識。在一開始實驗組的電腦螢幕會出現 8 題運算題目供受試者自行選擇想做哪題，以 4－（－5）＝9 為例，選完題目的實驗組受試者會在電腦螢幕上看到一隻兔子在數線上 0 的位置，並且螢幕會顯示指導語以及電腦語音告訴學習者需要進行的操作，如圖 1 所示，螢幕上會出現按鍵告訴受試者如何操作兔子往左或是往右移動以及頭必須面向左邊或是右邊，而第一步是操作兔子從 0 移動至被加（減）數在數線的位置，本例為 4。第二步為觀察運算符號為加、減號來調整兔子面對數線的右邊或左邊，本例為減號，因此受試者操作兔子面向左邊。第三步為依據被加（減）數的性質符號來操作兔子往前跳或往後跳，本例是－5，因此操作兔子往後移 5 步，此時兔子在數線上的位置即為答案。螢幕右下方四個按鍵用「Face Right」、「Face Left」來操作運算符號（例如圖 1 的減號），用「Jump Fwd」、「Jump Back」來操作數字的正負號，Moreno 與 Mayer 認為這樣有助於學生區隔「＋」「－」是性質符號或運算符號。若答案不對，螢幕會顯示受試者答案是錯的，可以再做一次題目。對照組的電腦螢幕同樣也會出現與實驗組一樣的 8 題供受試者自行選擇想做哪題，其中，做過的題目亦可以再做一次，若答案不對，螢幕也會顯示告訴受試者答案是錯的。實驗進行四節課，每名受試者皆能做到 64 個題目。結果顯示實驗組後測較前測的進步幅度比控制組顯著較大。然而 Moreno 與 Mayer 對控制組並無教學，所以實驗組的正向效果只能說比讓學生嘗試錯誤來得好。

Bossé、Lynch-Davis、Adu-Gyamfi 與 Chandler（2016）透過訪問教師如何教導數線正負數的運算，來說明數線在建立表徵上的優點與限制。結果發現，在加法上，不論正整數或負整數相加，數線模式多數能形成適合的對應表徵，但減去負數則較難清楚說明。例如以數線模式教導－3－（－5）＝2 時，有老師的說明是以一個小人原本在數線－3 的位置上面向右邊，但遇到減號所以轉而面向左邊，－5 的意思便是往後走 5 步走到 2 的位置。此操作法與 Moreno 與 Mayer

（1999）在數線模式發展的數位化平台中使用的方法一致，只是將操作物件由兔子改為一個小人。但 Bossé 等人認為，雖然答案上是對的，但操作與概念理解並無直觀的連結，難以清楚解釋為何被減數經過減法運算得到的結果反而變大。本研究認為 Moreno 與 Mayer 的數線模式具有發展成符合體現認知觀點的潛能，若讓學生以手勢代替平台的兔子，以手指方向和移動來表徵正負與大小變化，而不僅僅在算式上描摹，會更符合數量的空間性（Fischer & Brugger, 2011）。

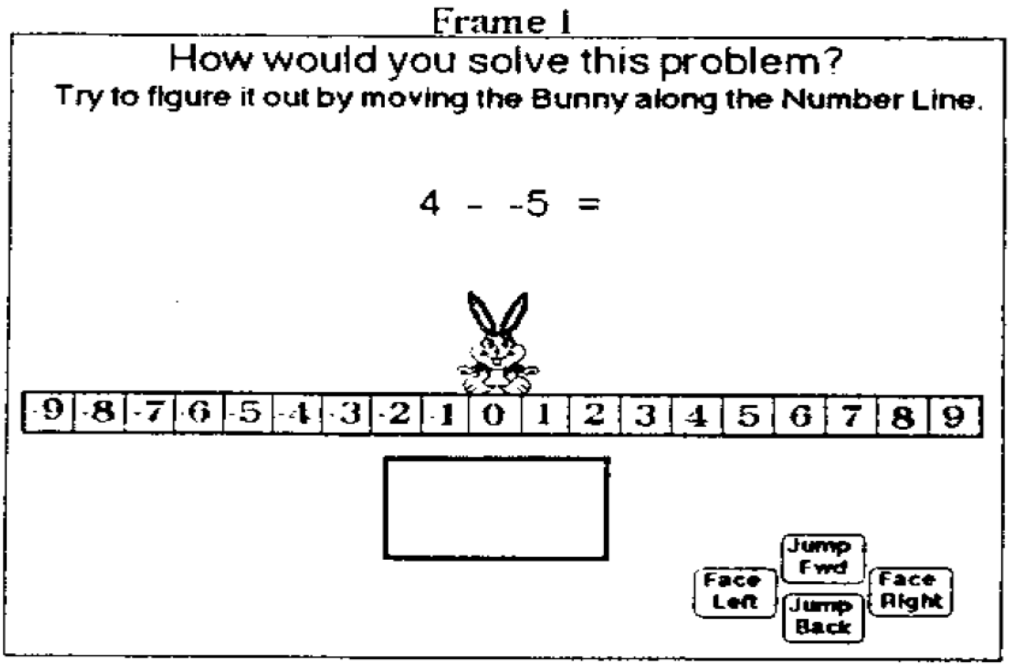


圖 1　整數加減運算在多表徵的數位學習過程。取自 Moreno & Mayer, 1999, p. 224。

四、範例學習的理論與研究

前文探討中小學數學學習的體現認知效果之實徵研究，有多篇是採用範例進行學習的（Du & Zhang, 2019; Ginns et al., 2016; Hu et al., 2015; Yeo & Tzeng, 2020）「範例」意指除了問題之外，還給予解題步驟以及解說的學習材料，通常範例會搭配類似題解題一併學習。比起單純問題解決式的學習，範例學習能讓學習者有較佳的學習效果、較低的認知負荷（Retnowati et al., 2010; Sweller & Cooper, 1985; Schwonke et al., 2011）。Sweller（2006）認為人們在解決新任務時，工作記憶會以兩種方式運作：借用（borrowing）或隨機生成（randomness as genesis）。借用是從長期記憶中活化既有的舊知識，將新任務的訊息加以同化；隨機生成則因長期記憶中沒有能夠幫助新任務的知識，所以人們透過隨機生成一些新方法來嘗試，隨後保留能夠幫助任務的內容。借用的方式因新訊息能夠與舊知識產生有意義的聯結，大腦所承受的負荷自然會比隨機生成方式來得小。所以在範例學習上，因有給予學習者詳盡的步驟與解說，使其能夠順利提取舊資訊並減少無關的隨機生成，而達成較效率、低負荷的學習。Van Gog、Paas 與 Van Merriënboer（2004）

更提到不同於問題解決，接受範例學習的人們可以將問題中新資訊結構化，並依序完成解題步驟來得到答案。在這樣的過程中，學習者會對新知識產生良好的基模，以利未來的遷移。

實徵研究上有許多支持範例學習比問題解決學習成效來得好的案例，尤其是能力、經驗不足的對象特別能凸顯範例的效果。Sweller、Ayres、Kalyuga 與 Chandler（2003）認為，隨著經驗與能力的提升，學習者對於某些問題已學會一些解決方式並已自動化，此時若以範例學習提供問題解決的方法，範例的訊息可能會是多餘的資訊，導致增加學習者的認知負荷。因此，近年來相關的研究已經不需要探問範例學習是否比問題解決學習法來得好，而在探討何種設計的範例學習能更有效果。Atkinson、Derry、Renkl 與 Wortham（2000）回顧了許多範例學習的文獻，提出須留意三個因素。第一是範例內的特徵，例如範例與解說或圖示的空間配置；第二是範例間的搭配，像是多題不同難度的範例搭配，或是範例與練習題間的組合方式；第三是學習者的個別差異，例如高低能力不同的學生的差異。本研究的實驗組和控制組都同樣採用範例學習，同時也參考 Atkinson 等人所提醒的三點因素，在範例內的特徵上使用文字搭配圖像的位置；在範例間的搭配上，注意每題範例間的教材學習順序及配合範例來擬訂練習題；為因應低能力學生的特質，在正式研究時亦要求受試者朗讀範例步驟、對練習題作解答，以促使其能更投入範例學習，詳見研究方法。

五、研究設計與假設

本文旨在以低能力的學生為對象，並以對於生手來說負荷較低的範例為學習材料，進一步探討有無使用手勢對數學學習的影響，以及有無手勢的保留效果。在正式實驗前，曾以台北一所國中九個班級篩選出來的 18 名受試者（女生 11 人）進行前導研究，據以修改範例、練習，以及實驗程序。學習材料包括實驗一的整數加減運算與實驗二的平行線截角性質；受試者被隨機分派到使用手勢的實驗組和限制手勢的控制組；測驗的答對率和認知負荷的主觀評量是用來檢驗評量成效的主要依變項。實驗一的整數運算是受試者已經學過的知識，且為了篩選運算能力不純熟的低能力學生，因此有前測；而實驗二的幾何概念尚未學過，因此僅有後測與延宕測驗。認知負荷的測量方式採單題五點量表請受試者評量題目難度，此種方法被多篇以中小學生為對象的體現認知研究所使用（Ginns et al., 2016; Hu et al., 2015; Tang et al., 2019; Yeo & Tzeng, 2020）。本論文的研究假設為：

（一）低能力學生在以手勢來學習整數加減運算時，後測與延宕測驗的答對率會比未以手勢來學習的學生顯著較高。

（二）低能力學生在以範例來學習整數加減運算時，後測與延宕測驗答對率會比前測顯著較高。

（三）低能力學生在以手勢來學習整數加減運算時，後測與延宕測驗的認知負荷會比未以手勢來學習的學生顯著較低。

（四）低能力學生在以手勢來學習平行線截角性質時，後測與延宕測驗答對率會比未以手勢來學習的學生顯著較高。

（五）低能力學生在以手勢來學習平行線截角性質時，後測與延宕測驗認知負荷比未以手勢來學習的學生顯著較低。

貳、方法

一、受試者

參與本研究篩選測驗的學生來自四所中學，包括雙北三所國中課後班 94 位，與桃園市某國中三個班全體 46 位七年級生，後者的學生會考表現較前三所來得低。依整數加減篩選測驗結果（見下一段）邀請受試者，並經家長同意後共 60 位低能力受試者參與實驗，隨機分派到實驗組與控制組各 30 位。實驗時，受試者已學完正負整數加減運算一個月以上，尚未學習平行線截角性質。剔除因讀字有困難或動機低落無法配合實驗的受試者後，實驗一實驗組有效樣本為 24 人（女生 9 人）、控制組 28 人（女生 16 人）；實驗二實驗組有效樣本為 23 人（女生 8 人）、控制組 28 人（女生 16 人）。

二、研究工具

（一）整數加減運算篩選測驗

本篩選測驗目的在篩選出整數加減運算不熟練的學生，同時也作為實驗一的前測資料。本測驗參考了 Fuadiah 與 Suryadi（2017）的研究結果，只關注錯誤率較高的題型，排除正＋正與正－正的題型，並新增兩類二步驟運算的題型，如表 1 所示有十種題型。每題型各三題，共 30 題。若受試者在十種題型中的某一題型答錯兩題以上，則視其尚不熟練該種題型的運算，進而邀請其參與本研究的個別實驗。

表 1
整數加減運算篩選測驗題型、例子、遷移類別

題型	例子	遷移類別
正－負	3 －（－7）	近
負－正	（－2）－ 6	近
負－負＝負	（－4）－（－1）	近
正＋負＝正	4 ＋（－3）	近
負＋正＝正	（－6）＋ 8	近
負＋正＝負	（－4）＋ 3	近
負－負＝正	（－2）－（－4）	遠
負＋負	（－2）＋（－5）	遠
正－負－負	5 －（－2）－（－4）	遠
正＋負－負	7 ＋（－2）－（－3）	遠

（二）整數加減運算範例

實驗一整數加減運算範例，基於前導研究的成果進行設計，採兩兩範例題為一組，共四組範例做為學習材料。四組範例分別凸顯運算程序上被加／減數的性質符號、運算符號、加／減數的性質符號、和／差的性質符號的變化，如表 2 所示。例如第一組範例題為 4－（－3）與（－4）－（－3），是為了使受試者了解當被減數的性質符號相反時的操作差異。範例出現過的六種題型，分析時歸為近遷移題，其餘四種題型為遠遷移題，見表 1。

表 2
範例題與練習題的呈現次序與差異

題序	範例	題間差異	練習
第一組	4 －（－3） （－4）－（－3）	被減數性質符號相反	3 －（－1） （－3）－（－1）
第二組	4 ＋（－3） 4 －（－3）	運算符號相反	3 ＋（－1） 3 －（－1）
第三組	（－4）－（－3） （－4）－ 3	減數性質符號相反	（－3）－（－1） （－3）－ 1
第四組	（－4）＋ 3 （－4）＋ 6	答案性質符號相反	（－3）＋ 1 （－3）＋ 5

不論實驗組（圖 2）或控制組（圖 3），每道範例題都有三個步驟的文字說明。每步驟使用不同的顏色，須照紅、藍、綠的順序閱讀。步驟一指示依照算式的被加／減數在數線上找出運算的起始點，此時尚無手勢。步驟二依據算式中的運算符號決定兔子在數線上的面向，加號代表面向右方，減號代表面向左方。步驟三說明兔子前後移動的方式，加／減數為正數即是兔子往前移動、負數即是兔子往後倒退。兩組範例不同之處是步驟②和③說明下方一行括號內的文字，實驗組這兩個步驟下括號內的字，用以指導實驗組的受試者如何選擇左右手以及使用手勢，例如步驟②為「請以右手食指放在起點上代表這隻兔子」，控制組比實驗組少了手指的相片，而步驟下的字改為提醒受試者注意的重點，例如步驟②為「請注意運算符號與兔子面對的方向」。每一組範例都搭配一組練習題，內容見表 2，每一道練習題搭配數線呈現，形式如圖 4。

（三）整數加減運算後測與延宕測驗

本後測與延宕測驗的十種題型與表 1 相同，但考量施測時間，每題型各兩題，分兩輪施測，共 20 題。因前導研究發現，若後測同篩選測驗般用紙筆作答，則兩組學生都傾向不以範例的方法答題。在學習時間有限的情況下，為檢視遷移效果，故後測與延宕測驗各題的呈現方式與圖 4 範例學習時的練習題類似，即一次呈現一題並附有一條數線，將 10 種題型各一題施測一輪。接著，為了收集受試者解題時的認知負荷，10 種題型各一題的第二輪則在每題右下方附上一題「認知負荷評量題」，讓受試者回答「你覺得有多難」，由易到難為 1 到 5 的五點量表。不論加減運

算或難度量表都採口頭回答，使受試者能空出雙手。延宕測驗題型及作答方式同後測，但變更數字。

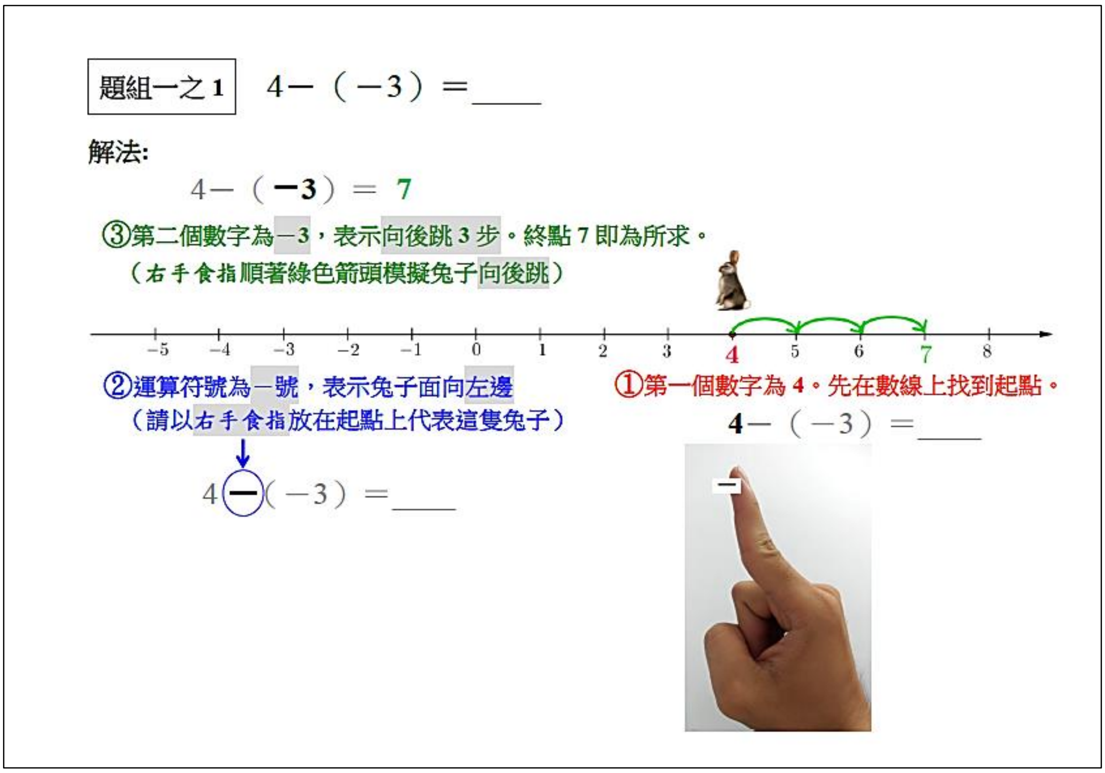


圖 2　實驗組整數加減運算範例題

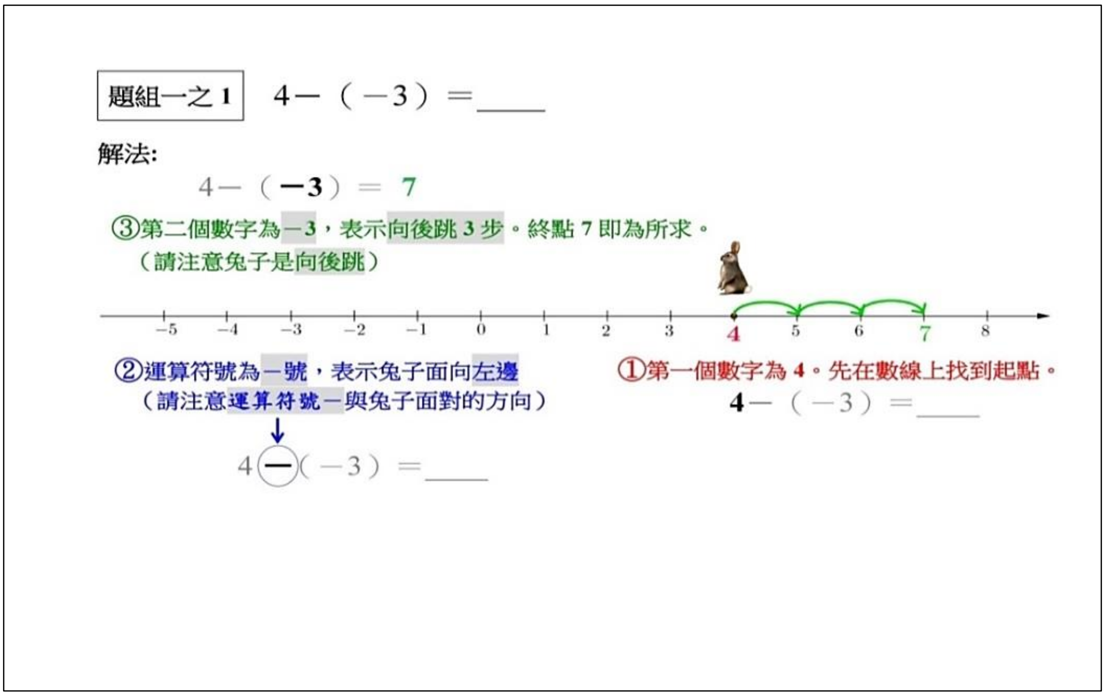


圖 3　控制組整數加減運算範例題

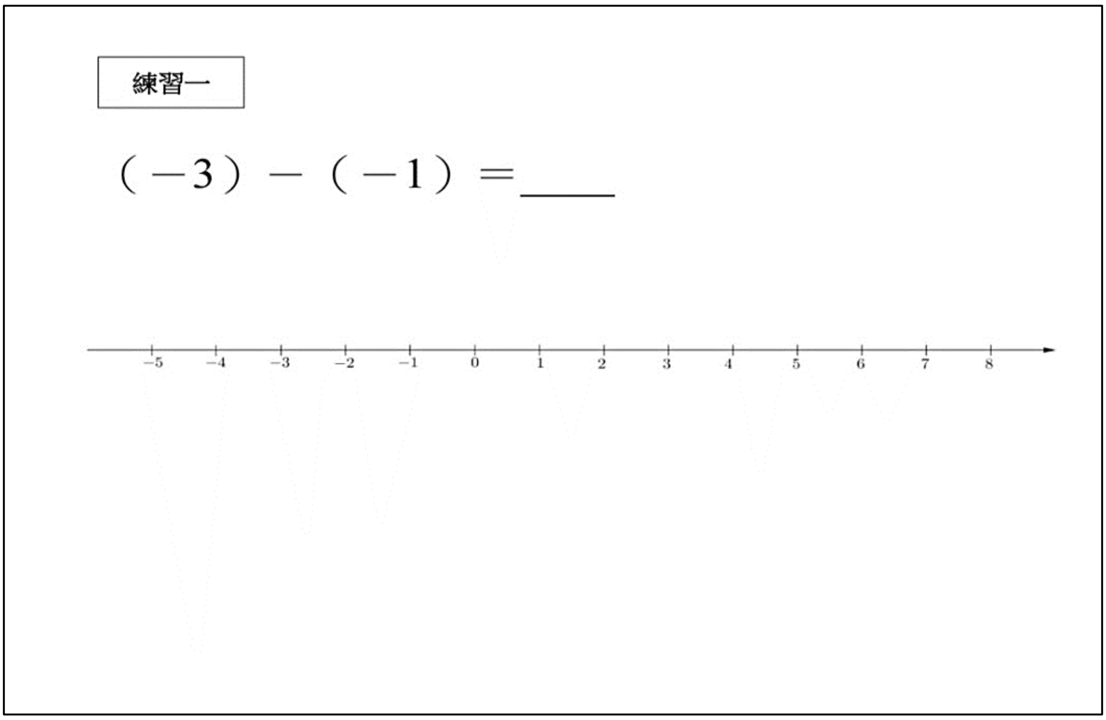


圖 4　整數加減運算練習題

（四）平行線截角性質閱讀材料

由於受試者尚未學習平行線截角性質，故實驗二提供閱讀材料介紹相關概念，如圖 5 所示。內容參考 Yeo 與 Tzeng（2020）準備階段使用的教材，並調整為台灣教科書的用語及慣用的圖形。閱讀材料先以文字與圖例介紹平行線、截線等數學名詞，再以文字與圖例介紹對頂角相等、同位角相等、同側內角互補的性質。其中，每個名詞或性質都至少使用兩個圖例，且每個性質皆有一題應用題，讓受試者練習該性質的應用。

（五）平行線截角性質範例

實驗二平行線截角性質的範例參考 Hu 等人（2015）學習階段使用的教材，共兩題，都得同時運用兩種性質求解。第一題運用對頂角與同位角性質求解，參見圖 6，第二題則用對頂角與同側內角的性質求解。每題的說明皆有四個步驟，每個步驟的文字顏色會以黑、紅、藍、綠的順序呈現，在第一題範例題中，步驟一說明圖形的平行線與截線狀況，步驟二給定圖形右上角的角度數值，步驟三以對頂角相等的性質得到中介步驟的角度數值，步驟四說明以同位角相等的性質得到圖形左下角的角度數值。第二題範例題在前三步驟與第一題相同，步驟四則是以同側內角互補的性質得到圖形左上角的角度數值。不論實驗組或控制組的範例，每一步驟說明的下方皆會有一括弧與文字，不同之處在於，實驗組是指示受試者用食指描摹目標物，例如範例題 1 的步驟①為「請以你的食指描摹兩平行線與此截線」，如圖 6 所示；而控制組則提醒受試者注意目

標的幾何物件，例如範例題 1 的步驟①為「請注意兩平行線與截線」，如圖 7 所示。

兩道範例後皆各提供一題練習題，如圖 8 所示。題目內容與範例題相似，只是改了題目已知的角度與位置，受試者須用範例習得的性質來練習，例如：圖 8 的練習題便是將角度由圖 6 的 55 度改為 150 度，同樣請受試者利用對頂角、同位角性質來求得答案為 150 度。

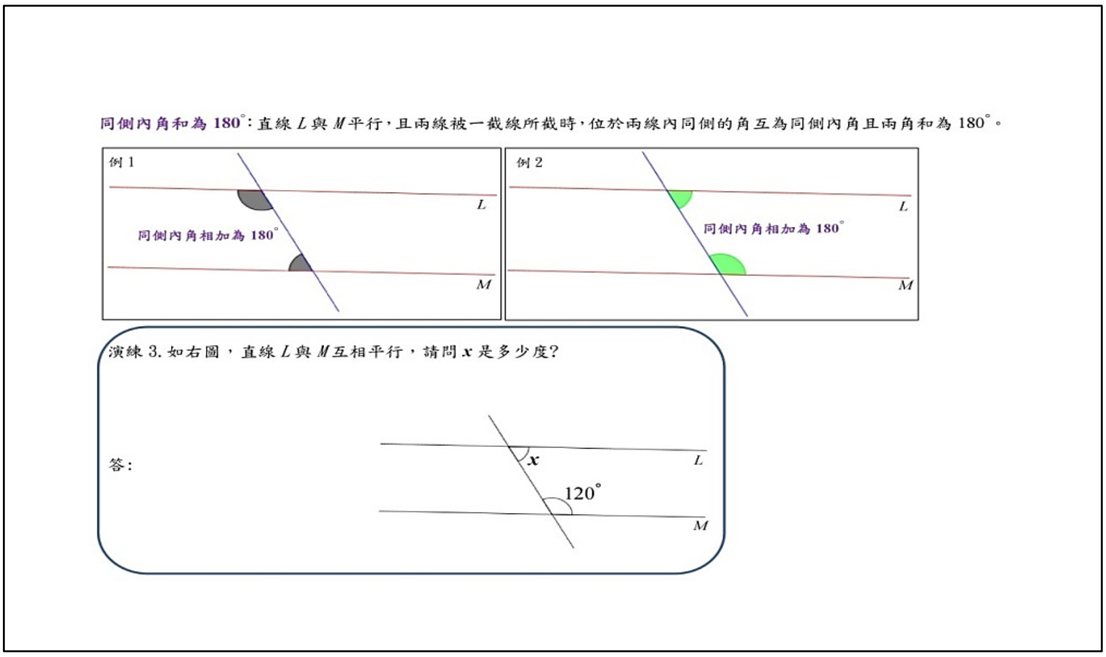


圖 5　平行線截角性質閱讀材料－同側內角

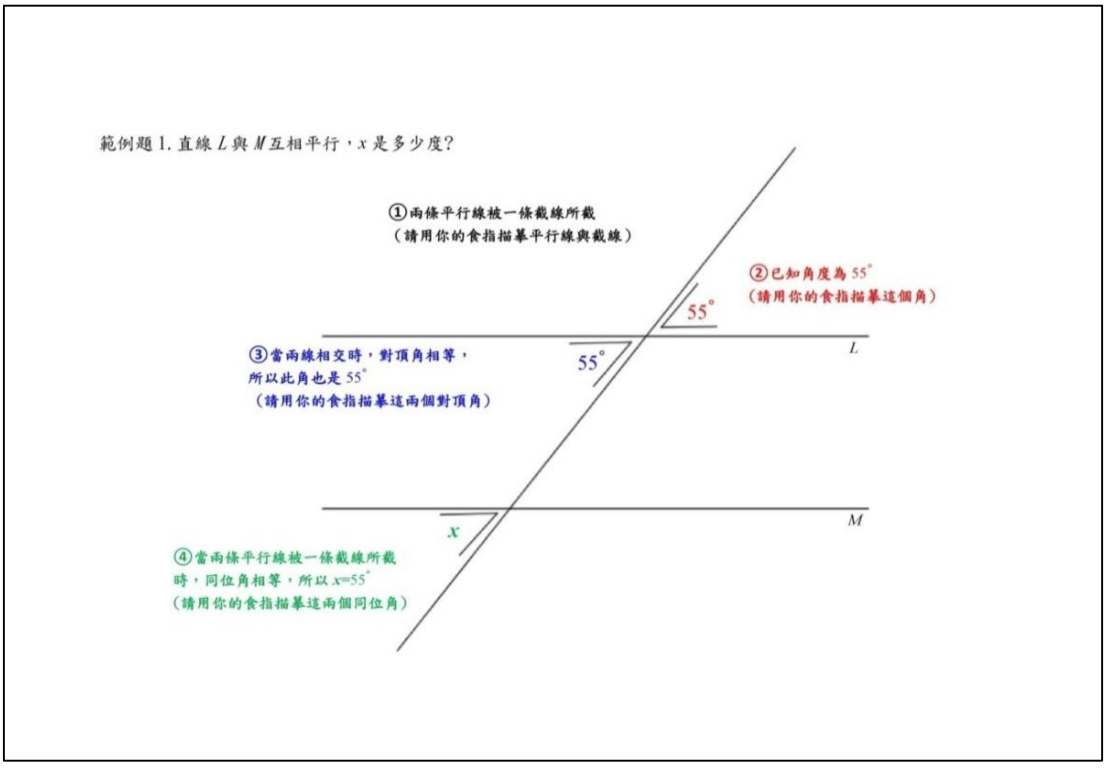


圖 6　實驗組平行線截角性質範例題

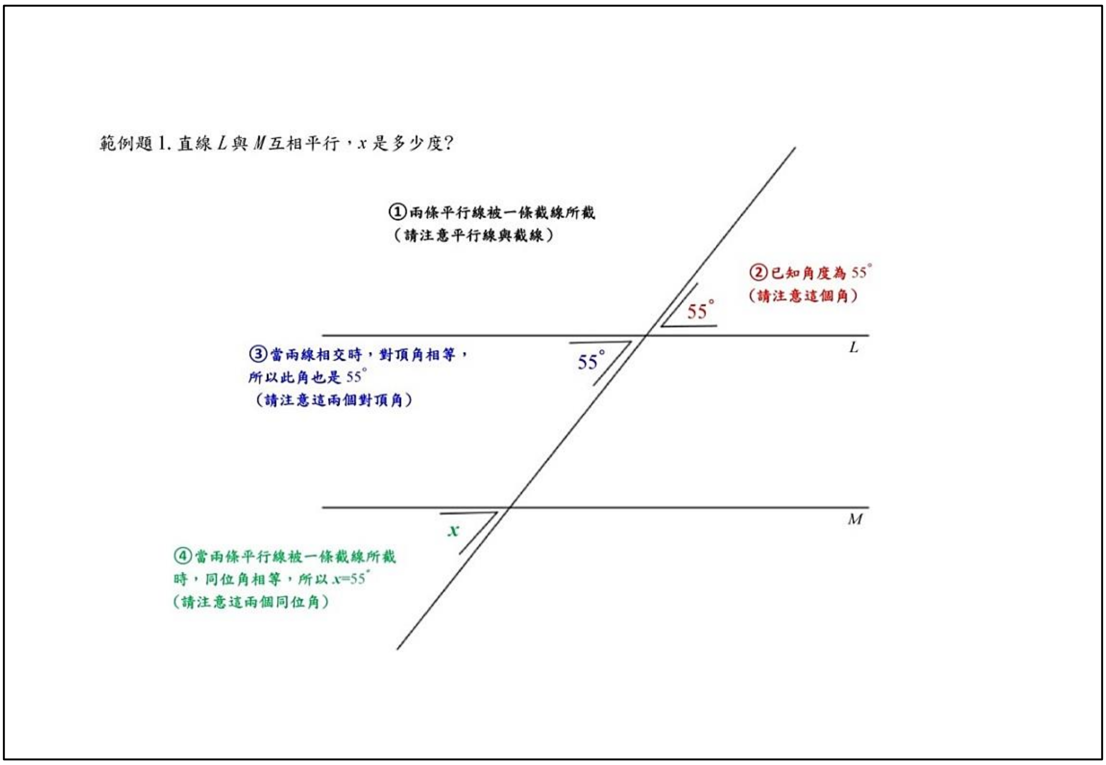


圖 7　控制組平行線截角性質範例題

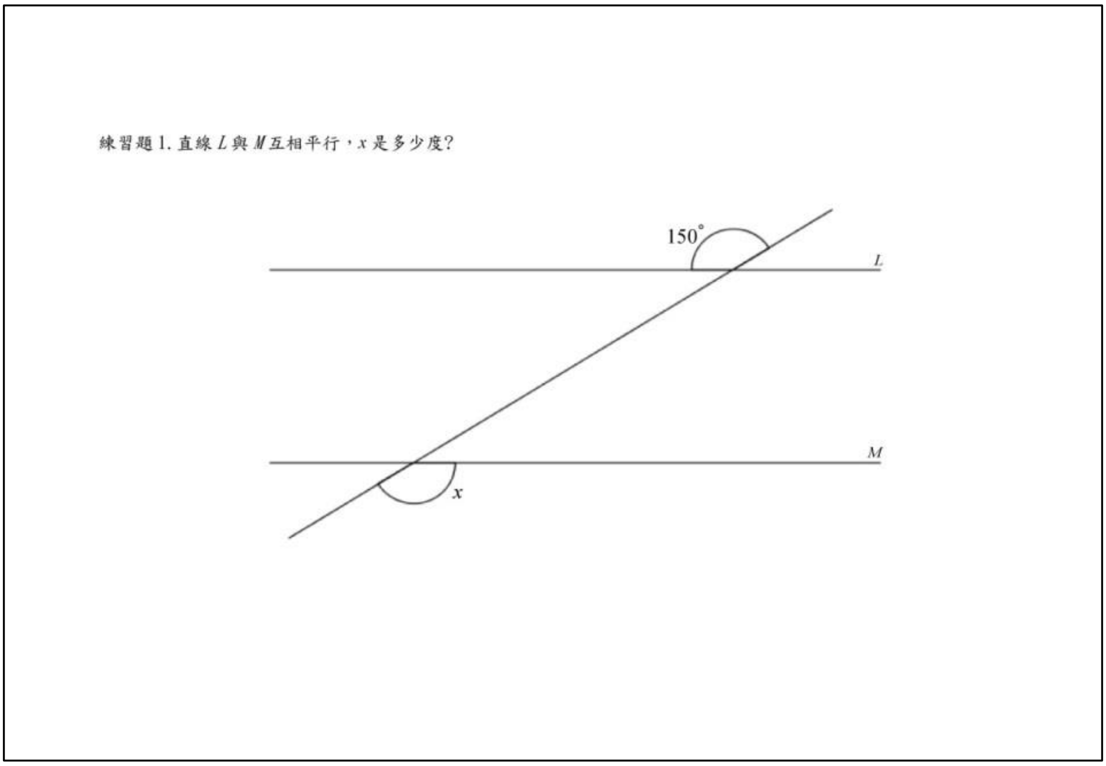


圖 8　平行線截角性質練習題

（六）平行線截角性質後測與延宕測驗

實驗二平行線截角性質的後測與延宕測驗參考 Hu 等人（2015）測驗階段使用的題型，共有六題，前兩題為近遷移題，與兩題範例題的題型類似，僅須利用兩種角度性質；後四題為遠遷移題，須利用三種角度性質才能求出答案。每題下方皆有一題五點的認知負荷評量題，數字愈大表示對題目的感受愈難，與實驗一的認知負荷評量題格式類似。考慮前導研究中受試者紙筆測驗的答題狀況，後測與延宕測驗各題的呈現方式與圖 8 範例學習時的練習題類似，即一次呈現一題。延宕測驗內容與作答方式與後測類似，但微調角度與修改圖形。

三、實驗程序

本研究於 108 學年度第一學期的 11 月進行整數加減篩選測驗。雙北的三所合作學校由課後班任課教師擔任主試，桃園市某國中則由三班的導師擔任主試。學生若在 10 種題型任一題型的三題錯兩題（含）以上，即邀請為受試者。經家長同意後的隔週進行個別實驗，由本文第一作者擔任主試。由於實驗採個別施測，同一所學校第一位受試者和最後一位受試者約有兩週的差距，故前測到實驗與後測的日期，大約間隔一至三週。所有受試者均先進行實驗一再進行實驗二，最後有效樣本分別為 52 人與 51 人，因有位受試者在後測的實驗動機明顯低落，無法繼續進行實驗二，故從實驗二刪除。實驗組受試者在實驗一和二都為實驗組，而控制組則兩個實驗都是控制組。

實驗一開始前，研究者會先跟受試者說明範例學習時間的上限，以及後續閱讀範例的步驟。此外，研究者會與實驗組受試者一起在左手與右手的食指上貼一個貼紙，在左手食指的指腹貼「＋」、右手食指的指腹貼「－」；控制組則是要求閱讀範例時將手放在膝上。由於前導研究發現，若讓受試者自行閱讀範例常會分心，因此要求兩組受試者朗讀學習之中看到的文字。

實驗一範例學習時，實驗組被要求朗讀時按照各步驟括弧中的指示進行手勢輔助，若手勢不正確或用錯手，主試會口頭提醒；控制組則被要求朗讀文字時將手放在膝上。練習題若有錯誤，則要求受試者重看該組範例後，確認受試者是以範例中的做法作答直到其答對。接著，為了確認受試者對步驟的理解，兩組受試者在做完第一組練習題後研究者會問「此題的兔子的起點在哪？兩題的兔子有何不同？」，做完第二組練習題後問「此題的兔子面對的方向是哪邊？兩題的兔子有何不同？」，做完第三組練習題後問「此題的兔子在數線上如何動？兩題的兔子有何不同？」，以確認受試者了解被加／減數、運算符號、加／減數三者對代理人兔子在數線上代表的動作為何，若回答不正確則在第四組練習題時亦須回答此三個問題。

兩組受試者完成實驗一範例學習之後即進行後測，並在開始前提醒受試者試卷待會兒會做檢討，以提升解題動機。受試者解題時由主試者記錄其口頭報告的答案與難度評估。實驗組會被要求以剛剛在範例中學到的手勢輔助來解題，控制組則被要求將手放在膝上解題。實驗一後

測結束後，休息 3 分鐘。

實驗二先請受試者在 5 分鐘內自行閱讀四張平行線截角性質的閱讀材料，閱讀時研究者會請受試者口頭報告教材中每題演練題的答案，如有錯誤，則要求受試者重看該頁內容。範例學習時，主試先跟受試者說明範例學習時間的上限，以及後續閱讀範例的步驟與朗讀文字。在範例學習後的練習題如有錯誤，則要求受試者重看該組範例，直到其答對為止。與實驗一類似，實驗組會被要求照圖上括弧中的指示進行手勢輔助，若未對指定的目標進行描摹或是描摹的目標有誤時，研究者會口頭提醒；控制組則被要求朗讀文字時將手放在膝上。

完成實驗二範例學習之後即進行後測，並提醒受試者試卷待會兒會做檢討。受試者解題時由主試記錄其口頭報告的答案與難度評估。後測結束後若發現受試者有補角角度計算錯誤的部分，研究者會對受試者進行確認並幫其更改，目的為排除計算錯誤的可能，所以每題受試者呈現的答案僅有兩種：題目給定的角度與其補角。實驗二結束後若有時間，研究者會對實驗一和二的後測進行檢討並給予回饋。

第二學期開學的第一個月進行延宕測驗，測驗情境與順序同之前的後測。實驗組施測實驗一的延宕測驗前，會在受試者的手指上貼上「＋」、「－」貼紙。完成測驗後進行訪問，目的為了解受試者對於數線模式的應用以及主觀評價。問題包括：

1. 在上學期的課程結束後到現在的這段時間，你在做整數的加減的題目時，是否有曾想到這個兔子在數線上跳躍的方法。
2. 請你以延宕測驗問題一，4－（－1），為例，來說明這題兔子怎麼跳。
3. 你喜不喜歡我教你的方法。
4. 你覺得我教你的方法對自己的學習是否有幫助。

接著進行實驗二的延宕測驗，測驗情境與順序如同後測。主試者記錄受試者解題過程的動作，例如是否有轉動、移動，或描摹圖形。最後，研究者會詢問並記錄受試者作答第一題時的歷程，一方面為確認受試者是否保留上學期所學到的角度性質，另一方面為了解受試者是否真的理解推理歷程而非猜得答案的，流程如圖 9 所示。

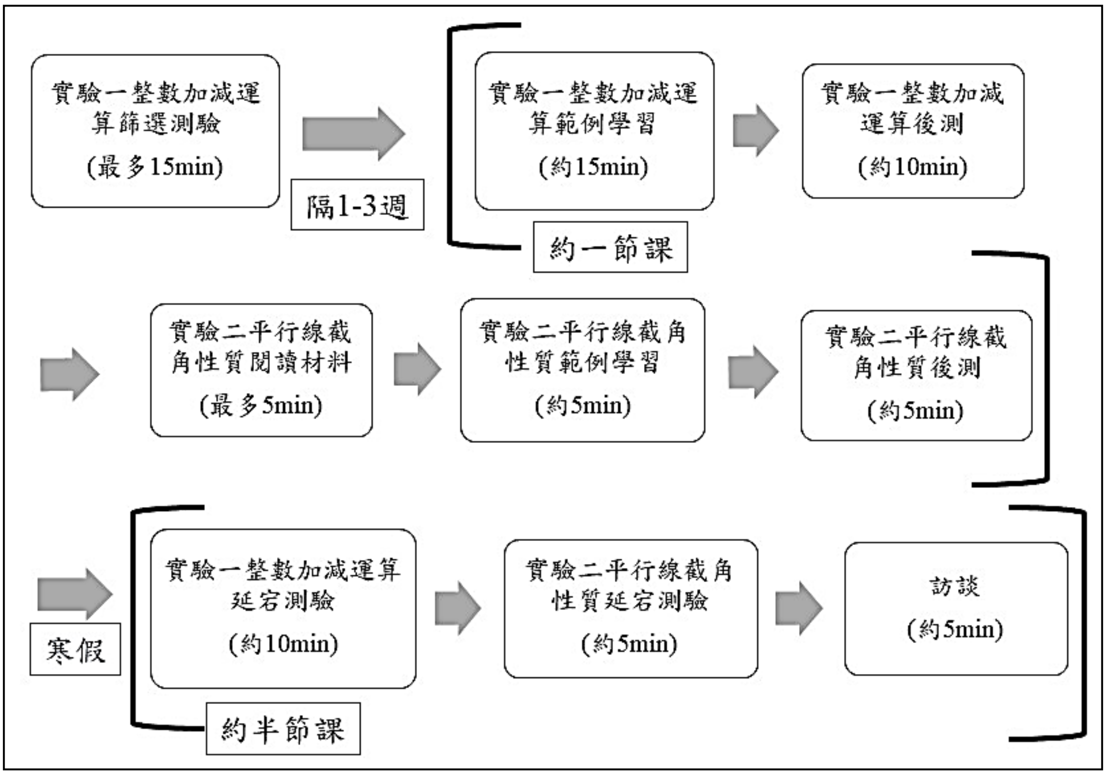


圖 9 實驗程序圖

參、結果

表 3 為實驗一描述統計。學習時間為四組範例加練習的時間，以秒為單位。答對率包括前測、後測與延宕測驗，分為近遷移題與遠遷移題兩類答對率，分別為答對題數除以該類的總題數而得，例如：某位學生在後測近遷移題答對 10 題，後測近遷移題為 14 題，則近遷移題答對率為 10÷14。認知負荷僅在後測與延宕測驗有收集，亦分為近遷移與遠遷移兩個分數，分別平均了六題與四題之五點量表的分數而得。

表 3
整數加減運算描述性統計摘要表

	控制組（28 人）		實驗組（24 人）		整體	
	平均數	標準差	平均數	標準差	平均數	標準差
學習時間（秒）	721.82	265.95	705.92	127.31	714.48	211.70
答對率						
前測近遷移	.59	.24	.56	.22	.58	.23
後測近遷移	.82	.16	.79	.13	.80	.14
延宕近遷移	.76	.20	.82	.16	.79	.18
前測遠遷移	.43	.30	.52	.32	.47	.31
後測遠遷移	.56	.32	.68	.22	.62	.28
延宕遠遷移	.69	.33	.81	.21	.75	.28
認知負荷						
後測近遷移	2.11	0.78	2.15	0.65	2.13	0.71
延宕近遷移	2.35	1.28	1.94	0.80	2.16	1.09
後測遠遷移	2.68	0.78	2.76	0.79	2.72	0.78
延宕遠遷移	2.46	0.96	2.38	1.06	2.42	0.99

針對兩組的學習時間進行單因子 ANOVA，結果顯示兩組並無顯著差異 $F(1, 50) = 0.07$，$p > .05$。考驗實驗一的答對率之前，因後測與延宕測驗的 20 題中，前 10 題僅要求受試者回答問題的答案，而後 10 題除了答題外還須評估難度，為了確認添加認知負荷的評估是否影響受試者在前後 10 題的答對率，故採用組別（2）×前後 10 題（2）的二因子 ANOVA。結果顯示，後測答對率在交互作用 $F(1, 50) = 0.00$、組別的主要效果 $F(1, 50) = 0.73$、前後 10 題主要效果 $F(1, 50) = 0.45$，皆無顯著差異（$ps > .05$）；延宕測驗答對率亦同，在交互作用 $F(1, 50) = 0.06$、組別的主要效果 $F(1, 50) = 2.16$、前後 10 題主要效果 $F(1, 50) = 1.46$，亦皆無顯著差異（$ps > .05$），表示後測與延宕測驗答對率不因有無評估認知負荷而不同，故後續採用整併前後 10 題所得的答對率進行分析。

再就近與遠遷移題的答對率分別進行組別（2）×前、後、延宕測驗別（3）的二因子 ANOVA，結果近遷移的答對率，顯示交互作用 $F(2, 100) = 1.59$ 以及組別的主要效果 $F(2, 100) = 0.00$ 均無顯著差異（$ps > .05$），但測驗別主要效果達顯著差異，$F(2, 100) = 36.02$，$p < .001$，$\eta^2 = .42$，經事後比較發現，後測近遷移答對率.80 顯著高於前測.58，延宕測驗近遷移答對率.79 亦顯著高於前測.58（$ps < .001$），但後測與延宕測驗近遷移並無顯著差異，$p > .05$。在遠遷移的答對率部分，交互作用 $F(2, 100) = 0.03$ 以及組別的主要效果 $F(2, 100) = 2.77$ 均無顯著差異（$ps > .05$），但測驗別主要效果達顯著差異 $F(2, 100) = 24.03$，$p < .001$，$\eta^2 = .33$，經事後比較後發現，後測遠遷移答對率.62 顯著高於前測.47，延宕測驗遠遷移答對率.75 亦顯著高於前測.47 與後測.62（$ps < .001$）。

針對近與遠遷移題的認知負荷分別進行組別（2）×測驗別（2）的二因子 ANOVA，結果在近遷移的認知負荷均無顯著差異，包括交互作用 $F(1, 50) = 2.81$、組別的主要效果 $F(1, 50) = 0.74$，以及測驗別的主要效果 $F(1, 50) = 0.01$（$ps > .05$）；遠遷移的認知負荷部分，交互作用 $F(1, 50) = 0.39$ 以及組別的主要效果 $F(1, 50) = 0.00$ 均無顯著差異（$ps > .05$），但後測認知負荷 2.72 顯著高於延宕測驗 2.42，$F(1, 50) = 5.44$，$p = .02$，$\eta^2 = .10$。

因兩組未有實驗效果，故再針對前測、後測與延宕測驗 10 種題型的答對率與認知負荷針對組別進行獨立樣本 t 考驗，結果發現，僅在延宕測驗中有四種題型答對率達顯著差異，其中三種題型是實驗組大於控制組。正－負，實驗組.88 大於控制組.68，$t(51) = 2.18$，$p = .04$，$d = .57$；負－負＝負，實驗組.92 大於控制組.59，$t(51) = 3.96$，$p < .001$，$d = .94$；負－負＝正，實驗組.92 大於控制組.68，$t(51) = 2.62$，$p = .01$，$d = .67$；負＋正＝正，實驗組.67 小於控制組.89，$t(51) = -2.64$，$p = .01$，$d = -.69$。

表 4 為實驗二的描述統計。學習時間為學習範例加上練習的時間，以秒為單位。答對率包括後測與延宕測驗，分為近遷移題與遠遷移題兩類答對率，分別為答對題數除以該類的總題數而得。認知負荷在後測與延宕測驗皆有收集，亦分為近遷移與遠遷移兩個分數，分別平均了兩題與四題之五點量表的分數而得。

表 4
平行線截角性質的描述性統計摘要表

	控制組（28 人）		實驗組（23 人）		整體	
	平均數	標準差	平均數	標準差	平均數	標準差
學習時間（秒）	199.79	34.30	245.22	46.97	220.27	46.12
答對率						
後測近遷移	.59	.33	.63	.31	.61	.32
延宕近遷移	.86	.23	.78	.29	.82	.26
後測遠遷移	.32	.30	.62	.40	.46	.38
延宕遠遷移	.39	.40	.38	.42	.39	.40
認知負荷						
後測近遷移	2.36	1.01	2.37	0.87	2.36	0.94
延宕近遷移	2.41	0.81	2.28	1.19	2.35	0.99
後測遠遷移	2.97	0.95	3.07	0.92	3.01	0.93
延宕遠遷移	2.54	0.80	2.61	1.11	2.57	0.94

針對兩組的學習時間進行單因子 ANOVA，結果顯示實驗組的學習時間 245.22 秒顯著長於控制組 199.79 秒，$F(1, 49) = 15.90$，$p < .001$，$d = 0.99$。接著對實驗二近與遠遷移題的答對率分別進行二因子 ANOVA。結果近遷移的答對率顯示，交互作用 $F(1, 49) = 1.39$、組別的主要效果 $F(1, 49) = 0.06$ 皆無顯著差異（$ps > .05$），但後測答對率 0.61 顯著低於延宕測驗 0.82，$F(1, 49) = 18.32$，$p < .001$，$\eta^2 = .27$。遠遷移的答對率部分，交互作用達顯著差異 $F(1, 49) = 4.53$，$p = .04$，$\eta^2 = .09$，而實驗組答對率.50 邊緣顯著高於控制組的.36，$F(1, 49) = 3.35$，$p = .07$，$\eta^2 = .06$，但測驗別無顯著差異，$F(1, 49) = 1.32$（$ps > .05$）。因交互作用顯著，故進行單純主要效果考驗：後測遠遷移題中實驗組 0.62 顯著高於控制組 0.32，$F(1, 49) = 9.22$，$p = .004$，$\eta^2 = .16$，但在延宕測驗上兩組未有顯著差異 $F(1, 49) = 0.01$，$p > .05$；測驗別效果在實驗組 $F(1, 22) = 1.97$ 與控制組 $F(1, 27) = 0.41$ 上皆無顯著差異，$ps > .05$。

再以組別（2）×測驗別（2）對近與遠遷移題認知負荷分別進行二因子 ANOVA。結果近遷移的認知負荷顯示交互作用 $F(1, 49) = 0.31$、組別的主要效果 $F(1, 49) = 0.06$，以及測驗別的主要效果 $F(1, 49) = 0.02$，皆無顯著差異（$ps > .05$）。遠遷移的認知負荷部分，在交互作用 $F(1, 49) = 0.01$ 以及組別的主要效果 $F(1, 49) = 0.13$ 皆無顯著差異（$ps > .05$），但遠遷移的後測認知負荷 3.01 顯著高於延宕測驗 2.58，$F(1, 49) = 12.09$，$p = .001$，$\eta^2 = .20$。

實驗一的行為觀察顯示，大部分的實驗組受試者皆可隨著步驟進行手勢並完成範例，少部分會在一開始看到範例時表示他們本來就會算，但在研究者的鼓勵下還是配合學完範例方法。而後測的行為大略可分為兩種情形：一是，看到題目馬上講出正確答案，因程序要求，主試者會請實驗組受試者做出手勢，通常他們都能正確操作手勢；二是，看了題目後會操作範例的手勢，正確的手勢伴隨著正確解題，錯誤的手勢則得到錯誤的答案。常見的錯誤像是在操作的過程中，看到加／減數的性質符號時無法分清楚食指須往前還是往後。延宕測驗時，第一種情形

的受試者人數有明顯增加，第二類的情況則明顯變少。實驗一的控制組因被限制手部的動作，故無明顯可見的行為。

實驗一訪談的結果與卡方考驗見表 5，僅第二題達顯著；實驗組能以延宕測驗的第一題為例，回憶出範例方法的比率（21/24）遠高於控制組（8/28），$\chi^2(1) = 18.19$，$p < .001$，$\phi = 0.59$。其餘，受試者在平常是否有使用範例方法做整數加減運算，是否喜歡範例方法、認為此方法對其有幫助，皆與組別無顯著關聯，$\chi^2(1) = 0.73$、$\chi^2(1) = 0.03$、$\chi^2(1) = 0.08$，ps > .05。

表 5
延宕測驗的行為觀察與訪談結果

	控制組（%）	實驗組（%）	χ^2
實驗一整數加減運算			
1. 平常做整數加減的題目時，有使用範例方法的比例	53.57	41.67	0.73
2. 能正確使用範例方法做延宕測驗問題一的比例	28.57	87.50	18.19***
3. 喜歡範例方法的比例	92.86	91.67	0.03
4. 認為範例方法有幫助的比例	89.29	91.67	0.08
實驗二平行線截角性質			
1. 作答延宕測驗時有針對幾何圖做物理操弄的比例	32.14	73.91	8.82**
2. 能正確說出延宕測驗問題 1 解題歷程的比例	10.71	8.70	0.06

** $p < .01$. *** $p < .001$

實驗二的行為觀察顯示，大部分實驗組受試者在學習階段皆能理解步驟並對目標進行描摹，少部分受試者須經提醒才能在幾何圖形上尋到目標物件進行描摹。後測時，實驗組大部分的人皆有描摹動作，但控制組也有人會對試題紙上的幾何圖做一些動作以幫助解題，例如將測驗紙從桌面拿起以觀察幾何圖形，或者轉動紙張。故在延宕測驗時，主試記錄受試者的這類動作，並對組別進行卡方考驗。結果顯示實驗組操弄圖形的比率高於控制組，$\chi^2(1) = 8.82$，$p = .003$，$\phi = 0.42$；23 位實驗組有 17 位受試者針對幾何圖做物理操作，其中有 8 位受試者有描摹幾何圖形；28 位控制組則僅有 9 位受試者操弄幾何圖形，皆無描摹的動作。顯示實驗組在延宕測驗時，不只比控制組更會物理操作幾何圖，而且部分受試者出現控制組不會有的描摹行為。然而，實驗組有描摹的 8 位受試者的答對率（近遷移.81、遠遷移.38）與認知負荷（近遷移 2.75、遠遷移 3.13），與控制組相比並未較佳，而搭配訪談資料也發現，針對受試者能否正確說明延宕測驗的第一題解題歷程的人數進行考驗，與組別也未顯示有關聯，$\chi^2(1) = 0.06$，$p > .05$。

肆、討論與建議

實驗一整數加減運算在學習時間、答對率，以及認知負荷都沒有組別效果，雖然延宕測驗逐題比較有四題顯示組間差異，但優劣的方向性不一致，顯示體現認知效果不彰。在測驗別方

面，兩組受試者在遠遷移延宕測驗的認知負荷相較於後測顯著下降，而後測及延宕測驗的答對率相對於前測皆有提升，可能代表兩組受試者都接受的數線與兔子的範例學習是有效的，或者可能此一範例學習搭配著學生在數學學習過程持續使用到整數加減運算，而有利於增進學習成效。實驗一的行為觀察顯示，學習階段有部分受試者認為自己已精熟整數加減運算題型，而對學習範例的動機較弱，一旦研究者發現受試者未依照指導語或範例步驟時皆會鼓勵受試者配合完成實驗，但研究者認為此心態仍影響一些學習效果，連帶地影響後測時答題表現。延宕測驗觀察到控制組與部份實驗組受試者發生錯誤時，大多未使用手勢解題，亦即其錯誤是心算失誤所造成的。訪談資料中，許多受試者皆表示平常考試題目較複雜，沒時間使用範例的方法，但也有受試者表示經歷本實驗教學後，看到相關題目會想到和使用這套數線與兔子的整數加減運算法，但到七年級下學期的現在已經完全不用想了，可見有些受試者對於運算已自動化時就不需要方法的輔助，但在運算能力不穩固時，數線與兔子的輔助可能有其助益。

實驗一在各變項與訪談均無組別差異，未發揮運用手勢的體現效果，推測原因有三：第一、手勢介入的設計較複雜，部分受試者對左右手與加減、前後移動與正負號的連結產生混淆，代表手勢的設計不夠直觀。運算符號為加號時須採左手、為減號時須採右手，隨後若加／減數為正號時手指往前移動、負號時手指往後移動才能算出正確答案，食指該往何方向移動往往成為學生的困難點。而實驗組實驗時手指上貼有加減號的貼紙來幫助學生判斷使用哪一隻手，但學生只能生硬地記下這些步驟性的動作，因此降低其意願和學習成效。第二、因受試者為低能力的學生，研究者猜測其學習能力、動機和後設認知較弱，導致手勢操作效果差，且對題目可能無法有精準的難度感受，進而影響兩組在認知負荷的評估。第三、因整數加減是受試者學習過的教材，所以部分受試者會傾向以自己習慣的方式來解題，如同文獻中 Sweller 等人（2003）所提，實驗所教的方法可能因此被視為冗餘資訊，也可能與舊經驗混淆，進而弱化體現的效果。

實驗二平行線截角性質在學習時間與後測遠遷移答對率上，實驗組皆顯著高於控制組，顯示實驗組在學習時需要找到指定描摹的目標線段或角度進行描摹，花費的時間比控制組長，而其後測遠遷移答對率也顯示了描摹對學習產生正向助益，與 Hu 等人（2015）的結果一致，顯示描摹可能讓特定解題步驟相關的圖形從複雜的背景中被凸顯出來，進而更容易掌握對應的幾何原則，例如同側內角互補。但本研究後測兩組的認知負荷無差異，和 Hu 等人（2015）發現實驗組認知負荷低於控制組的結果不一致，研究者認為主要是受試者特性的差異所致，因受試者為低能力的學生，猜測其後設認知能力較弱，以致於對題目難度的敏感度較差。

本研究實驗二相較於 Hu 等人（2015）、Ginns 等人（2016）的優點是，在間隔了三到四個月之後進行延宕測驗，能探討體現認知的保留性。兩組在延宕測驗的答對率及認知負荷上都無差異，可能原因除了上段所述的受試者能力與學習動機等特性之外，另一可能性是受試者已忘了學過的角度性質，而這也反應在實驗二的訪談資料上：僅有 5 人能答出延宕測驗問題 1 的完整推論歷程。可見不論有無手勢參與，一節課的範例學習無法讓大部分的學生保留平行線截角性

質的知識。但研究者在延宕測驗行為觀察發現：實驗組雖然不一定會在解題時描摹圖形，但相較於控制組更願意對幾何圖做物理操作，然而實驗組有描摹的 8 位受試者的表現，與全未描摹的控制組相比並未較佳。此結果顯示，雖然實驗組在學習階段對指定線段與角度依序描摹，能在後測有效幫助推理角度、強化所學的原理，但隔了幾個月之後，截角性質的相關知識已遺忘，此時即使描摹圖形，也未必能由幾何原理引導描摹的順序進而幫助解題，這也呼應了前述文獻所提到的：體現的動作要配合著認知歷程時才能促進學習（Mavilidi et al., 2018）。

實驗二在近遷移答對率上後測顯著低於延宕測驗，研究者猜測是因為兩題近遷移題為肉眼可判斷出角度大小的題目，且比起後測的時候，受試者在生活中又練習了許多題目，讀題與解題能力有些許提升，使其能更容易答對較為簡單、直觀的題目，而在角度接近直角、無法直觀判斷答案的遠遷移題上，對於遺忘範例學習內容的受試者便造成答對率後測與延宕測驗無差異的結果。

綜合實驗一、二而言，以描摹圖形的手勢學習幾何教材，即使是低能力學生也與文獻（Du & Zhang, 2019; Ginns et al., 2016; Hu et al., 2015; Yeo & Tzeng, 2020）一樣有助益，老師只要以口語提醒學生描摹和原理關聯的幾何物件，就能提升學習效果，這是非常低廉有效的教學策略。但對於非幾何教材的整數加減則需要更合適的手勢設計。如同 Bossé 等人（2016）提醒的，手勢需要與概念理解產生直觀性的連結。本研究實驗一在受試者左、右手貼上加、減號，使其依據範例指示用左、右手操作加、減法運算，但未能提出有助於學生理解道理的解釋，可能造成學生硬背此一對應關係或者抗拒此種操作方式。未來設計數與計算相關的體現操作時，宜留意手勢是否易於和概念連結。也可嘗試在學生還未學過整數加減運算前便用實驗一範例方法進行教學，或是在學校教過整數加減後以配合學生學習數線或抵消模式設計出適合的手勢，研究者皆認為能夠提升體現認知在整數加減運算的學習效果。

研究者從文獻與本文兩個實驗的研究結果，整理出底下三類特性（空間性、方向性、操作性）之數學教材，應可透過手勢或身體的參與提升學習效益。

具空間性的數學教材：在眾多研究中，多篇關於幾何教材的實徵研究皆指出學習者描摹圖形能夠幫助其對圖像空間的理解（Du & Zhang, 2019; Ginns et al., 2016; Hu et al., 2015; Yeo & Tzeng, 2020）。本研究也因實驗二實驗組受試者的表現成果，建議教育工作者在學生學習如三角形性質、角度性質等空間幾何教材的教學時，能給予學生使用手指描摹圖像的機會。類似的教材還有如統計圖表的判讀，也建議教育工作者能邊帶領學生描摹、圈選橫軸與縱軸的項目邊說明圖表的意義，來強化紙本圖表在其心中所成的平面心像。

具方向性的數學教材：Wilson（2002）已指出體現認知與方向性有關。而在本研究的實驗一，研究者也以手指作為方向性的身體表徵來設計教材。在數學教育的運用上，研究者因平面直角座標的函數圖形具方向性，建議教育工作者在教導函數圖時，能讓學生描摹函數圖形、線條的方向或是二次函數的開口方向等等，以將學生的方向感與身體做連結來幫助其學習。

具操作性的數學教材：教具的操作（manipulation）對數學學習的重要性毋庸置疑。雖然本研究不涉及操作教具的體現認知效果，但文獻與教學實務顯示，教具不僅具體化了抽象的數學概念，同時操作能讓身體的感官及教具的互動經驗形成認知（de Koning & Tabbers, 2011; Pouw et al., 2014）。數與計算、幾何物件的製作或堆疊、分類與統計，甚至未知數的表徵或運算，數學四大主題都有非常多樣的教具被研發出來，也實際被應用在幼教、國小與中學。

即使以體現認知來設計什麼樣的教材才會具有學習效益仍有所爭議（Ginns et al., 2016; Yeo & Tzeng, 2020），但手勢操弄教材可以提升注意力來促進學習效果應無疑義（Cosman & Vecera, 2010）。故建議教育工作者能在日常的教學中將板書與投影片融入手勢，或是在學生閱讀時養成描摹所看到字句的習慣，以使學生注意板書、投影片或是閱讀教材的內容，並讓體現認知落實於學生日常的學習。

伍、研究限制與未來研究

本文的研究限制至少包括四點。首先是受試者的動機與專注力。第一作者擔任主試負責教學介入，因教學經驗不足，也不具學校教師身分的強制力，無法在短時間內引起受試者動機使他們投入學習。若實驗時間能加長，讓主試者與受試者建立關係，以提升受試者學習動機，方能更公允地評估體現認知的效果。

再者，根據內在效度威脅－成熟的效果，本篇研究的每位受試者在團體前測與個別後測之間的時間有些差異，若是兩測驗間隔時間較長的受試者，在前測的能力會隨著學校的課程推進而有所變動，無法保證部分的受試者後測的能力真的來自實驗效果。

第三，因合作學校提供的時間過短，所以在練習題的安排上不多，導致實驗效果有限，也未能收集受試者更多個人資料。或許未來擁有較充裕的介入時間後，可讓受試者有充分時間與練習題量，並探討如工作記憶、後設認知能力，或閱讀能力等是否會是體現認知效果的調節變項。

最後，是受試者取樣限制。因本篇研究的受試者分為兩組後每組有效受試者不滿 30 人，恐導致統計考驗力較小，且樣本皆來自於北部學校使推論範圍有限。在受試者能力上亦有少部分受試者在前測時的表現剛好是進入實驗的最低門檻，也就是說他們已能正確掌握實驗一的部分題型，而降低實驗成效。未來的研究宜在取樣上增加樣本的地區分布與人數，並提高篩選受試者的標準。

未來研究部分除了持續檢驗延宕效果之外，還可以針對不同受試者變項，以及學習材料的特性進行探討。另外，本研究對學過與沒學過的教材並未獨立操弄，而與非幾何與幾何教材混在一起進行，未來可以做單獨探討體現認知在學過或未學過的教材上的效果。

誌謝

本文改寫自連宥鈞在吳昭容指導下完成的碩士論文，感謝教育部高等教育深耕計畫下特色領域研究中心計畫之臺灣師範大學「學習科學跨國頂尖研究中心」，以及科技部「以眼動探討幾何閱讀歷程與發展閱讀技巧教學」（MOST 108-2511-H-003 -014 -MY3）的經費補助。

參考文獻

Alibali, M. W., & Nathan, M. J. (2012). Embodiment in mathematics teaching and learning: Evidence from learners' and teachers' gestures. *Journal of the Learning Sciences*, *21*(2), 247–286. doi: 10.1080/10508406.2011.611446

Atkinson, R. K., Derry, S. J., Renkl, A., & Wortham, D. (2000). Learning from examples: Instructional principles from the worked examples research. *Review of Educational Research, 70*(2), 181–214. doi: 10.3102/00346543070002181

Bossé, M. J., Lynch-Davis, K., Adu-Gyamfi, K., & Chandler, K. (2016). Using integer manipulatives: Representational determinism. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*, *17*(3), 1–20.

Cosman, J. D., & Vecera, S. P. (2010). Attention affects visual perceptual processing near the hand. *Psychological Science*, *21*(9), 1254–1258. doi: 10.1177/0956797610380697

de Koning, B. B., & Tabbers, H. K. (2011). Facilitating understanding of movements in dynamic visualizations: An embodied perspective. *Educational Psychology Review*, *23*(4), 501–521. doi: 10.1007/s10648-011-9173-8

Du, X., & Zhang, Q. (2019). Tracing worked examples: Effects on learning in geometry. *Educational Psychology, 39*(2), 169–187. doi: 10.1080/01443410.2018.1536256

Fischer, M. H., & Brugger, P. (2011). When digits help digits: Spatial–numerical associations point to finger counting as prime example of embodied cognition. *Frontiers in Psychology*, *2*, 260. doi: 10.3389/fpsyg.2011.00260

Fuadiah, N. F., & Suryadi, D. (2017). Some difficulties in understanding negative numbers faced by students: A qualitative study applied at secondary schools in Indonesia. *International Education Studies*, *10*(1), 24–38. doi: 10.5539/ies.v10n1p24

Ginns, P., Hu, F. T., Byrne, E., & Bobis, J. (2016). Learning by tracing worked examples. *Applied Cognitive Psychology, 30*(2), 160–169. doi: 10.1002/acp.3171

Goldin-Meadow, S., Cook, S. W., & Mitchell, Z. A. (2009). Gesturing gives children new ideas about math. *Psychological Science*, *20*(3), 267–272. doi: 10.1111/j.1467-9280.2009.02297.x

Goldin-Meadow, S., Nusbaum, H., Kelly, S. D., & Wagner, S. (2001). Explaining math: Gesturing lightens the load. *Psychological Science, 12*(6), 516–522. doi: 10.1111/1467-9280.00395

Hall, R., & Nemirovsky, R. (2012). Introduction to the special issue: Modalities of body engagement in mathematical activity and learning. *Journal of the Learning Sciences*, *21*(2), 207–215. doi: 10.1080/10508406.2011.611447

Hativa, N., & Cohen, D. (1995). Self learning of negative number concepts by lower division elementary students through solving computer-provided numerical problems. *Educational Studies in Mathematics, 28*(4), 401–431. doi: 10.1007/BF01274081

Hu, F. T., Ginns, P., & Bobis, J. (2015). Getting the point: Tracing worked examples enhances learning. *Learning and Instruction, 35*, 85–93. doi: 10.1016/j.learninstruc.2014.10.002

Kalyuga, S. (2009). Instructional designs for the development of transferable knowledge and skills: A cognitive load perspective. *Computers in Human Behavior*, *25*(2), 332–338. doi: 10.1016/j.chb.2008.12.019

Macken, L., & Ginns, P. (2014). Pointing and tracing gestures may enhance anatomy and physiology learning. *Medical Teacher*, *36*(7), 596–601. doi: 10.3109/0142159X.2014.899684

Mavilidi, M. F., Okely, A., Chandler, P., Domazet, S. L., & Paas, F. (2018). Immediate and delayed effects of integrating physical activity into preschool children's learning of numeracy skills. *Journal of Experimental Child Psychology*, *166*, 502–519. doi: 10.1016/j.jecp.2017.09.009

Moeller, K., Martignon, L., Wessolowski, S., Engel, J., & Nuerk, H. C. (2011). Effects of finger counting on numerical development– The opposing views of neurocognition and mathematics education. *Frontiers in Psychology*, *2*, 328. doi: 10.3389/fpsyg.2011.00328

Moreno, R., & Mayer, R. E. (1999). Multimedia-supported metaphors for meaning making in mathematics. *Cognition and Instruction*, *17*(3), 215–248. doi: 10.1207/S1532690XCI1703_1

Pouw, W. T., Van Gog, T., & Paas, F. (2014). An embedded and embodied cognition review of instructional manipulatives. *Educational Psychology Review, 26*(1), 51–72. doi: 10.1007/s10648-014-9255-5

Retnowati, E., Ayres, P., & Sweller, J. (2010). Worked example effects in individual and group work settings. *Educational Psychology, 30*(3), 349–367. doi: 10.1080/01443411003659960

Richland, L. E., Stigler, J. W., & Holyoak, K. J. (2012). Teaching the conceptual structure of mathematics. *Educational Psychologist*, *47*(3), 189–203. doi: 10.1080/00461520.2012.667065

Risko, E. F., & Gilbert, S. J. (2016). Cognitive Offloading. *Trends in Cognitive Sciences*, *20*(9), 676–688. doi: 10.1016/j.tics.2016.07.002

Schwonke, R., Renkl, A., Krieg, C., Wittwer, J., Aleven, V., & Salden, R. (2009). The worked-example effect: Not an artefact of lousy control conditions. *Computers in Human Behavior, 25*(2), 258–266. doi: 10.1016/j.chb.2008.12.011

Schwonke, R., Renkl, A., Salden, R., & Aleven, V. (2011). Effects of different ratios of worked solution steps and problem solving opportunities on cognitive load and learning outcomes. *Computers in Human Behavior, 27*(1), 58–62. doi: 10.1016/j.chb.2010.03.037

Sweller, J. (2006). The worked example effect and human cognition. *Learning and Instruction, 16*(2), 165–169. doi: 10.1016/j.learninstruc.2006.02.005

Sweller, J., & Cooper, G. A. (1985). The use of worked examples as a substitute for problem solving in learning algebra. *Cognition and Instruction*, *2*(1), 59–89. doi: 10.1207/s1532690xci0201_3

Sweller, J., Ayres, P. L., Kalyuga, S., & Chandler, P. (2003). The expertise reversal effect. *Educational Psychology, 38*(1), 23–31. doi: 10.1207/S15326985EP3801_4

Sweller, J., van Merriënboer, J. J., & Paas, F. (2019). Cognitive architecture and instructional design: 20 years later. *Educational Psychology Rev*iew, 3*1*(2), 261–292. doi: 10.1007/s10648-019-09465-5

Tang, M., Ginns, P., & Jacobson, M. J. (2019). Tracing enhances recall and transfer of knowledge of the water cycle. *Educational Psychology Review*, *31*(2), 439–455. doi: 10.1007/s10648-019-09466-4

Van Gog, T., Paas, F., & Van Merriënboer, J. J. (2004). Process-oriented worked examples: Improving transfer performance through enhanced understanding. *Instructional Science*, *32*, 83–98. doi: 10.1023/B:TRUC.0000021810.70784.b0

Wilson, M. (2002). Six views of embodied cognition. *Psychonomic Bulletin and Review*, *9*(4), 625–636. doi: 10.3758/BF03196322

Yeo, L. M., & Tzeng, Y. T. (2020). Cognitive effect of tracing gesture in the learning from mathematics worked examples. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *18*(4), 733–751. doi: 10.1007/s10763-019-09987-y

《臺灣數學教育期刊》稿約

2013.04.03 編審委員會會議通過

2013.09.27 編審委員會會議修訂通過

2014.09.04 編審委員會會議修訂通過

2017.03.17 編審委員會會議修訂通過

壹、《臺灣數學教育期刊》(Taiwan Journal of Mathematics Education)(以下簡稱本刊)是國立臺灣師範大學數學系及台灣數學教育學會共同發行之期刊，內容以出版數學教育領域相關議題的原創性論文為宗旨。本刊徵求符合宗旨的文稿，且以實徵性研究成果為主，回顧性論文需能整合相關之實徵研究，提出批判性或創發思考的評析。

貳、本刊每年發行兩期，分別於四月、十月出刊，並採電子方式發行。全年徵稿，隨到隨審。

參、本刊所刊之文稿須為原創性的學術論文之文稿，即未曾投遞或以全論文形式刊登於其他期刊、研討會彙編或書籍。若文稿在送審後自行撤稿，或出現一稿多投、修正稿回覆逾期、侵犯著作權等違反學術倫理等情況，將依下列規則處理：

一、來稿一經送審，不得撤稿。因特殊理由而提出撤稿申請者，案送主編決定；非特殊理由而自行撤稿者，一年內將不再接受該作者的投稿。

二、若文稿被發現一稿多投、侵犯著作權或違反學術倫理等情況，除文稿隨即被拒絕刊登外，一切責任由作者自負，且本刊於三年內不接受該作者來稿，並視情節嚴重程度求償。

三、作者應於發出文稿修正通知的三週內回傳修正稿及修正回覆說明書，逾期視同撤稿。若有特殊情況請先與本刊聯絡。

肆、未經本刊同意，已發表之文章不得再於他處發表。投遞本刊之學術論文須經編審委員會送請專家學者審查通過後予以刊登，被刊登文章之著作財產權歸國立臺灣師範大學數學系及台灣數學教育學會共同擁有，文責由作者自負。投稿至《臺灣數學教育期刊》之文章，若經編輯委員推薦且經作者同意，可轉稿至《臺灣數學教師》。

伍、文稿經初審結果為修訂後再審時，本期刊責任編輯將協助引導作者進行文稿修訂。

陸、文稿可以中文或英文撰寫，中文稿件字數以20,000字(英文10,000字)為上限(包含論文全文、中英文摘要、圖表、附註、參考文獻、附錄等)，特殊邀稿不在此限。文稿請使用Microsoft Word 98以上之繁體中文文書軟體處理，中英文稿均請用單行間距之12級字新細明體或Times New Roman字體，以橫書方式於A4規格紙張上，文

稿上下左右各留2.5公分空白。

柒、中文文稿格式請參考本期刊論文撰寫體例的說明或已發行之文稿，若為英文撰寫之文稿、引用英文文獻以及數學符號、公式等請參考APA第六版出版手冊。投稿時應注意下列事項：

一、提交投稿基本資料表

(一) 文稿基本資料。

(二) 通訊作者之姓名、服務單位、職稱、通訊地址、聯絡電話和電子郵件地址。一位以上作者時，非通訊作者只需填寫姓名、服務單位和職稱。

(三) 任職機構及單位：請寫正式名稱，分別就每位作者寫明所屬系所或單位。

(四) 頁首短題（running head）：中文以不超過15個字、英文以不超過40個字元為原則。

(五) 作者註（author note）：說明與本篇研究相關的資訊。

二、提交已簽署的《臺灣數學教育期刊》著作財產權讓與同意書。

三、除文稿正文外，還需包含中英文摘要，相關規定如下：

(一)中文文稿的中文摘要在前，英文文稿則英文摘要在前。

(二)中文文稿之中文摘要頁內容包括論文題目（粗體20級字、置中）、摘要（不分段，限500字以內）及關鍵詞（以五個為上限，並依**筆畫**順序由少到多排列）；英文摘要頁內容包括 Title（bold, 20 pt, central）、Abstract（不分段，限300字以內）及 Keywords（字詞及順序須與中文關鍵詞相對應）。

(三)英文文稿之英文摘要頁內容包括 Title（bold, 20 pt, central），Abstract（不分段，限300字以內）及 Keywords（以五個為上限，並依**字母**順序排列）；中文摘要頁內容包括論文題目（粗體20級字、置中）、中文摘要（不分段，限500字以內）及中文關鍵詞（字詞及順序須與英文關鍵詞相對應）。

(四)內文格式詳見《臺灣數學教育期刊》論文撰寫體例。

四、若為修正稿，遞交修正的文稿（上述第三點之資料）上請以色字標示修改處，並需提交「修正回覆說明書」，依審查意見逐項說明修改內容或提出答辯。

捌、本刊審查流程分為預審與正式審查兩個階段：

一、預審：不符合本刊宗旨、品質要求，或撰寫體例者，逕行退稿或退回請作者修改後再上傳。

二、正式審查：為雙向匿名審查，除基本資料表外，不得出現作者姓名或任何足以辨識作者身份之資料，包括請先省略誌謝。匿名的參考格式為：

(一) 若本文引用作者已發表之文章，須以「（作者，西元年）」或“(Author, Year)”；若引用作者已發表之文章不只一篇，則以「（作者，西元年a）、（作者，西元年b）、……」或“(Author, Year a)、(Author, Year b) 、……”的中文作

者姓氏筆畫順序以及外文作者姓氏字母順序排列。

(二) 若在參考文獻中則以「作者（西元年），**期刊刊名**。」或「作者（西元年），**書名**。」、「作者（西元年）。編者，**書名**。」或“Author (Year). *Title of Periodical*.”表示。

引用文獻中包含一位以上的投稿文章作者，其所有著作皆須遵守上述規範。

範例1：「林妙鞠、楊德清（2011）。故事融入小一弱勢學生之補救教學研究。**台灣數學教師(電子)期刊**，**25**，1-16。」一文的作者欲引用該文，文中應以「（作者，西元年）」表示，參考文獻則以「作者（西元年）。**台灣數學教師(電子)期刊**。」表示。

範例2：「李源順（2009）。三階段輔導模式 - 以數學學習領域為例。收錄於鍾靜和楊志強（主編），**優質實習輔導教師的增知賦能**（pp.141-157）。臺北市：國立臺北教育大學。」一文的作者欲引用該文，文中應以「（作者，西元年）」表示，參考文獻則以「作者（西元年）。收錄於鍾靜和楊志強（主編），**優質實習輔導教師的增知賦能**。」

範例3：“Chang S. L., & Lin, F. L. (2006). Investigations into an elementary school teacher's strategies of advancing children’s mathematical thinking. *Taiwan Journal of Mathematics Teachers*. *5*, 21-34.”的作者應以“(Author, Year)”引用該文，參考文獻則以“Author (Year). *Taiwan Journal of Mathematics Teachers*.”表示。

玖、文稿以電子郵件方式投遞，包括作者基本資料表、著作財產權讓與同意書與全文共三份資料。作者應負論文排版完成後的校對之責，而被接受刊登的英文文稿，作者需自行負責檢查文稿中的用詞、語法、拼寫、含意和邏輯的正確性，並另提供中文參考文獻之英譯資料，編輯委員僅負責格式上之校對。

壹拾、 投稿電子郵箱：TJME.taiwan@gmail.com

《臺灣數學教育期刊》研究論文撰寫體例

2013.04.03 編審委員會會議通過

2013.09.27 編審委員會會議修訂通過

2014.09.04 編審委員會會議修訂通過

2017.03.17 編審委員會會議修訂通過

本期刊原則上依循美國心理學會（American Psychological Association）的撰寫格式，中文文稿請參考下面的說明或本刊已發表的文稿，若為英文撰寫之文稿、引用英文文獻以及數學符號、公式等請參考 APA 第六版出版手冊。文稿請使用 Microsoft Word 98 以上之繁體中文文書軟體處理。除另有規定外，中文字型一律採用新細明體，英文字型一律為 Times New Roman。

壹、 撰稿格式

一、投稿除需要附上作者基本資料表檔案外，中文稿件內容依序為中文摘要頁（含關鍵字）、英文摘要頁（含關鍵字）、正文（包括圖、表、附註、誌謝、參考文獻）以及附錄（若無必要可省略）；英文稿件之撰寫順序相同，唯中英文摘要頁位置對調。

二、稿件版面以單欄版面橫向印列的A4規格紙張，上下左右各留2.5公分空白，除基本資料表頁外每頁需加註頁碼。文稿字數（包含摘要、正文、圖表、附註、參考文獻、附錄等）中文以20,000字為上限，英文以10,000字為上限。

三、中文摘要頁內容包括論文題目（粗體20級字、置中）、摘要（不分段，限500字以內）、與關鍵字（以五個為上限，並依筆畫順序由少到多排列）。

四、英文摘要頁內容包括論文題目（bold, 20 pt, central），並附英文摘要（不分段，限300字以內）及英文關鍵字（字詞及順序須與中文關鍵字相對應）。

五、除各項標題、表之註記與另起一段之引文外，內文不分中英文均為12級字，單行行距。

六、除另有規定外，中文字型一律採用新細明體，標點符號及空白字為全形字；英文字型一律為Times New Roman。

三、本期刊為雙向匿名審查，除基本資料表外，不得出現作者姓名或任何足以辯識作者身份之資料。匿名的參考格式為：

(一) 若本文引用作者已發表之文章，須以「（作者，西元年）」或“(Author, Year)”；若引用作者已發表之文章不只一篇，則以「（作者，西元年a）、（作者，西元年b）、……」或“(Author, Year a)、(Author, Year b) 、……”的中文作者姓氏筆畫順序以及外文作者姓氏字母順序排列。

(二) 若在參考文獻中則以「作者（西元年），**期刊刊名**。」或「作者（西元年），**書名**。」、「作者（西元年）。編者，**書名**。」或“Author (Year). *Title of Periodical*.”

表示。

引用文獻中包含一位以上的投稿文章作者，其所有著作皆須遵守上述規範。

範例1：「林妙鞠、楊德清（2011）。故事融入小一弱勢學生之補救教學研究。**台灣數學教師(電子)期刊**，**25**，1-16。」一文的作者欲引用該文，文中應以「（作者，西元年）」表示，參考文獻則以「作者（西元年）。**台灣數學教師(電子)期刊**。」表示。

範例2：「李源順（2009）。三階段輔導模式 - 以數學學習領域為例。收錄於鍾靜和楊志強（主編），優質實習輔導教師的增知賦能（pp.141-157）。臺北市：國立臺北教育大學。」一文的作者欲引用該文，文中應以「（作者，西元年）」表示，參考文獻則以「作者（西元年）。收錄於鍾靜和楊志強（主編），優質實習輔導教師的增知賦能。」

範例3：“Chang S. L., & Lin, F. L. (2006). Investigations into an elementary school teacher's strategies of advancing children’s mathematical thinking. *Taiwan Journal of Mathematics Teachers*. *5*, 21-34.”的作者應以“(Author, Year)”引用該文，參考文獻則以“Author (Year). *Taiwan Journal of Mathematics Teachers*.”表示。

貳、正文

一、正文原則上包括「緒論」、「文獻探討」、「方法」、「結果」、「討論」與「參考文獻」等六部分，「緒論」含研究動機與目的、假設或研究問題等內容。前述格式為原則性規定，作者可依論文性質斟酌改變。

二、標題的層次、選用次序與字體為：

壹、16級字、粗體、置中

一、14級字、粗體、靠左對齊

(一)12級字、粗體、靠左對齊

1. 12級字、粗體、靠左對齊

(1)內縮1.5字元、12級字、粗體、靠左對齊

A.<u>內縮1.5字元、12級字、底線、靠左對齊</u>

1. 第一級標題為「緒論」、「文獻探討」、「方法」、「結果」、「討論」與「參考文獻」等，各層次標題選用次序為：壹、一、(一)、1、(1)、A 最多以六個層次為原則。
2. 第一、二、三、四、五層次標題請使用粗體。
3. 第一層次標題使用 16 級字，第二層次標題使用 14 級字，其餘 12 級字。
4. 第一層次標題置中，其餘靠左對齊。
5. 第一、二、三層次標題為單行間距，並與前後段距離均為 1 行；第四、五、六層次標題為 12 點最小行高，並與前後段距離均為 0.5 行。
6. 第五、六層次標題內縮 1.5 字元，而第六層次標題加上底線。
7. 標題請用字簡明，勿用句號或冒號。若逢頁尾最後一行，應移至次頁首行。

三、英文統計符號須用斜體字，例如*F*(1, 53) = 10.03, *t*, *F*, *M*, *SD*, *N*, *r*, *p*等。希臘字母則不要斜體，例如：α, β, ε, η。

四、資料分析結果的有效位數須全文一致。恆小於「1」的數值，例如*KR20*, α, *p*等統計數值的個位數字「0」請省略。

五、文獻資料的引用一律採取文內註釋。引用文獻時，必須有作者姓名（中文作者姓名全列，英文作者僅列姓氏）及論文年份（中文文獻及英文文獻均使用西元年份）。相同作者在同一段中重複被引用時，第一次須寫出年代，第二次以後，在不造成混淆的情況下年代可省略。若在不同段落中重複引用時，則仍須完整註明。本文中引用之文獻必須在參考文獻中列出。文獻引用格式於下：

1. 當作者為一人時，格式為作者（年代）或（作者，年代）、Author (Year)或(Author, Year)。
2. 當作者為二人時，每次引用均須列出全部作者，在行文中，以「與」連接；在括號和參考文獻中，中文以頓號「、」，西文以“&”連接。格式為作者 1 與作者 2（年代）或（作者 1、作者 2，年代）、Author 1 與 Author 2 (Year)或(Author 1 & Author 2, Year)。
3. 當作者為三至五人時，第一次引用時所有作者均須列出，第二次以後僅需寫出第一位作者並加「等」字或“et al.”。在同一段落中重複引用時，第一次須完整註明，第二次以後僅需寫出第一位作者再加「等」字或“et al.”，可省略年代。若在不同段落中重複引用，則僅需寫出第一位作者再加「等」字或“et al.”，但仍需註明年代。
4. 當作者為六人以上時，每次引用都只列第一位作者並加「等」字或“et al.”。
5. 當作者或作者之一為機構時，第一次引用應寫出機構全名，並以中括號註明慣用之簡稱，第二次之後即可使用簡稱替代，並依上述一至四點處理。例如：行政院國家科學委員會（國科會，2011）或（行政院國家科學委員會[國科會]，2011）、National Science Council (NSC, 2011)或(National Science Council [NSC], 2011)。

6. 當文獻為翻譯作品時，以原作者為主要作者，中文翻譯的文獻須註明原著出版年代，接續註明譯者姓名與譯本出版年代，作者與譯者之人數及其引用格式的規範與一般作者相同。英文翻譯文獻則僅須註明原著出版年代和譯本之出版年代，中間以斜線區隔，不須註明譯者姓名，作者人數及其引用格式的規範與一般作者相同。例如：Skemp (1987/1995)。
7. 當西文作者同姓時，須引用全名，且採「名在前姓在後」方式書寫。例如：A. J. Bishop (1985)和 E. Bishop (1970) 都認為……。
8. 在同一括號內同時引用多位作者的文獻時，依作者姓名筆畫（英文用字母）排序；若同時有中英文作者，則先列中文作者。不同作者之間用分號分開，相同作者不同年代之文獻用逗號隔開年代。
9. 在文章中引用同一作者在同一年的多篇著作時，應在年代後加註 a, b, c……以茲區別。
10. 當引用文獻需標出頁數時，西文單頁為“p.”、兩頁以上為“pp.”，中文則以「頁」表示。例如：（洪萬生，2006，頁 167）、(Dubinsky, 1991, p. 102)、(Heath, 1956, pp. 251-252)。
11. 當引用之觀念或陳述，來自第二手資料時，應將原始資料和第二手資料同時註明。在括號中首先列出原始作者與年代，接續中文以「引自」，西文以“as cited in”註明第二手資料之作者與年代，並說明出處頁碼。例如：（Garner, 1988，引自蘇宜芬、林清山，1992，頁 246）、Peirce (1968, as cited in Sáenz-Ludlow, 2002, p. 289)
12. 引文超過中文 80 字（西文 40 字），則須另起一段，並改為標楷體 10 級字，左右縮排 2 字元，與正文間前後空一行，且在引文前後無需用引號。例如：

Schoendfeld (1992, p.335) 有一段話可以用來討論：

> 數學從其創生之始就是一種社會活動，在此活動中一群訓練有素的實踐者（數學科學家）從事組型的科學──基於觀察、研究和實驗，有系統地試圖要決定一個公理化或理論化之系統中的規律的性質和原理（此為純數學），或者從實在世界物體中抽象出來之系統的模式（此為應用數學）。數學的工具是抽象、符號表徵、和符號操作。然而學會運用這些工具，其意義乃謂一個人以數學方式思考而非如一個工匠使用工具。以數學的方式思考就是：（1）形成數學觀點──珍視數學與抽象的歷程，並偏愛其應用，（2）發展此學科的工具的能力，並應用這些工具以協助我們理解結構──數學的建構意義（mathematical sense-making）。

六、圖與表格：

1. 圖下方應置中書明圖序及圖之標題；表格上方應置中書明表序及表名，圖表序號均使用阿拉伯數字，且圖表序與圖名之間空一個中文字（或 2 個英文字母）。各圖表之標題及說明宜精簡，但不宜精簡至看正文才能知此圖的訊息。
2. 表格之製作以簡明清楚、方便閱讀為原則，頂端與底端採用粗線(1.5pt)繪製，中間與兩邊不必畫線。表序須配合正文以阿拉伯數字加以編號，並書明表之標題。
3. 每一個圖表的大小以不超過一頁為原則，如超過時，須在續表之表序後加上（續）/ (continued)，但無須重現標題，如：表 1（續）或 Table 1 (continued).。
4. 圖與表格應配合正文出現，與前後段空一行間距。圖及表格內容若有解釋的必要，可作註記。註記與圖表之左邊界切齊，列在圖、表之下方，每註另起一行，按編號順序排列。

七、誌謝與附註：

1. 誌謝應力求簡短扼要，置於正文之後。誌謝二字為 16 級字、粗體、置中。誌謝文另行起、第一行內縮 2 字元、12 級字。
2. 附註應置於參考文獻之前，每項附註均另起一行，並以阿拉伯數字編號，依順序排列。

參、參考文獻

一、正文中引用過之文獻，必須全部列舉在參考文獻內，且不得列出未引用之文獻，接受刊登之論文，作者應另提供中文參考文獻之英譯資料。

二、每個作者第一行由第一格開始寫，第二行中文內縮三個字；英文內縮六個字母。中文參考文獻先寫作者姓名（年代），再用「。」接續「篇名」，「。」後再寫「期刊名稱」或「書名」以及「頁碼」。中文參考文獻「書名」或「期刊名及卷數」以粗體表示，其餘（含期數）維持標準樣式。英文參考文獻先寫作者姓名（年代），再用「.」接續「篇名」，「.」後再寫「期刊名稱」或「書名」以及「頁碼」。英文參考文獻「書名」或「期刊名及卷數」以斜體表示，其餘（含期數）維持標準樣式。即：

作者（年代）。文章篇名。**期刊刊名**粗體，**卷**粗體 (期若無則可省略)，xxx-xxx。

Author, A. A. (Year). Title of article. *Title of Periodical*斜體, *volume*斜體 (issue若無則可省略), xxx-xxx.

三、各種不同形式的中英文參考文獻的格式如下：

1. 期刊

中文格式：作者（年代）。文章篇名。**期刊刊名，卷** (期)，xxx-xxx。

英文格式：Author, A. A. (Year). Title of article. *Title of Periodical*, *volume*(issue), xxx-xxx.

2. 書籍

   中文格式：作者（年代）。**書名**（版次若有須註記）。出版地：出版者。

   英文格式：Author, A. A. (Year). *Title of book* (Edition). Location: Publisher.

3. 編輯著作：中文編輯著作以編者之姓名起始，其後以「編」、「編著」等標示其著作方式，以資區別。英文編輯著作以編者之姓氏起始，其後則為編者名字的縮寫，再加上“Ed.”、“Eds.”、或“Comp.”，以資區別其著作方式。

   中文格式：編者編（年代）。**書名**（冊次若無則可省略）。出版地：出版者。

   英文格式：Editor, A. A. (Ed.). (Year). *Title* (Volume若無則可省略). Location: Publisher.

4. 翻譯作品

   中文格式：原作者（譯本出版年）。**翻譯書名**（譯者譯）。出版地：出版者。（原作出版於xxxx年）

   英文格式：Author, A. A. (Year). *Title* (B. B. Translator, Trans.). Location: Publisher. (Original work published Year).

5. 書中的文章

   中文格式：作者（年代）。文章名稱。收錄於編著姓名（編著），**書名**（冊次若無則可省略，頁xx-xx）。出版地：出版者。

   英文格式：Author, A. A. (Year). Title of article. In B. B. Editor (Ed.), *Title of Book* (Edition若無則可省略, pp. xx-xx). Location: Publisher.

6. 研究計畫報告：若引述的報告是取自 ERIC (the Educational Resources Information Center)或 NTIS (the National Technical Information Service)，則在最後須以括號註明 ERIC 或 NTIS 的編號。

   中文格式：作者（年代）。**報告名稱**（報告編號若無則可省略）。出版地：出版者。

   英文格式：Author, A. A. (Year). *Title of report* (Report No.若無則可省略). Location: Publisher.

7. 研討會發表之論文（未出版）

   中文格式：作者（年，月）。**論文標題**。發表於會議名稱。會議地點：舉辦單位若無則可省略。

   英文格式：Author, A. A. (Year, month). *Title of paper*. Paper presented at the Title of the Symposium. Location, Country.

8. 未出版之學位論文

   中文格式：作者（年代）。**論文名稱**。未出版之博／碩士論文，學校暨研究所名稱，大學所在地。

   英文格式：Author, A. A. (Year). *Title of doctoral dissertation/master thesis*. Unpublished doctoral dissertation/master thesis, Name of

University, Location.

9. 網路資源

中文格式：作者若無則可省略（年月日若無則可省略）。**網頁標題**。檢自URL。

英文格式：Author, A. A. (Year, month day若無則可省略). *Title of webpage*. Retrieved from URL.

《臺灣數學教育期刊》投稿基本資料表

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">篇名</td><td colspan="4">(中文)</td></tr>
<tr><td colspan="4">(英文)</td></tr>
<tr><td colspan="2">總字數</td><td colspan="4">稿件全文（含中英文摘要、正文、參考文獻、附錄等）共＿＿＿＿＿字。</td></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">關鍵詞(最多五個)</td><td colspan="4">(中文)</td></tr>
<tr><td colspan="4">(英文)</td></tr>
<tr><td colspan="2">頁首短題
(running head)</td><td colspan="4">(請以不超過15個中文字或40個英文字元為原則。)</td></tr>
<tr><td rowspan="8">通訊作者資料</td><td>姓名</td><td colspan="2">(中文)</td><td colspan="2">(英文)</td></tr>
<tr><td>職稱</td><td colspan="4"></td></tr>
<tr><td rowspan="2">服務單位
(或就讀校系)</td><td colspan="4">(中文)</td></tr>
<tr><td colspan="4">(英文)</td></tr>
<tr><td>E-mail</td><td colspan="4"></td></tr>
<tr><td>通訊地址</td><td colspan="4"></td></tr>
<tr><td rowspan="2">電話</td><td colspan="4">辦公室：(　　)　　　　　　　　分機</td></tr>
<tr><td colspan="4">行動電話：</td></tr>
<tr><td colspan="6">如為共同著作，請詳填以下共同著作人欄位，非共同著作則不需填寫。(以下欄位不敷填寫時請自行增加)</td></tr>
<tr><td colspan="2">共同著作人</td><td>姓名</td><td colspan="2">服務單位(或就讀校系)</td><td>職稱</td></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">第一作者
（☐通訊作者）</td><td>(中文)</td><td colspan="2">(中文)</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>(英文)</td><td colspan="2">(英文)</td></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">第二作者
（☐通訊作者）</td><td>(中文)</td><td colspan="2">(中文)</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>(英文)</td><td colspan="2">(英文)</td></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">第三作者
（☐通訊作者）</td><td>(中文)</td><td colspan="2">(中文)</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>(英文)</td><td colspan="2">(英文)</td></tr>
<tr><td colspan="2">作者註
(可複選)</td><td colspan="4">☐ 本篇論文為碩、博士論文改寫，指導教授為＿＿＿＿＿＿＿。
☐ 本篇論文曾於＿＿＿＿＿＿＿發表。
☐ 本篇論文獲國科會補助，計劃編號：＿＿＿＿＿＿＿。</td></tr>
<tr><td colspan="6">1.茲保證本論文符合研究倫理。
2.茲保證所填基本資料正確，文稿未曾以任何方式出版或發行，且無一稿多投、違反學術倫理，或違反著作權相關法令等事情。
3.茲瞭解並同意貴刊著作權授權規範，並保證有權依此規範進行相關授權。
4.茲保證文稿已經所有作者同意投稿至《臺灣數學教育期刊》。
填表人：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　　　　　填表日期：＿＿＿年＿＿＿月＿＿＿日</td></tr>
</table>

《臺灣數學教育期刊》著作財產權讓與同意書

茲同意投稿至國立臺灣師範大學數學系與台灣數學教育學會共同發行的《臺灣數學教育期刊》之一文，名稱為：

____

立書人聲明及保證本著作為從未出版之原創性著作，所引用之文字、圖表及照片均符合著作權法及相關學術倫理規範，如果本著作之內容有使用他人以具有著作權之資料，皆已獲得著作權所有者之（書面）同意，並於本著作中註明其來源出處。著作人並擔保本著作未含有毀謗或不法之內容，且絕未侵害他人之智慧財產權，並同意無償授權國立臺灣師範大學數學系與台灣數學教育學會於本著作通過審查後，以論文集、期刊、網路電子資料庫等各種不同方法形式，不限地域、時間、次數及內容利用本著作，並得進行格式之變更，且得將本著作透過各種公開傳輸方式供公眾檢索、瀏覽、下載、傳輸及列印等各項服務。國立臺灣師範大學數學系與台灣數學教育學會並得再授權他人行使上述發行之權利。惟著作人保有下列之權利：

1.本著作相關之商標權及專利權。

2.本著作之全部或部份著作人教學用之重製權。

3.出版後，本著作之全部或部份用於著作人之書中或論文集中之使用權。

4.本著作用於著作人受僱機關內部分送之重製權或推銷用之使用權。

5.本著作及其所含資料之公開口述權。

著作人同意上述任何情形下之重製品應註明著作財產權所屬，以及引自《臺灣數學教育期刊》。

如果本著作為二人以上之共同著作，下列簽署之著作人已通知其他共同著作人本同意書之條款，並經各共同著作人全體同意，且獲得授權代為簽署本同意書。如果本著作係著作人於受僱期間為雇用機構所作，而著作權為讓機構所有，則該機構亦同意上述條款，並在下面簽署。

本著作之著作財產權係屬（請勾選一項）

☐ 著作人所有

☐ 著作人之僱用機構所有

立同意書人（著作人或僱用機構代表人）簽章：______________________

著作人姓名或僱用機構名稱：______________________

（正楷書寫）

中華民國　　年　　月　　日

《臺灣數學教育期刊》編審辦法

2013.04.03 編審委員會會議通過

壹、《臺灣數學教育期刊》（以下簡稱本刊）之審查包括預審、正式審查兩個階段：

一、預審：檢視來稿是否符合本刊稿約之宗旨、論文品質以及進行論文格式之審查；

二、正式審查：審查委員與投稿者採雙向匿名方式進行。主編就審查委員的回覆意見及論文品質決定接受或拒絕文稿，或是需要作者修改後再進行審查或檢核。需要「修正後再審」之稿件，交原審查委員或委由主編委任進行再審。所有文稿最後須經編輯委員會審查通過後，方能刊出。

稿件之最終審查決定以投稿後六個月內完成並通知作者。

貳、審查委員針對稿件之學術原創性、正確性及價值等條件從嚴審查，以確保所刊文稿的品質。審查委員可提供作者具建設性的修改建議，以利文稿的修正及品質提昇，並以下列其中一種的刊登建議回覆：

一、「同意刊登」：論文不需要修改可作原稿刊登。

二、「修正後刊登」：通知作者依審查意見修改或答辯後刊登。

三、「修正後再審」：要求作者依審查意見修改或答辯，修正稿由編輯委員會送原審查委員或委由主編委任進行再審。

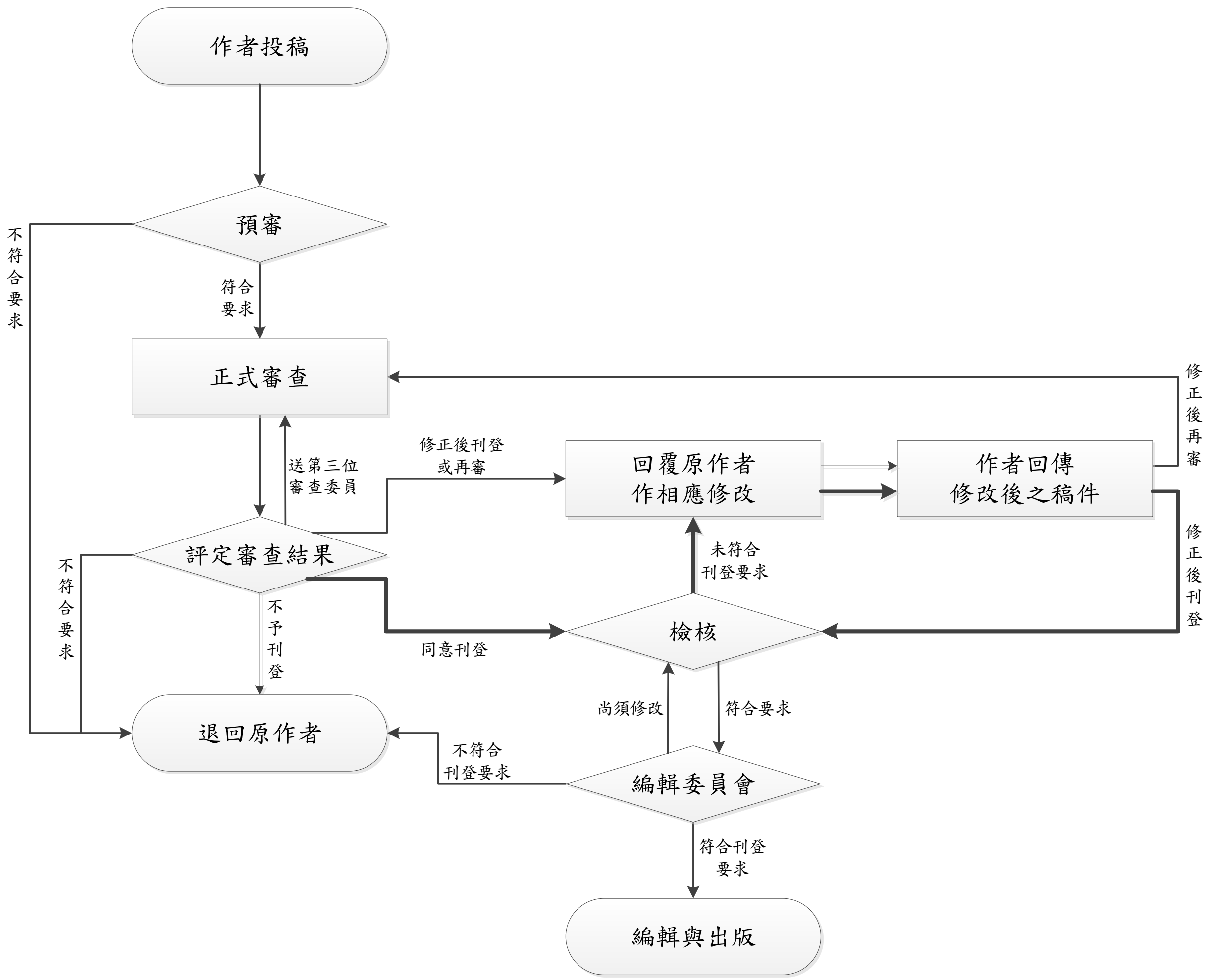
四、「不宜刊登」：通知作者退稿。

稿件審查的時間以三週為限，若超過期限，編輯委員會將去函提醒審查委員儘速審查，若逾六週審查者仍未寄回審查意見，則編輯委員會得再聘請另一位審查者取代之。每位審查者皆為無償審查，但會在每年第二期期刊中列名致謝。

參、本刊主編、副主編或編輯委員如投稿本刊，該委員應迴避推薦審查委員名單、參與審查結果決定之討論或經手處理與個人稿件有關的資料(包括審稿者資料、推薦審查委員名單、審稿意見等)。

肆、本刊預計每年四月和十月出版，稿件刊登順序由主編原則上依文稿性質與投稿時間之先後次序決定之，而第一作者的文稿以一篇為限，超過篇數之稿件留至下期刊登。

伍、本刊稿件之編審流程如下圖所示：


作者投稿
預審
符合要求
不符合要求
正式審查
送第三位審查委員
修正後刊登或再審
回覆原作者作相應修改
作者回傳修改後之稿件
修正後再審
評定審查結果
不符合要求
不予刊登
同意刊登
未符合刊登要求
修正後刊登
檢核
尚須修改
符合要求
退回原作者
不符合刊登要求
編輯委員會
符合刊登要求
編輯與出版

Taiwan Journal of Mathematics Education Vol. 7, No. 2 October, 2020

Publisher Department of Mathematics, National Taiwan Normal University
Taiwan Association for Mathematics Education

Address No.88 Sec. 4, Ting-Chou Rd., Taipei City, Taiwan, R.O.C.
Department of Mathematics, National Taiwan Normal University
"*Taiwan Journal of Mathematics Education*"
TEL 886-2-7749-3678
FAX 886-2-2933-2342
E-mail TJME.taiwan@gmail.com
Website http://tjme.math.ntnu.edu.tw/contents/contents/contents.asp?id=21