

ISSN: 2312-5810
DOI: 10.6278/tjme

第 8 卷 第 1 期
二〇二一年四月
VOL. 8 NO. 1
April 2021

臺灣數學教育期刊

Taiwan Journal of Mathematics Education

數學文化與教育專刊

Special Issue for Mathematical Culture and Education



國立臺灣師範大學數學系
Department of Mathematics,
National Taiwan Normal University



台灣數學教育學會
Taiwan Association
for Mathematics Education

發行單位 | 國立臺灣師範大學數學系
台灣數學教育學會

客座主編 | 劉柏宏 國立勤益科技大學通識教育學院

編輯委員會

主編	吳昭容	國立臺灣師範大學教育心理與輔導學系
副主編	楊凱琳	國立臺灣師範大學數學系
	劉柏宏	國立勤益科技大學通識教育學院
編輯委員	李源順	臺北市立大學數學系
(依姓氏筆劃排序)	袁媛	中原大學教育研究所
	許慧玉	國立清華大學數理教育研究所
	陳致澄	國立臺南大學應用數學系
	黃幸美	臺北市立大學學習與媒材設計學系
	楊志堅	國立臺中教育大學教育測驗統計研究所
	楊德清	國立嘉義大學數理教育研究所
	劉曼麗	國立屏東教育大學數理教育研究所
	劉遠楨	國立臺北教育大學教育傳播與科技研究所
	謝豐瑞	國立臺灣師範大學數學系
	譚克平	國立臺灣師範大學科學教育研究所
國際編輯委員	余偉忠	澳洲墨爾本大學數學教育系
	卓鎮南	新加坡國立教育學院數學與數學教育學術組
	羅珍珍	美國西密西根大學數學系

地址	臺北市汀州路四段 88 號國立臺灣師範大學數學系 《臺灣數學教育期刊》
電話	886-2-7749-3678
傳真	886-2-2933-2342
電子郵件	TJME.taiwan@gmail.com
網址	http://tjme.math.ntnu.edu.tw/contents/contents/contents.asp?id=21

本刊 110 年獲科技部人文社會科學研究中心補助
版權所有，轉載刊登本刊文章需先獲得本刊同意，翻印必究

主編的話

近年國際數學成就與素養評比發現，臺灣中學生在數學知識的認知與技巧方面表現不俗，但情意態度明顯低落。原因之一可能是大部分學生只認識數學的工具性角色，沒有機會體驗它的社會性與文化面向的內涵，導致無法察覺數學在個人生涯與社會發展中所能發揮的價值。因此十二年國民基本教育數學課程領域綱要呼籲必須認識數學的文化面向，因為這不僅有助於讓數學學習從工具性層次延伸到智識性層次，也更彰顯數學知識的人文價值。本次「數學文化與教育」專刊的目的即在回應上述訴求。本期專刊共刊登三篇研究論文和一篇「學術瞭望」。

數學是人類的一種次文化，劉柏宏在「數學人文教案培養數學文化素養之理論探討與反思」一文中提出與詮釋數學文化的兩大構面：「文化中的數學」和「數學中的文化」，並建構出一套數學文化素養的學習內容指標與學習表現指標。根據這架構，文章中介紹「費波納西數列」和「霍爾問題」兩份教案說明如何藉由布題逐步引導學生從事數學與機率思考，以達成學習內容與學習表現指標。經過教學現場的實際觀察與探究發現，雖然由於時間關係，國中生未能充分體驗歸納思考的過程，但透過數列的自我創作，他們獲得極高的成就感。而與條件機率相關的「霍爾問題」則呈現兩極現象。一部分學生能藉由樹狀圖的逐步鋪陳理解條件機率，另一部分則未能掌握條件機率的概概念。學生的困難除了數學因素之外，也包含心理因素，劉柏宏對此有所補充說明。

歷史是承載文化的時間載體，在「中小學數學史教案開發與實作研究」中，蘇意雯與在職教師透過共同實作與教學開發十二年國教的數學史素材，整個架構依循 HPM 實作模型進行，共開發三份教案，包含高中階段的「托勒密定理與和角公式」教案、國中階段的「最大公因數」教案，和國小階段的「分數與十進位制小數」教案。經過實地教學觀察發現，整體而言師生對於這些歷史取向的數學文化教案具有高滿意度，並且大都能理解教案中所訴求的數學概念。不過作者建議應針對不同學習階段(尤其是國小)，在學習工作單的設計上要特別考量如何將生硬的知識或抽象的語意做轉化。文中也提供許多數學史與數學文化相關的素材供有志於此者參考。

無論古今中外許多數學概念的濫觴來自於數學遊戲，所以數學遊戲可以說是一種「庶民數學」。陳東賢就在「發展悅趣化數學文化教案以培養數量與代數素養之探究」一文中說明「撲克牌數學魔術」和「中國益智遊戲九連環」教案的發展過程和實施探究的觀察。這兩個教案都與數學文化中的歸納推理有關，但在層次上有所不同。觀察發現，在「撲克牌數學魔術」的活動中幾乎所有學生都能掌握等差的概念並執行數學魔術，確實提升同學對等差數列單元概念的理解與學習興趣。至於從「中國益智遊戲九連環」教案的執行過程發現，八組 12 年級的學生中只有五組發現其中的遞迴關係，而更只有三組可以明確寫出遞迴關係式，可見從認知規律到以數學表徵表達，對於高中生而言仍有所困難，這將是未來教學上必須關注的議題。

本期的「學術瞭望」劉柏宏從人類學、歷史和社會，還有哲學等三種視角論述數學文化，以彰顯數學是人類文化中偉大的智識成就之一，由此引申出數學文化的定義和教育上的價值。而由於文化系統某一方面可以視為行動的產物，另一方面又可視為進一步行動的機制元素，所以一個社會的數學文化觀對於該地區的數學教學會產生相當的影響。文中並舉出一些文化融入的教學實例和教材分析結果以說明數學文化在教學上的應用。劉柏宏建議，若要提升數學的教與學，師生必須在數學教學過程中一起實踐「數學中的文化」，並時時關照「文化中的數學」取向。

「數學文化與教育專刊」主編



臺灣數學教育期刊

第 8 卷 第 1 期

2014 年 4 月創刊

2021 年 4 月出刊

目錄

數學人文教案培養數學文化素養之理論探討與反思 1
／劉柏宏

中小學數學史教案開發與實作研究 27
／蘇意雯

發展悅趣化數學文化教案以培養數量與代數素養之探究 55
／陳東賢

學術瞭望

論數學文化與數學教育的關係 79
／劉柏宏

Taiwan Journal of Mathematics Education

Vol. 8 No. 1

First Issue: April 2014

Current Issue: April 2021

CONTENTS

- A Theoretical and Reflexive Study on Cultivating Literacy of
Mathematical Culture by Using Lesson Plans from Humanistic
Mathematics 1
/Po-Hung Liu
- Research on the Development and Implementation of Lesson 27
Plans for the History of Mathematics in Primary and
Secondary Schools
/Yi-Wen Su
- An Exploratory Study on Developing Game-Based 55
Mathematical Culture Lesson Plans for Cultivating
Quantitative and Algebraic Literacy
/Tung-Shyan Chen
- Academy Observatory**
- On the Relationship between Mathematical Culture and 79
Mathematics Education
/Po-Hung Liu

劉柏宏 (2021)。
中小學數學史教案開發與實作研究。
臺灣數學教育期刊，8 (1)，1-25。
doi: 10.6278/tjme.202104_8(1).001

數學人文教案培養數學文化素養之理論探討與反思

劉柏宏

國立勤益科技大學基礎通識教育中心

數學文化是理解數學知識本質的重要途徑之一，但長期以來在傳統教學中幾乎都被忽視。本研究嘗試從理論論述和實務教學兩方面初探並反思數學文化如何應用於實際教學之中。在理論方面，本文定義數學文化並說明其中之「文化中的數學」與「數學中的文化」雙構面，再定義何謂數學文化素養，以進一步論述數學文化素養在教育上的意涵。在教學實務方面，本研究基於數學人文精神發展「費波納西數列」和「霍爾遊戲」兩份教案，並實際針對國中生和高中生實施素養教學。初步觀察結果發現，學生對於這兩份數學文化教案均表現出高度肯定，也能從教學活動中掌握所與傳達的數學精神。惟學生在「費波納西數列」的教學中沒能深入體認與自然界的關聯，而在「霍爾遊戲」教案中也發現大約半數參與的高中生對於將條件機率概念推廣到一般情形仍有困難。

關鍵詞：條件機率、費波納西數列、數學人文教案、數學文化、數學文化素養

通訊作者：劉柏宏，e-mail：liuph@ncut.edu.tw
收稿：2021年1月26日；
接受刊登：2021年4月9日。

Liu, P. H. (2021).

A theoretical and reflexive study on cultivating literacy of mathematical culture by using lesson plans from humanistic mathematics.

Taiwan Journal of Mathematics Education, 8(1), 1-25.

doi: 10.6278/tjme.202104_8(1).001

A Theoretical and Reflexive Study on Cultivating Literacy of Mathematical Culture by Using Lesson Plans from Humanistic Mathematics

Po-Hung Liu

Fundamental General Education Center, National Chin-Yi University of Technology

Mathematical culture a crucial approach to understanding the nature of mathematical knowledge, but it has been mostly ignored in traditional teaching for a long time. This research was a theoretical and reflexive study on how mathematical culture can be conducted in practical teaching in terms of theoretical and practical aspects. In terms of theory, this research provided a definition of mathematical culture and explained the dual dimensions of mathematical culture, that is, “mathematics in culture” and “culture of mathematics,” followed by the definition of “mathematical cultural literacy” to explore the meaning of mathematic cultural literacy in education. For the practical aspect, by referring to the humanistic spirit of mathematics, this research focused on two lesson plans—the Fibonacci Sequence and the Monty Hall Problem. Furthermore, two lesson plans were implemented for middle school and high school students. The findings indicated that, although the students were highly appreciative of the lesson plan content, they failed to be impressed by the connection between mathematics and the natural world in teaching the Fibonacci sequence. For the Monty Hall problem lesson plan, results also demonstrated that approximately half of the participating high school students still had difficulties in generalizing the concept of conditional probability.

Keywords: conditional probability culture, Fibonacci sequence, lesson plans of humanistic mathematics, mathematical culture, literacy of mathematical culture

Corresponding author : Po-Hung Liu · e-mail : liuph@ncut.edu.tw

Received : 26 January 2021;

Accepted : 9 April 2021.

壹、前言

數學知識源遠流長數千年，其發展不僅深受各區域民族文化影響，數學知識也與社會文化發展的趨勢密切相關。國際間倡議數學文化最早的當推數學家懷爾德 (Raymond Wilder) 於 1950 年國際數學家大會 (International Congress of Mathematicians) 中以「數學的文化基底」(Cultural basis of mathematics, Wilder, 1950) 為題發表演講。懷爾德認為，唯有透過認識數學的文化基底，才能對數學本質有更進一步的理解。另一位數學家克萊恩 (Morris Kline) 更在《西方文化中的數學》(Kline, 1953) 一書的序言中指出，此書目的旨在揭示數學一直是西方文明主要的文化動力，社會大眾雖理解數學是科學探究的重要工具，殊不知數學也深深影響西方哲學思想的走向，並早已滲入藝術、音樂、建築和文學之中。克萊恩長期致力於探究數學知識的歷史、哲學與文化層面的議題，但他最關心的仍舊是數學教育問題。克萊恩指出，學校的數學教學往往剝奪數學在人類文明中的智識文化脈絡，而將其簡化為一連串的技术知識，使得不需太多數學技術知識的一般大眾對這些“赤裸且乾澀的教材” (naked and dry material) 有所抗拒，即使部分接受高等教育的知識分子對數學也有種藐視的心態，因而使得“對數學無知形成一種社會崇尚的氛圍” (ignorance of mathematics has attained the status of a social grace, p. viii)。數學文化與人類學、歷史與社會和哲學等領域相關，劉柏宏 (2021) 已做說明，在此不再贅述。本文從數學文化的定義、構面、與其在教育上的意涵，延伸出融入數學文化如何彰顯數學的人文精神，並輔以兩個教學案例做為說明。介紹如何以數學文化中的數學人文元素融入中學教案之中，並初步探究在教學現場的實施觀察和反思後續可能的發展方向。

貳、數學文化素養在教育上的意涵

一、數學文化的雙向構面

沒有人會否認文學、藝術、建築與宗教都是人類重要的文化，而數學本身就是人類發展過程中所伴隨產生的一種智識文化應該也是殆無疑義。倡議數學與文化相互關聯的學者，如前述的懷爾德和克萊恩，都未直接對「數學文化」一詞下定義，而且目前國內外學界對於數學文化的研究尚不普遍，使得在討論所謂的「數學文化」(mathematical culture) 時，難以論斷「數學文化」一詞的意涵所指的究竟是數學知識本身就是一種文化 (mathematics as a culture, Wilder, 1981)，抑是數學是一種文化載具，是理解民族文化特殊性的線索 (mathematics as a cultural clue, Keyser, 1947)，或者指數學知識發展與社會互動的過程所產生的文化軌跡 (mathematics as a cultural locus, White, 1947)，也有從教育觀點討論數學文化對數學教學的影響 (mathematics as a cultural discipline, Burton, 2009)。有鑑於此，劉柏宏 (2016) 參酌 Kroeber 與 Kluckhohn (1952) 對「文

化」所下的定義，嘗試從比較廣義的角度，將「數學文化」定義如下：

數學文化就是人類探索數學知識時其行為的外顯和內隱模式，並藉由人類群體，特別是數學家社群，所創造獨特成就的符碼（符號、圖形或文字）來傳遞。

嚴格來說，這只是一種概念性定義，而非操作型定義。不過由於「文化」是一個抽象的人文概念，指涉的範疇極廣，研究初期很難立即給一個符合社會科學標準的操作型定義。縱使如此，我們可以嘗試探索「數學文化」時有哪些可以操作的內涵。

根據懷爾德（Wilder, 1950）的觀點，文化的發展結果來自於兩種張力的綜合，一是內部演化（evolution），另一是來自外部的擴散（diffusion）。數學文化史表明一件事實：「在最終尚未達到靜止狀態之前，沒有任何一個數學分支能夠無限期地獨自發展」（no branch of mathematics can pursue its course in isolation indefinitely, without ultimately reaching a static condition, Wilder, 1950, p. 265）。據此，劉柏宏（2016）主張「數學文化」主要包括兩個大構面，一個是「文化中的數學」（mathematics in culture），另一個是「數學中的文化」（culture of mathematics），前者是從文化的角度出發，觀察人類發展過程中，數學在其所屬社會文化所扮演的角色；後者指數學知識發展過程中其內部知識與社群所顯現的文化特質，這兩者呈現一種交錯且有機的互動發展。當來自外部文化張力的擴散效應不大時，其內部演化的力道自然削弱。懷爾德（Wilder, 1968）就指出，中國古代和歐洲中世紀的宿主文化（host culture）甚少受到其他文化擴散張力的影響，因而形成靜態特徵，致使數學發展停滯。反之，當來自外部的文化張力夠強時，將會衝擊內部演化的速率與效率，比如二次世界大戰期間大批歐洲數學家與科學家遷居至美國，進而改變二十世紀美國數學文化的樣貌。

為建立一個可以在教育上操作的架構，劉柏宏（2016）根據相關文獻（方延明，2007；易南軒、王芝平，2007；張維忠，2011；Ernest, 1998；Kline, 1953；Polya, 1954；Wilder, 1950）進一步將「文化中的數學」細分為「歷史」、「社會」和「民族」三個面向，而「數學中的文化」則包含「歸納猜想」、「邏輯演繹」和「社群辯證」，由此建構出數學文化內涵的縱橫構面圖（圖 1），這些構面彼此之間可能平行發展，也可能交叉堆疊，端視所處地域文化所帶來的影響。

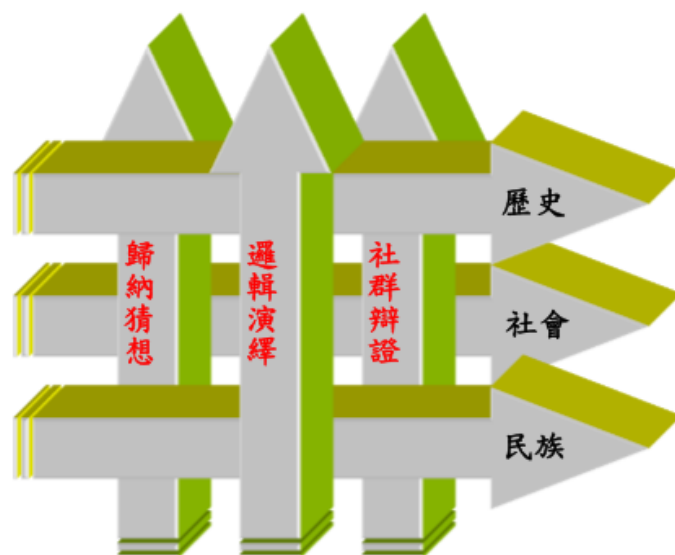


圖 1 數學文化縱橫構面。引自「從數學與文化的關係探討數學文化素養之內涵—理論與案例分析」，劉柏宏，2016，*臺灣數學教育期刊*，3（1），65。

二、雙向構面的教育意涵

談素養不能自外於文化。很可惜，前述的數學文化與人文內涵經常消失於當代的數學課程之中。Burton (2009) 從教學觀點出發研究職業數學家的認識論 (epistemologies) 並探討它們是否與數學學科學習相關，甚至造成影響。她析離出數學知識的兩個文化層面：「數學中的文化」(culture of mathematics) 和「數學的文化」(mathematical culture)。前者指對於數學知識的嚴密 (rigour)、簡潔 (succinctness) 與美感 (beauty) 等等特質的態度與看法，後者指數學家在討論與學習數學的情境脈絡中，所表現出來的社會政治態度 (socio-political attitudes)、價值 (values) 和行為 (behaviour)。後者對於如何理解前者具有關鍵影響，也就是個體研究數學的態度、價值和行為相當程度決定個體對數學的品味，例如如何評斷數學知識之真、善、美。另根據 Cai (1995) 比較中國大陸和美國學生的數學解題習性後指出，中國大陸學生在計算和簡單的問題解決等任務上比美國學生有更好的表現，但在評價複雜問題解決等任務上則不如美國學生。這與不同社會的「數學學習次文化」相關，也是文化中的數學相當重要的一環。所以 Burton 認為數學教學必須關照這兩個層面，尤其是「數學的文化」(mathematical culture)。不過「數學學習次文化」的主題與本研究教案發展的主旨較不相關，本文不擬針對此議題進行論述。由 Burton 的研究可以看出她係聚焦於職業數學家的工作哲學，諸如觀點、態度、信念與行為等等傾向所形塑的文化，並探究這些文化對研究數學和學習數學的影響。很顯然地，Burton 並沒有從歷史、社會與民族等宏觀的面向討論數學文化。她所定義的「數學中的文化」(culture of mathematics) 與本文

立場類似，而其「數學的文化」(mathematical culture)則包含於本文的「文化中的數學」(mathematics in culture)之中，因為數學家的觀點、態度、信念與行為等等傾向確實與他們所處地區的民族、歷史與社會有關。

要培養學生的數學文化素養必須有一個具體標的。因此，以 PISA 數學素養的定義為基礎，劉柏宏(2016)給數學文化素養下一個操作型的定義：

數學文化素養係指個體對數學知識的形成脈絡和發展過程所具備的理解程度，使其面對某一數學概念或問題時，能認識它的思維方式、歷史背景，和該概念或問題與生活需求、社會發展的關聯；或是面臨生活與社會問題時，能辨識該問題與數學知識的關聯，從而根據數學思考模式和數學知識技能，做出理性反思與判斷，並從解決問題的歷程中認知數學的人文價值。(p. 73)

值得一提的是，從上述「數學文化素養」的定義文字上雖沒有特別出現情意面向的字句，但是本文概念下的數學文化素養確實包含情意面向。因為當一個學習個體在「面對某一數學概念或問題時，認識它的思維方式、歷史背景，和該概念或問題與生活需求、社會發展的關聯.....並從解決問題的歷程中認知數學的人文價值」時，該學習個體所認識到的不僅僅是只有知識和技能，而是對於數學知識的本質更能心領神會，這就是情意的影響，而這也是本文數學文化素養定義與 PISA 數學素養定義最大的不同。基於此操作型定義，Liu (2018)再根據相關文獻建構出一套數學文化素養的學習內容指標(靜態指標)與學習表現指標(動態指標)，以做為發展或評量數學文化教材的架構，如表 1 和表 2 所示。表 1 數學文化素養的三個學習內容指標(歷史、社會和民族)的說明請參見劉柏宏(2021)。在此引用「費馬最後定理」為例闡述表 2 數學文化素養的學習表現指標。約在 1637 年的某一天，費馬閱讀有「代數之父」稱譽的古希臘數學家丟番圖(Diophantus)的著作《算術》(Arithmetica)一書中對畢氏定理的論證之後，在書頁空白處寫下：「任何立方數不能分成兩立方數的和，任何四次方數不能分成兩四次方數的和，任何五次方數也不能分成兩五次方數的和，依此類推」，也就是「設 n 是大於 2 的正整數，則方程式 $x^n + y^n = z^n$ ，沒有正整數解」，費馬宣稱已為這個命題找到一個非常巧妙的證明，然而因為書中空白的篇幅不足以寫下證明過程。到這階段只能將此結論視為費馬個人觀察歸納之後的猜想。之後數百年，許多偉大數學家如歐拉(Euler)、高斯(Gauss)、熱爾曼(Germain)、阿貝爾(Abel)、狄利西列特(Dirichlet)、羅詹德(Legendre)、拉梅(Lame)、庫麥爾(Kummer)、柯西(Cauchy).....，皆曾試圖證明「費馬最後定理」卻紛紛鎩羽。英國數學家懷爾斯(Andrew Wiles)十歲接觸到這問題便希望有一天能證明「費馬最後定理」。在他取得終身教授的資格之後花了七年時間，於 1993 年透過橢圓函數證明費馬猜想的正確性。但投稿發表經過同儕檢驗後卻發現其證明存在著邏輯

上的瑕疵，懷爾斯又花了將近兩年時間才完成嚴謹的證明。整個過程恰歷經「歸納猜想」→「演繹證明」→「社群辯證」三個階段，這就是屬於數學知識特有的文化。

表 1

數學文化素養的學習內容指標

歷史 (History) 指標

概念起源 (H-C: Concept)：數學概念的歷史由來

方法類型 (H-M: Methodology)：數學方法在歷史上不同的呈現方式

經典名題 (H-P: Problem)：歷史上與單元主題相關著名的數學問題

軼聞趣事 (H-E: Episode)：歷史上與單元主題相關的數學軼聞趣事

社會 (Society) 指標

自然科技 (S-N: Nature)：數學在自然科技方面的應用

生活應用 (S-L: Life)：數學在日常生活方面的應用

經濟發展 (S-E: Economy)：數學在經濟財務方面的應用

政治議題 (S-P: Politics)：數學在政治社會方面的應用

人文藝術 (S-A: Arts)：數學在人文藝術方面的應用

民族 (Ethno) 指標

文化脈絡 (E-C: Culture)：數學概念在不同民族產生的原因

方法比較 (E-M: Methodology)：數學方法在不同民族的呈現方式

哲學思想 (E-P: Philosophy)：數學概念和當時哲學思想的關係

表 2

數學文化素養的學習表現指標

歸納猜想 (Induction & Guessing) 指標

觀察分析 (I&G-S: Survey)：從所提供之範例進行觀察與分析

發現規律 (I&G-P: Pattern)：經由觀察與分析發現範例之共同規律

建立猜想 (I&G-C: Conjecture)：透過發現範例之共同規律建立數學猜想

演繹證明 (Deduction & Proof) 指標

直覺說明 (D&P-I: Intuitive)：透過直覺觀察初步相信數學性質之合理性

特例說明 (D&P-E: Explanation)：舉出特例說明數學性質之合理性

邏輯論證 (D&P-L: Logic)：經由邏輯論證確認數學性質之正確性

社群辯證 (Community & Dialectic) 指標

專家對話 (C&D-C: Conversation)：理解數學家社群對某一數學概念或性質的看法

概念演變 (C&D-E: Evolution)：認識某一數學概念或性質不同年代的演變過程

參、數學人文精神與教學

在一般的認知中，數學總被歸類為一門科學，數學素養當然也是科學理性最典型的展現，這是毋庸置疑的。相對於科學知識的日新月異，人文學科一個很重要的本質就是「傳承」。兩千多年前相傳由古希臘詩人荷馬所寫的兩部巨著《伊利亞特》和《奧德賽》至今仍為人傳頌；古埃及藝術中經常以類比的象徵手法，透過符號展示他們對自然的認識，這一點仍然是現代藝術家慣用的手法；春秋戰國時代諸子百家思想還隱約中引領著我們的處事態度。不過難道數學就不具備上述資格嗎？兩千多年前《幾何原本》的證明形式與內容至今仍被奉為圭臬；當今全世界不也是分分秒秒時時刻刻仍遵守著古巴比倫人所創立的六十進位？三國時期劉徽的圓面積公式「半周半徑相乘得積步」和當代公式 πr^2 相比不僅同樣精確，也更合乎直覺。所以從傳承角度而言，說數學是一種人文知識應當不為過，因此從數學發展過程來看，數學或許更接近人文學科。本文旨在討論基於數學文化所發展的數學人文素養教材並探究其成效，而所謂數學人文素養（literacy of humanistic mathematics）就是能體認「人文數學」（humanistic mathematics）的本質。那什麼是「人文數學」？美國數學協會（Mathematical Association of America）於 1993 年出版的《*Humanistic Mathematics*》（White, 1993）一書中明白表示「人文數學」指的是對於數學知識與文學、藝術、音樂等人文學科所共享的內涵能有所覺知與感悟（Humanistic mathematics carries with it an awareness of and a sensitivity to those things shares with the humanities such as literature, art, and music. White, 1993, p. vii）。例如法國數學家 Jacques Hadamard 指出數學的洞見或是發現需要一個「孵化」（incubation）的過程，這過程除融合知識和直覺外，也依賴有意識的思考和無意識（或是潛意識）的靈光乍現（Hadamard, 1945），這種追求智識感知的心理狀態與人文學科並無二致。難怪當代最負盛名的華人數學家丘成桐教授也指出：

數學是一門很特殊的學科。它既能達成人文性的涵泳性靈，又有科學性的致知應用。……探討數學、人文與科學之間妙趣橫生的關係，讓我真正享受到了研究數學的樂趣。（丘成桐，2013，p. 1）

這段話充分展現認識數學文化素養的情意價值。值得注意的是，「人文數學」不只是一個名詞，更是包含過程的動名詞。White（1993）強調，要達到前述目標必須透過「人本數學教學」（teaching mathematics humanistically）和「教授人文數學」（teaching humanistic mathematics）兩種過程，前者偏向教學策略，以學生為本，創造一個友善的學習環境讓學生能主動探究數學，以了解數學是一個有意義的社會建構知識（a meaningful, socially constructed knowledge）；後者注重學習內容，提供適當素材讓學生重構數學知識，包含從發現到論證、從數學到科學、從事實到應用、從數學到孕育知識的文化脈絡。

「人本數學教學」從字面的直接解釋就是呈現「以人為本」的教學。「以人為本」的數學教學，就是如同 Ernest (1996) 所說，呈現出數學知識人性化的一面 (human side of mathematics)。前述 White (1993) 所說以學生為中心的教學模式在許多教育文獻已多所論述，這裡不再贅言。許多學者主張人本數學教學應介紹在數學知識發展過程中數學家如何思考問題並建立知識正確性的過程。Marchisotto (1993b) 以畢氏定理為例解釋人本數學教學的內涵，以說明如何讓學生了解數學是一個有意義的社會建構知識。她舉出確立數學知識的七項特徵以描繪數學知識演化的宏觀特徵。這些宏觀特徵近二十年來逐漸受到重視。七十年前數學家 Richard Courant 有感於當時數學教學已淪為空洞枯燥的解題技巧訓練，數學研究越來越趨於過度特殊化與抽象化，忽略與其他領域的連結，致使數學在教育中面臨消失的危機，因此出版《數學是什麼?》(What is mathematics?) 一書 (Courant & Robbins, 1941)，其目的在於讓讀者能夠真正理解數學是一個有機發展的整體，並且可以做為科學思考和行動的基礎。但是另一位數學家 Reuben Hersh 卻認為 Courant 在書中只有呈現知識結構的演變，卻沒有呈現數學知識背後的人文精神，所以只有“展示”數學是什麼 (showing what mathematics is)，卻沒有真正“訴說”什麼是數學 (not by telling what it is)。Richard Courant 所沒有“訴說”的是數學知識的哲學問題，而哲學問題正是人文精神的最高展現。因為討論哲學時不僅需觀察到知識的演變，尚須考量知識生成與轉移的社會環境脈絡和價值觀。換句話說，Courant 或許正確地描繪數學的「外在形象」或其「概念定義」(concept definition)，卻沒有傳達數學的「內在意象」或其「概念意象」(concept image)，因此 Hersh 從知識論觀點 (epistemological point of view)，透過人本取向撰寫《數學究竟是什麼?》(What is mathematics, really?) 一書以闡述數學意象 (Hersh, 1997)。Hersh 除了主張數學是人類文化的一部分之外，更強調數學知識並非毫無謬誤。就像科學一般，數學藉由犯錯、修正、再修正的過程而精進。數學哲學界約莫從 1970 年代後期開始重視數學的經驗性，其中較為普及的代表作有二，一是克萊恩的《數學：確定性的失落》(Mathematics: The loss of certainty, Kline, 1982)，另一是 Imre Lakatos 的《證明與反駁》(Proofs and Refutations, Lakatos, 1976)。尤其 Lakatos 在《證明與反駁》一書中藉由師生交叉詰辯與對話呈現出數學概念“琢磨” (polishing) 的歷程，以反駁英國數學家哈第 (Godfrey Hardy) 所主張的數學形式主義 (formalism)。劉柏宏 (2015) 也仿效《證明與反駁》書中的風格，虛擬一位老師 (T) 和三位學生 (α , β 和 γ) 之間關於多邊形性質的對話，以呈現 Lakatos 的觀點。

「教授人文數學」重點在強調數學與文學、藝術、音樂等人文學科所共享的知識內容與內涵。以數學與藝術為例，數學是理性的，繪畫是感性的，兩者看似無關，但究其知識本質的理路可以發現兩者發展歷程其實十分相似。兩個學科都源起於如何呈現我們所生活的大自然，數學的工具是數字和幾何，而繪畫是線條和色彩。之後兩者也都步上從具象到抽象的道路，不再以

忠實地描繪物理世界為滿足，而是追求人類純理性思維的樂趣與發展。更令人驚訝的巧合是，兩者走向抽象化的時間卻也相近，繪畫稍晚於數學，但都約莫從十九世紀中後期開始。一般咸認數學的抽象化起始於伽羅瓦（Évariste Galois, 1811-1832）所建構的群論（group theory），而後緊接著是科西（Augustin Cauchy, 1789-1857）和威爾斯特拉斯（Karl Weierstrass, 1815-1897）微積分嚴格化的工作，和羅巴切夫斯基（Nikolai Lobachevsky, 1792-1856）與黎曼（Georg Riemann, 1826-1866）等人提出的非歐幾何學，激發二十世紀抽象數學的發展。繪畫藝術方面，康丁斯基（Wassily Kandinsky, 1866-1944）和蒙德里安（Piet Mondrian, 1872-1944）等人被視為是抽象畫的先驅，有志一同地以幾何色塊表現畫中景物，點燃二十世紀野獸派（fauvism）和立體派（cubism）的火花。我們可以借用英國數學家 Jensen（2002）的一段話來理解兩者知識本質的相似性：

數學和繪畫藝術可做為人類在意識上亟於體認現實世界的兩個案例，不僅僅只是我們周遭觸目可見的物理現實，更著重在最廣義的現實上。因此兩者的關係和相似是可以預期的。藝術家和數學家一樣都致力於理解世界。兩者都反思現實世界的結構並設法去定義和萃取該結構的元素，有時是抽象的，也有時是具象的。（p. 45）

至於數學與文學的共通點則是敘事（narrative）。以抽象符號表達概念的數學為何能與以具象文字為媒介的文學有所連結？Thomas（2002）指出文學理論中的結構主義與敘事分析，與數學思維具有許多類似之處。例如數學證明必須先有給定的已知、假設、和相關的數學物件才能進行演繹，而數學小說通常從給定的角色出發做為故事的開端，並逐漸界定主角與相關人物之間的關係後，藉由書中人物共同參與事件的過程以鋪陳結局，這兩種方法論有顯著的類比關係。至於兩者在處理特例（special case）與推廣（generalization）的手法上也是異曲同工。數學家藉由諸多特例發現數學物件的共同模式，而小說家則是以特定人物與事件突顯潛藏於社會眾生的集體記憶。與其說數學小說的風潮是由於「異態結合」所產生的新鮮感，倒不如說這種現象來自於大眾對「數學敘事」（mathematical narrative）的潛在渴望。Davis（2012）指出，數學家應該以敘事做為了解其自身學科與研究本質的基本工具，但數學家的作品卻往往只見諸多疏離的恆等式，缺乏敘事的過程（it's full of isolated identities.....But there are no accompanying narratives.）。因此從敘事觀點來看，在教育上培養“敘述數學”的能力遠比訓練“解決數學”的能力更能激發學習個體內心對知識的想像與體會，更具有人文價值。

肆、數學人文素養教材案例

本節將說明依據前述數學文化素養定義與指標所發展的人文數學教案如何應用於在教學現場，以體現數學人文精神於教學之中。不過必須說明的是本研究屬於初探性質，所發展的教案都僅僅以一節課為限，這是經徵詢一些教師之後認為單節教案比較能適合學校教師隨時彈性使

用。教案發展時參考密西根大學教學研究中心（Center for Research on Teaching and Learning）所揭示的教案設計準則（http://www.crlt.umich.edu/gsis/p2_5）。首先每份教案開始設計前先考慮三大要素：學習目標、學習活動設計、與檢測學習成效的策略，並針對不同情境與對象持續精進教案。

教案設計遵照六個步驟進行。首先思考要學生學到甚麼？課程結束後學生帶走甚麼？據此列出學習目標（outline learning objectives）。接著準備開場白（develop the introduction），針對主題構想有創意的開場白以吸引學生的興趣並鼓勵主動思考，引導學生進入問題情境。再來就是教學的主軸，設計學習活動（plan the specific learning activities），尤其要聚焦在什麼樣的活動可以吸引學生的目光和有哪些不同的方式可以描述主題，以激勵學生投入教學活動。教學活動完成之後必須準備幾個問題以檢測學生的理解程度（plan to check for understanding），這時要試想學生可能的回答，並備妥因應策略。最後是準備結語與預告（develop a conclusion and a preview），以簡單扼要的話語概括整個學習活動的重點。前面五個步驟構思完成之後，還須設定進程時間表（create a realistic timeline）估算每個活動流程所需時間，列出學習目標的優先順序後以做必要時之取捨。

以下針對兩件教案之實施情形做介紹與分析。

一、「費波納西數列」教學相關文獻

「費波納西數列」是一個歷史淵源流長且相當著名的數學普及概念，其知識內涵的跨度相當大，可以依據內容的深淺，從小學延伸到大學。早於 1970 年，Ainsworth（1970）就曾探討如何在小學教材之中將費波拉西數列連結到自然界的生物型態，例如鳳梨、毬果、向日葵和貝殼螺旋等等。Kaygin、Balçin、Yildiz 與 Arslan（2011）針對 30 位 8 年級學生，以一個月的時間實施以費波拉西數列為主的數學史教學，內容除說說明費波納西數列與巴斯卡三角之間的關係外，也介紹了費波納西數列與自然界之間的關聯。課程中發給每位學生一顆毬果，要求畫出毬果鱗片上的螺旋並計算螺旋數。至於費波納西數和黃金比例的關係則透過影片介紹。前後測結果顯示，不僅學生的數學成就測驗的進步顯著，在質性回饋方面非常肯定數學史融入教學和毬果的實作。Leikin 與 Winicki-Landman（2001）以費波納西數列的遞迴關係為基礎，發展出兩種適合高中生和大學生的數學定義活動，一是練習數學建模（defining by modeling），另一個是練習數學符號法則（defining by means of symbolic rules）。Leikin 與 Winicki-Landman 將這兩個數學活動使用於高中教師培育課程之中發現，這些培訓教師透過這些活動更能理解數學的後設知識（meta-mathematical knowledge）。Marchisotto（1993a）針對大學主修人文藝術的學生發展出一套教案，先讓學生透過臆測和驗證找出畢達哥拉斯三元數（Pythagorean triples），緊接著利用一個與波納西數列有關的幾何悖論「 $64=65?$ 」（內容稍後說明），讓學生領略直覺的不可靠和數學

證明的重要，相當程度傳達出數學知識需要經驗歸納和理性論證的本質。

(一) 教案內容與數學文化之相關性

「費波納西數列」教案共規劃 45 分鐘，教學內容的發展係根據四個前述的數學文化素養指標，分別是：

1. 經典名題 (H-P)：歷史上與單元主題相關著名的數學問題。
2. 人文藝術 (S-A: Arts)：數學在人文藝術方面的應用。
3. 觀察分析 (I&G-S)：從所提供之範例進行觀察與分析。
4. 發現規律 (I&G-P: Pattern)：經由觀察與分析發現範例之共同規律。

前二者屬於「文化中的數學」構面，後二者則屬於「數學中的文化」構面。

本教案以電影「達文西密碼」的羅浮宮命案做為開場。影片中羅浮宮館長因故被槍殺身亡，但在死前以自己血液在地上寫了一串數字“13-3-2-21-1-1-8-5”和一段文字“O, Draconian Devil! Oh, Lame Saint!”（啊，嚴峻的魔鬼！啊，跛足的聖人！）。課堂中希望學生注意到影片中順序已被錯置的數字串以引起他們的好奇。接著便介紹「費波納西數列」的歷史由來和問題的敘述：

假設每對兔子剛出生滿兩個月後即可生出一對兔子，且此後每個月都可以生出一對兔子。若一開始時只有一對兔子，則往後每個月之兔子對數分別是多少？一年後有多少對兔子？

為了確認學生理解問題的意思，教師引導學生一起算出前五個月的兔子對數，然後請學生開始自行推理計算第六、七個月的兔子對數，希望培養他們觀察規律與歸納的能力。教案設計時即已估計約五分鐘後部分學生應該能算出第六、七個月的兔子對數，但是要求出十二個月後的兔子對數對學生而言相當困難。此時教師可以提示學生觀察這些數字之間是否存在某些規律？最終希望學生能得知「費波納西數列」即為 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ……，從第三項開始，每一項都是前兩項之和，以數列符號可以表示為 $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ ，此時再回去破解“O, Draconian Devil! Oh, Lame Saint!”所隱藏的含意。教案緊接著以各式圖片展現植物花卉中所隱藏的費波納西數列，以揭示自然界的數學密碼，例如海芋花瓣只有一瓣、延齡草有三瓣、紫羅蘭有五瓣、血根草八瓣、瓜葉菊十三瓣、多毛金光菊二十一瓣、雛菊三十四瓣。而某些向日葵品種頂上的小花蕊排列成兩組交錯的螺旋，其中一組逆時針的螺旋有二十一條，另一組順時針的螺旋有三十四條，恰為費波納西數列之相鄰兩項。

除培養觀察規律與歸納之能力外，本教案另一個重點活動是「64=65?」的找碴活動。如圖 2，課程中展示一個動畫，將原本一個 8×8 的正方形以費波納西數列中的 3, 5, 8 為單位切割後，竟然可以重組成一個 5×13 的長方形，然後要求學生觀察其不合理之處。要破解這一謎團須具備

斜率的概念，對國一學生是一大挑戰。本份教案的最後一個活動是要求每一位學生從 1,2 開始，自己創作一個數列，其中從第三項開始，每一項都必須跟前兩項相關。這個活動的目的是測試學生對於遞迴概念的理解程度，並觀察是否能掌握數字規律。

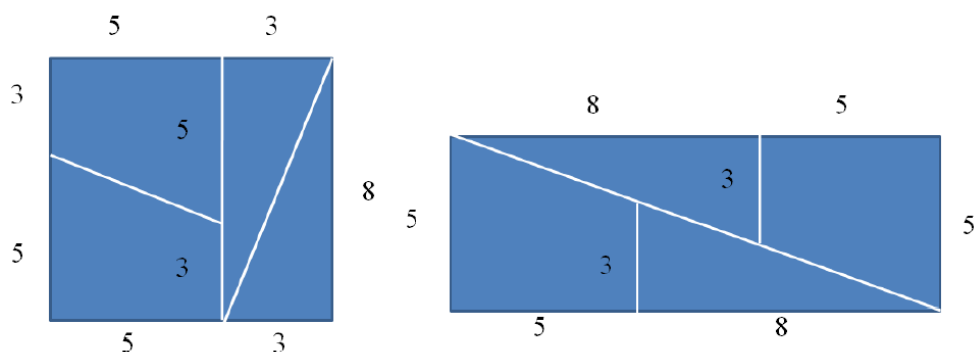


圖 2 「64=65?」找碴活動文化

(二) 教案實施現場觀察

由於這份教案只有 45 分鐘，屬於短時間的教學活動，無法期望能大幅度地改變學生的知識、情意或技能，所以透過前後測以檢視本份教案成效的研究方式並不適當，因而本研究改從學生上課反應、學習心得與數列創作三方面觀察學習成效。

經分析教學影帶和學生心得與數列創作成果發現，學生大都能理解「費波納西數列」的遞迴關係，且對教學內容都給予正面回饋。26 位學生在學習單的回覆內容見表 3 和表 4。

表 3

學生對於教案妥適性的回應

學習單問題	是	否
	(人數/總人數)	(人數/總人數)
這次教學活動是否有助於你對「費波納西數列」的理解？	25/26	1/26
這次教學活動是否能引起你對「數列」的學習興趣？	23/26	3/26
這次教學活動的難易度是否適當？	23/26	3/26

表 4

學生對於教案內容的回應

學習單問題	回覆內容(人數)
這次教學活動我最喜歡的內容	達文西密碼影片 (16) 費波納西數列的規律 (4) 64=65?動畫 (3)
這次教學活動我最不喜歡的內容是	沒有不喜歡的內容 (24) 兔字繁殖的規律 (1) 圖形 (1)
這次教學活動我覺得最有收穫的內容	理解費波納西數列的規律 (14) 64=65?動畫 (3) 生活與自然界中的數列 (3) 可以自己創作數列 (1) 可以動腦思考 (1) 有趣的問題 (1) 認識一位數學家 (1)

表 3 顯示絕大部分學生對於教案有極高滿意度，少部分學生覺得推理思考的部分太難。但是從教學影片可以發現當時教師給予讓學生進行觀察與分析的時間不夠充分，操作與思考的時間似乎不足，當發現學生計算兔子的對數有困難之後，就直接寫出第六、七個月的兔子對數，再讓學生觀察遞迴規則，沒有完整傳達當初設計教案時計畫先培養學生觀察歸納，再進行推理演算的理念，所以在學習單中學生甚少主動提到規律的發現與歸納的驚喜，在情意面向的效果上不如預期。另外從課後學習單也發現甚少學生主動提到植物花卉中所隱藏的費波納西數列，這與 Kaygin 等人 (2011) 的研究發現不同。反而是「64=65?」動畫的找碴活動相當吸引學生的注意力。除學習單中有 6 位學生提到之外，在最後的開放式問題中許多學生表示對此活動印象深刻，例如甲生在學習回饋單中表示：

我覺得今天這個活動整個來講是還不錯，當中有一部份是說有一個 8×8 的正方形分 4 塊，再合起來後又變成了 13×5 的長方形。正常來說面積是不變的，但是「13×5=8×8」? 當下我超認真在思考（我後來心裡還想說，嗯~我頭腦的皺紋又要多幾條了呢!!>.<），但還是不懂。到老師講解完才了解的.....。

至於數列創作活動也得到學生相當大的迴響，可以看見學生的創意。乙生提到他設計了一組數列：「1, 2, -1, 6, -7,」，其規律是「前項減後項再乘前項」，也就是 $a_{n+2} = (a_n - a_{n+1}) \times a_n$

(也就是 $(1-2)\times 1=-1$ 、 $(2-(-1))\times 2=6$ 、 $(-1-6)\times(-1)=7$, ...)。乙生提到因為這堂課讓我更了解數列規則的構成。另一位丙生則表示：

今天這個教學活動感覺有點像大學，MT（意指數學老師）一整個很有教授的 fu，帥爆了♥♥♥。今天提到了費波納西數列，是一個有按規律的數列，1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, $1+2=3$, $2+3=5$, ... 在剩下 10 min，MT 也讓我們自行創造自己的數列!! 嘻嘻。HC 數列 $\Rightarrow 1, 2, 1/2, 4, 1/8, 32, 1/256, 8192, \dots$ It's a magic~~Ha!

丙生的數列一收一放，其規則是 $a_{n+2}=a_n/a_{n+1}$ ，其中奇數項子數列{1, 1/2, 1/8, 1/256, ...}收斂到 0，偶數項子數列{2, 4, 32, 8192, ...}則發散至無限大，相當具有創意。從學生的回饋意見可以看出許多學生能透過範例所供的歸納觀察，掌握數字遞迴的概念，對於能創作屬於自己的數列相當滿意，符合教案所設定之「數學中的文化」指標。即使有些數列並沒有特別有趣的性質，但是卻充滿個人的成就感。

（三）教案反思

根據整個教案實施情形和學生學習單的反應可以看出，本份教案在激發學生對問題的好奇心和培養他們觀察數列的規律與歸納能力方面是成功的。只是訓練問題推理能力的成效不如預期。這可能是由於任課教師擔心授課時間緊迫，因而在沒有提供足夠時間讓學生進行探究推理的情形下，直接給出第六、七個月的兔子對數，導致學生沒有機會體驗歸納思考的樂趣。另外從試教影片觀察也發現，課堂上師生的互動不夠熱絡，學生似乎相當拘謹，這可能是由於有攝影機在教學現場的緣故。即使攝影機只從教室後方拍攝，學生仍無法自在地學習，這是未來進行類似研究時須謹慎處理的問題。不過，學生個人創作數列的活動則相當成功，可以看出學生對於自己能依據遞迴規則製造數列相當滿意，在數學文化中的觀察分析（I&G-S）和發現規律（I&G-P）這兩個指標上面有明顯成長。雖然在試教過程中學生沒能有機會主動發現與歸納費波納西數列的規律，以至於難以感受學習所帶來的驚喜，但這自創數列的活動某種程度可以在情意面向上稍微彌補。另一點值得思考的是，本教案目標之一是學生能領悟自然界隱藏數學密碼的奧妙，但學生這方面的回饋並不多。很有可能學生甚少接觸這些植物，且課堂上只有顯示植物圖片，並未如 Kaygin 等人（2011）的教學方式，讓學生實際觀察植物，以至於感受不深。若可能的話，或許可以進行數學與生物的跨領域教學帶學生到野外做植物觀察，方能實踐有感學習。

二、「霍爾問題」教案相關文獻

對高中生而言條件機率是偏艱澀的一個單元，其困難之處在於對題意無法理解，或是學完古典機率之後，經常以古典機率的思考方式去解決條件機率的問題，以至於難以理解問題所定

義的情境，或者忽略問題所定義的關鍵情境。由於條件機率問題的答案經常違反直覺，因此學生難以掌握 (Tomlinson & Quinn, 1997)。Fischbein 與 Gazit (1984) 觀察 5-7 (10-12 歲) 年級的小學生發現，他們對於物件「取出放回」和「取出不放回」的條件感到困擾。Tarr 與 Jones (1997) 針對 4-8 年級 (9-13 歲) 的小學生和中學生實施質性訪談分析發現，學生的思考模式可以區分為「主觀判斷」、「前後事件相關性」、「非正式量化推理」和「數值推理」等四個層次。有鑑於學生對於條件機率的迷思概念可能與教師引導方式有關，且學生學習困難或許是在情境脈絡的認知思考面向而非數學面向，Elbehary (2020) 因而邀請 68 位參與數學師資教育學程的大學生，從認知心理學的角度，透過兩個與條件機率相關的不確定性問題和後續訪談理解這些職前教師的思考模式。結果發現，大約只有 6% 的職前教師屬於理性思考者 (rational thinker)，也就是能了解在不確定性條件下判斷出如何剔除不需要的樣本空間，並考慮條件機率的情況，使用給定的條件以調整他們的估計。

實際上，Falk (1986) 很早就很具體提出學生在條件機率上容易誤解的三種錯誤。一是無法判斷“在 A 事件發生的條件之下，B 事件發生的機率”和“在 B 事件發生的條件之下，A 事件發生的機率”這兩個問題之間的差別 (confusion of the inverse)。二是以「因果推論」去解讀「條件推論」(interpreting conditionality as causality)。例如盒中有兩個白球和兩個黑球，隨機先取一球不放回之後再取一球，請問已知第二球是白球的條件下，第一球也是白色的機率是多少。許多學生認為既然已知第二球是白色，怎麼可能不知道第一球是白色的機率，或者認為在第一球尚未取出的情形之下，怎會已知第二球是白色？受因果推論的干擾因而難以理解這樣的問題情境。殊不知，這種「反推理」問題可以應用於許多已經知道結果而去反推可能發生原因的現實生活事件之中。再者是對條件機率的樣本判斷有誤。例如知名的「三卡問題」(three-card problem)：

一頂帽子中藏著三張卡片，一張兩面都是藍色，另一張兩面都是綠色，第三張一面是藍色而另一面是綠色。我們隨機從帽中拿出一張卡片並將其放到桌上，已知正面是藍色，請問這張卡片反面也是藍色的機率是多少？

部份學生以古典機率理論判斷，因為只有一張卡片的兩面都是藍色，所以答案是三分之一。另一部份學生稍具條件機率的概念，排除雙面都是綠色的卡片，因而認為剩下兩張中選到兩面都是藍色的機率是二分之一。事實上，這兩種思考都是忽略條件機率問題中的關鍵情境。任意抽出的每張牌都有兩面，若在這兩面分別標示 1 和 2 以區分，藍綠色那張藍色面標示為 1，綠色面標示為 2，則任意抽出一張牌放在桌上的樣本空間共有 (正面藍 1，反面藍 2)、(正面藍 2，反面藍 1)、(正面藍 1，反面綠 2)、(正面綠 2，反面藍 1)、(正面綠 1，反面綠 2)、(正面綠 2，反面綠 1) 等六種情形，而不是只有三種。由於根據問題的條件，抽出的牌其正面是藍色，所以

排除(正面綠2, 反面藍1)、(正面綠1, 反面綠2)、(正面綠2, 反面綠1)等三種情形,而在剩下三種樣本中只有兩種符合題意要求,因此機率是三分之二。這種推理方式也可以透過樹狀圖完成,學生可能更容易理解。本研究就試圖以「霍爾問題」(Monty Hall problem)配合樹狀圖引導學生理解條件機率的關鍵概念。

「霍爾問題」源起於1960年代美國的一個電視益智節目「我們來打個商量」(Let's make a deal)。在這遊戲中有三扇門,其中一扇門後面有一輛車,其餘兩扇門後面則是一隻山羊,主持人知道哪一扇門後面有汽車。一開始主持人會要求你先在三扇門中選擇其中一扇,當你選擇了一扇門後,由於主持人知道門後面有什麼,因此故意開啟了其中一扇後面有山羊的門,然後問你:「換」或「不換」?。其實真正電視節目中是不允許更換選擇的,前述問題是加州大學柏克萊分校統計學教授 Steve Selvin 於1975年2月寄給期刊《American Statistician》的改編版本,並問「換」和「不換」哪一種獲得汽車的機率較高。這是一個條件機率問題(三扇門中,在已經知道某扇門沒有獎品的條件下,決定不換和決定更換選擇的機率各是多少),但是當初許多數學家與統計學家為此爭論不休,一派主張更換機率較高,並給出正確的計算結果。但另一派則主張當主持人打開一扇門之後,兩扇門中只有一扇門有汽車,「換」和「不換」獲得汽車的機率都是二分之一,以這簡單古典機率概念反駁主張更換的說法,包括連知名數學家 Paul Erdős 也是抱持這看法。這問題正確的選擇其實是「換」,不過 Granberg (1999)發現,大多數的大學生(79%的中國大陸學生、87%的巴西學生、83%的美國學生和84%的瑞典學生)都決定「不換」,為何這些具備不同文化背景的學生其選擇趨勢竟然都相當一致? Tubau、Aguilar-Lleyda 與 Johnson (2015)認為,一般人會在這問題做出錯誤決策的主要原因有二:一是基於情緒的選擇偏見(emotional-based choice biases),二是理解和表徵機率問題的認知侷限(cognitive limitations in understanding and representing probabilities),因而「霍爾問題」經常被用於決策心理學的研究。例如 Glymour (2001)將「霍爾問題」形容為一個「對撞結構」(collider structure)的問題。原本「獎品在哪一道門」和「觀眾選擇哪一道門」是兩個獨立的因素,但由於「主持人打開一道門」這一變因而對撞(「獎品位置」→「主持人開門」←「觀眾選擇」),產生了統計上的相關性。可見這問題相當適合做為批判思考和邏輯推理的案例。

(一) 教案內容

「霍爾問題」教案共規劃五十分鐘,實施對象是已具備古典機率概念的高中生,以四個數學文化素養指標為基礎:

1. 經典名題(H-P): 歷史上與單元主題相關著名的數學問題。
2. 觀察分析(I&G-S): 從所提供之範例進行觀察與分析。
3. 邏輯論證(D&P-L): 經由邏輯論證確認數學性質之正確性。

4. 發現規律 (I&G-P): 經由觀察與分析發現範例之共同規律。

第一個屬於「文化中的數學」構面，其餘三個屬於「數學中的文化」構面。

在「規劃學習活動」階段，教師首先拿出三個信封袋，其中 2 號信封裝有獎品，教師先指定某位學生請他（她）猜哪一個信封袋裡面有獎品。當學生選定之後，由於教師知道哪一個信封有獎品，因此故意打開一個不含獎品的信封，並問學生「換」或「不換」。無論該位學生決定「換」或「不換」，都要說出理由。有些學生隨機決定換或不換，另有些學生可能認為機率都一樣。若學生猜中則將獎品送出，若不中則依據上述流程繼續。如此程序進行 10 次，並紀錄「換」或「不換」各猜中幾次。這一階段結束後教師問學生「換」或「不換」的看法，這時學生可能依據經驗法則回答問題。為蒐集更多的實驗樣本，本教案使用加州大學聖地牙哥分校數學系一個關於霍爾問題的模擬網站 (<https://math.ucsd.edu/~crypto/Monty/monty.html>)，網站中可以快速且無次數限制地重複霍爾遊戲，短時間可以累積大量實驗樣本。學生會逐漸發現選擇「換」的中獎機率較高。於是教師請學生們思考為什麼選擇「換」得到汽車的機率較高，並請他們透過小組討論提出解釋。當個組各提出解釋之後，教師則透過樹狀圖和列聯表進一步說明。由圖 3 的樹狀圖可以知道，選擇「換」而得到汽車的機率是 $\frac{2}{6} / (\frac{1}{6} + \frac{2}{6}) = \frac{2}{3}$ ，選擇「不換」得到汽車的機率只有 $\frac{1}{6} / (\frac{1}{6} + \frac{2}{6}) = \frac{1}{3}$ 。另一方面從列聯表 (表 5) 也可以看出「不換」中獎機率是 $\frac{1}{3}$ ，而「換」的中獎機率是 $\frac{2}{3}$ 。

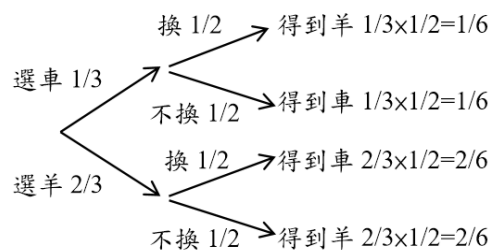


圖 3 霍爾問題 3 門情形樹狀圖

表 5

霍爾問題 3 門情形列聯表

	選擇第 2 個門且決定不換			選擇第 2 個門且決定換		
	選擇 1	選擇 2	選擇 3	選擇 1	選擇 2	選擇 3
獎品在 1	輸			獎品在 1	贏	
獎品在 2		贏		獎品在 2		輸
獎品在 3			輸	獎品在 3		贏

在「測試學生的理解程度」階段，教師的推廣問題是：

如果今天有 1000 扇門，只有一輛汽車放在其中一扇門後面。如果你選擇 1 扇門，而知道獎品所在的主持人打開其他 998 扇門，此刻只有你原本選擇的那扇門和另外一扇門，你會選擇「換」還是「不換」？選擇「換」和「不換」獲得汽車的機率是多少？

這問題在測試學生的邏輯推理，看他們是否能夠舉一反三。但由於從 3 扇門直接跳到 1000 扇門，恐怕學生在概念上難以連接，教師先以 4 扇門和 5 扇門做為「前導組體」(advanced organizer)，希望學生能從 4 扇門和 5 扇門出發，逐步猜測推論出必須選擇「換」，且獲得汽車的機率是 $999/1000$ 。

(二) 教案實施現場觀察

條件機率問題本身不容易根據直覺判斷，本質上比古典機率困難。在這 50 分鐘的教學當中無法期望學生對於條件機率能有全面性的理解，故本教案旨在觀察學生是否能掌握條件機率的推理規律以進一步計算 1000 扇門時的情形。本次教案實施的場合是某次暑假高中數學營隊活動，由本文作者親自進行教學，參加成員從高一到高三，共有 37 人。從最後蒐集的學習單中得知，

其中 20 人正確回答推廣問題，一開始盲目選一扇門會抽中汽車的機率是 $\frac{1}{1000}$ ，抽中羊的機率是 $\frac{999}{1000}$ ，無論選哪一扇門「換」與「不換」的機率各是 $\frac{1}{2}$ ，因此共有四種情形：

1. 選到車決定「換」會得到羊，機率為 $\frac{1}{1000} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2000}$ (A)
2. 選到車決定「不換」會得到車，機率為 $\frac{1}{1000} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2000}$... (B)
3. 選到羊決定「換」會得到車，機率為 $\frac{999}{1000} \times \frac{1}{2} = \frac{999}{2000}$ (C)
4. 選到羊決定「不換」會得到羊，機率為 $\frac{999}{1000} \times \frac{1}{2} = \frac{999}{2000}$... (D)

因此無論選哪一扇門，若決定「換」而得到車的機率為 $\frac{(C)}{(A)+(C)} = \frac{\frac{999}{2000}}{\frac{1}{2000} + \frac{999}{2000}} = \frac{999}{1000}$ ，而決定

「不換」會得到車的機率為 $\frac{(B)}{(B)+(D)} = \frac{\frac{1}{2000}}{\frac{1}{2000} + \frac{999}{2000}} = \frac{1}{1000}$ 。圖 4 是某生學習單的內容。

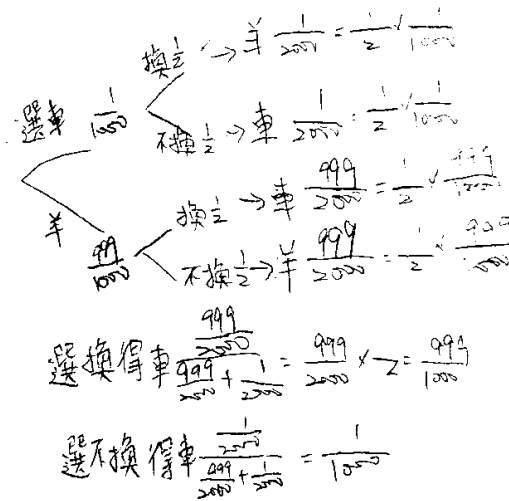


圖 4 學生計算條件機率樹狀圖

19 位成功回答推廣性問題的學生對於這次學習活動抱持較高的滿意度，回饋意見大致上可以分為兩類，一類是對於機率問題的思考更為深入，例如 A 生說之前對於條件機率都只知道怎麼算，但都不曾瞭解為什麼，經過這次活動，覺得這種邏輯的問題比純計算的數學有更多思考上的樂趣。另一類意見是不要輕信直覺，B 生就認為機率在不同的情況下不見得能套用同一種方法計算，C 生則說以數學的角度去看會發現結果很令人意外。不過，對於數學推導出的結果與直覺的落差，仍有學生覺得「以現實角度看來仍然有點難以理解」(D 生)。從以上回應可以看出，對於條件機率計算出違背直覺的結果，有人讚嘆，也有人仍抱持懷疑態度。另外 17 人只能部分回答，甚至完全無法回答問題。至於無法回答推廣性問題的學生，大部分的困難分成兩類，一部分是以乘法律求獨立事件發生機率的觀念薄弱，另一部分則是仍無法掌握樹狀圖的推理過程。這些人的回應就較為保守或是消極。E 生就表示雖然照算式還是能算出來，但是還無法掌握規律。

(三) 教案反思

對一般高中學生而言，與古典機率相較，條件機率屬於比較難以理解的單元，所以本教案嘗試從一個有趣的問題開始引發學生對直覺的懷疑與思考，再經由發現規律與邏輯推理，洞悉直覺的盲點。以試教結果而論，大約一半學生在觀察分析 (I&G-S)、邏輯論證 (D&P-L) 和發現規律 (I&G-P) 這三個數學文化能力指標上有所進步，雖已達成部分成效，但仍有接近一半的學生無法掌握條件機率的思考過程。究其原因有二，首先是學生成員的年級別不一，從高一到高三，從第一類組到第三類組都有，所以可能導致試教結果差異性大。其次，即使教案試教時即使已經以 4 扇門和 5 扇門的情形讓學生學習推廣，但短短五十分鐘時間可能仍不足以讓部分學生理解條件機率之內涵和規律並進行推理。針對第二個原因，未來修編教案時可以考慮將施

教時間延伸為一百分鐘，讓學生有比較充分的時間思考，並納入條件機率的公式解法（在事件 A 已發生之條件下， B 事件發生的機率 $P(B|A) = \frac{n(B \cap A)}{n(A)}$ ），如此或許學生能夠從具體到抽象地認識條件機率。

另一個更值得思考的議題但在本教案中沒有處理的問題是「如何讓學生真正理解條件機率和古典機率的差別？」。古典機率是在完全隨機之下所產生的結果，而條件機率卻是在特定條件之下所產生的結果，已經改變原本的樣本空間，即使學生能順利以樹狀圖算出機率，對於這一點學生可能也難以體會。黃文璋（2010）特別強調“機率很難，尤其條件機率”（p. 14），條件機率的特性是機率值會因條件而改變。如前面所提「三卡問題」，當我們說「隨機從帽中拿出一張卡片並將其放到桌上」，這時是古典機率，每張卡片被抽到的機率是三分之一。但是當我們說「已知正面是藍色」時，後面的問題就變成條件機率問題，樣本空間已經因這句話而改變，其間細微差異不容易體會。所以“在應用機率，特別是處理條件機率時，須得很謹慎，否則極易犯錯”（黃文璋，2010，p. 27）。

伍、結論

傳統的數學教學最為人詬病的就是缺乏情境脈絡，直接從抽象的數學觀念出發，以至於無法引起學生學習動機，而由於數學文化強調數學知識的人文、社會和歷史脈絡，引入數學文化恰可以彌補此一缺失。本研究基於數學人文精神發展出數學文化素養的教案，並實地針對國中生與高中生進行教學觀察。初步觀察結果發現，學生對於這兩份數學文化教案均表現出高度肯定，也能從教學活動中掌握所與傳達的數學規律。不過仍有未臻理想之處。「費波納西數列」教案一開始以「電影達文西密碼」的片段吸引學生注意，緊接著透過「兔子繁衍問題」讓學生學習掌握數列的遞迴規律，之後介紹植物界的費波納西數列和「 $64=65?$ 」活動深化學生對費波納西數列的認識，最後要求學生依據給定的遞迴規則（從第三項起，每一項都跟前兩項相關）自行創作數列。觀察結果顯示，學生對於費波納西數列的性質和「 $64=65?$ 」活動印象深刻，而自行創作數列的活動在認知和情意兩方面學生都表示滿意，但是很少學生在回饋單上主動提到歸納推理，因此對於培養學生歸納推理的成效不如預期。這可能是由於授課教師的時間考量，並沒有給學生充分時間探索第六、七個月的兔子對數，反而是在學生尚未計算出之前直接說出結果所致。另外，學生對於自然界植物中所隱藏的費波納西數列密碼的印象不深，這可能是課堂只是以圖片介紹，沒有讓學生親自接觸這些植物有關。根據 Kaygin 等人（2011）的研究結果，由於學生實際觀察並計算毬果鱗片的螺旋，學生被自然界的數學密碼所吸引。因此未來可以發展跨領域教學教案，讓學生實地到野外做植物觀察。再者，Marchisotto（1993a）透過讓學生裁切卡片親身發現「 $64=65?$ 」活動中視覺經驗的盲點，進而體認幾何證明的重要。但由於本教案

對象是國一學生，且囿於時間關係因而並未實施。未來若針對國二以上學生，可以考慮在教案中納入此動手做活動，強化有感學習。

「霍爾遊戲」教案則是透過有趣的遊戲，讓學生體驗條件機率不能只依據他們在古典機率中所習得的規則求解。為了使學生有感，教案中先從小樣本的信封抽獎開始，再進階到大樣本的網站遊戲，讓學生逐步體驗到「換」與「不換」的機率確實有所差別。接著透過樹狀圖和列聯表進行推理分析，以驗證（但非證明）「換」的策略確實贏得獎品的機率較高。為檢驗學生的理解程度，先以 4 扇門和 5 扇門做為「前導組體」讓學生熟悉樹狀圖的結構和策略，再要求他們計算出當有 1000 扇門時選擇「換」的策略所獲得汽車的機率。觀察發現，只有 54% 的學生能正確回答 1000 扇門的推廣問題，其他人只能部分回答，甚至完全無法回答問題。這結果證實許多文獻所提到學生學習條件機率時所遭遇的困難，包括違反直覺、情境條件解讀錯誤和無法掌握正確的樣本空間等等。可見 50 分鐘的教案雖然可以讓學生理解單一問題，但是卻沒能幫助他們掌握問題的一般性。Burns 與 Wieth (2004) 的心理實驗結果顯示，做出錯誤選擇的原因是沒能理解這問題的「對撞結構」所隱藏的意涵，即 Glymour (2001) 所說的，「獎品在哪一道門」和「觀眾選擇哪一道門」兩個看似獨立的因素，因為「主持人打開哪一道門」而產生對撞。但若經過提醒與練習，受試者在類似問題的表現上會更好。此外 Tomlinson 與 Quinn (1997) 指出，學習條件機率時如果要讓學生獲得理性判斷所必需的數學技能，教學時必須專注於挑戰個人主觀偏見，並藉由認知心理的啟發方式，適時展示機率推理的力量。所以若將教案延伸為一百分鐘，除樹狀圖和列聯表的教學之外，是否應納入條件機率的公式解法，以讓學生理解數學以簡馭繁的思維特性，這有待未來研究進一步證實。

由於本研究所發展的教案時間只有短短一節課，無法進行長時間教學實驗並觀察成效，所以得到的研究結果其推廣的價值受到限制。當初之所以只發展單節教案的主要考量在於學校教師不可能長時間進行數學文化素養的教學，因此單節教案比較適合學校教師隨時彈性使用，屬於實務上的考量。有鑑於許多研究都已指出融入數學史的教學對於學生的數學知識信念或數學觀有正面的影響 (Depaepe, De Corte, & Verschaffel, 2016; Liu, 2009, 2014)，而目前許多高中均開設數學選修課程，未來將可以進一步發展一整學期的數學文化素養課程，並觀察此課程對於發展高中學生的數學知識觀點有何助益。

誌謝

本文是科技部專題研究計畫 MOST 105-2511-S-167-001-MY3 研究成果之一部份，感謝科技部之經費支助和匿名審查者與編輯委員所給予之建議和修正。本文所表達之論述係作者個人觀點，不代表科技部之立場。

參考文獻

- 丘成桐 (2013)。一本具國際觀的數學普及雜誌。《數理人文》，1，1。【Yau, Shing-Tung (2013). A popular mathematics magazine with an international outlook. *Mathematics, Science, History and Culture*, 1, 1. (in Chinese)】
- 方延明 (2007)。《數學文化》。北京：清華大學出版社。【Fang, Yen-Ming (2007). *Mathematical culture*. Beijing: Tsinghua University Press. (in Chinese)】
- 易南軒、王芝平 (2007)。《多元視角下的數學文化》。北京：科學出版社。【I, Nan-Hsuan, & Wang, Chih-Ping (2007). *Mathematical culture in terms of multiple perspectives*. Beijing: Science Press. (in Chinese)】
- 黃文璋 (2010)。機率應用不易。《數學傳播》，34 (1)，14-28。【Huang, Wen-Jang. (2010). Probability application is not easy. *Math Media*, 34(1), 14-28. (in Chinese)】
- 張維忠 (2011)。《數學教育中的數學文化》。上海：上海教育出版社。【Chang, Wei-Chung (2011). *Mathematics culture in mathematics education*. Shanghai: Shanghai Education Press. (in Chinese)】
- 劉柏宏 (2015)。數學知識是真理嗎？《通識在線》，58，29-33。【Liu, Po-Hung (2015). Is mathematical knowledge the truth? *General Education Online*, 58, 29-33. (in Chinese)】
- 劉柏宏 (2016)。從數學與文化的關係探討數學文化素養之內涵—理論與案例分析。《臺灣數學教育期刊》，3 (1)，55-83。doi: 10.6278/tjme.20160413.001 【Liu, Po-Hung (2016). Discourse on the constituent of literacy for mathematical culture in terms of the relationship between mathematics and culture - Theoretical and case analysis. *Taiwan Journal of Mathematics Education*, 3(1), 55-83. doi: 10.6278/tjme.20160413.001 (in Chinese)】
- 劉柏宏 (2021)。論數學文化與數學教育的關係。《臺灣數學教育期刊》，8 (1)，79-88。doi:10.6278/tjme.202104_8(1).004 【Liu, Po-Hung (2021). On the relationship between mathematical culture and mathematics education. *Taiwan Journal of Mathematics Education*, 8(1), 79-88. doi:10.6278/tjme. 202104_8(1).004
- Ainsworth, N. (1970). An introduction to sequence: Elementary school mathematics and science enrichment. *The Arithmetic Teacher*, 17(2), 143-145. doi: 10.5951/AT.17.2.0143
- Burns, B. D., & Wieth, M. (2004). The collider principle in causal reasoning: Why the Monty Hall Dilemma is so hard. *Journal of Experimental Psychology: General*, 133(3), 434-449. doi: 10.1037/0096-3445.133.3.434
- Burton, L. (2009). The culture of mathematics and the mathematical culture. In O. Skovsmose, P. Valero, & O. R. Christensen (Eds.), *University science and mathematics education in transition* (pp. 157-173). New York, NY: Springer. doi: 10.1007/978-0-387-09829-6_8
- Cai, J. (1995). *A cognitive analysis of U.S. and Chinese students' mathematical performance on tasks involving computation, simple problem solving, and complex problem solving*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics. doi:10.2307/749940
- Courant, R., & Robbins, H. (1941). *What is mathematics? An elementary approach to ideas and methods*. New York, NY: Oxford University Press.
- Davis, P. J. (2012, June 1). Mathematics as narrative. *SIAM News*, 45(5). <https://archive.siam.org/pdf/news/1986.pdf>

- Depaepe, F., De Corte, E., & Verschaffel, L. (2016). Mathematical epistemological beliefs. In J. A. Greene, W. A. Sandoval, & I. Bråten (Eds.), *Handbook of epistemic cognition* (pp. 147-164). New York, NY: Routledge. doi: 10.4324/9781315795225
- Elbehary, S. G. A. (2020). Discussing the conditional probability from a cognitive psychological perspective. *American Journal of Educational Research*, 8(7), 491-501. doi: 10.12691/education-8-7-7
- Ernest, P. (1996, October 31). The nature of mathematics and teaching. *Philosophy of Mathematics Education Journal*, 9.
<http://socialsciences.exeter.ac.uk/education/research/centres/stem/publications/pmej/pome/pompart7.htm>
- Ernest, P. (1998). *Social constructivism as a philosophy of mathematics*. Albany, NY: State University of New York Press.
- Falk, R. (1986). Conditional probabilities: Insights and difficulties. In R. Davidson & J. Swift (Eds.), *Proceedings of the Second International Conference on Teaching Statistics* (pp. 292-297), Victoria, Canada: International Statistical Institute and University of Victoria.
- Fischbein, E., & Gazit, A. (1984). Does the teaching of probability improve probabilistic intuitions? *Educational Studies in Mathematics*, 15, 1-24. doi: 10.1007/BF00380436
- Glymour, C. (2001). *The mind's arrow: Bayes nets and graphical causal models in psychology*. Cambridge, MA: The MIT Press. [https://doi.org/10.1016/S0001-6918\(02\)00058-6](https://doi.org/10.1016/S0001-6918(02)00058-6)
- Granberg, D. (1999). Cross-cultural comparison of responses to the Monty Hall Dilemma. *Social Behavior and Personality*, 27(4), 431-438. doi: 10.2224/sbp.1999.27.4.431
- Hadamard, J. (1945). *An essay on the psychology of invention in the mathematical field*. New York, NY: Princeton University Press.
- Hersh, R. (1997). *What is mathematics, really?* Oxford, UK: Oxford University Press.
- Jensen, H. J. (2002). Mathematics and painting. *Interdisciplinary Science Reviews*, 27(1), 45-49. doi: 10.1179/030801802225000000
- Kaygin, B., Balçın, B., Yildiz, C., & Arslan, S. (2011). The effect of teaching the subject of Fibonacci numbers and golden ratio through the history of mathematics. *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, 15, 961-965. doi: 10.1016/j.sbspro.2011.03.221
- Keyser, C. J. (1947). *Mathematics as a culture clue*. New York, NY: Scripta Mathematica.
- Kline, M. (1953). *Mathematics in western culture*. New York, NY: Oxford University Press.
- Kline, M. (1982). *Mathematics: The loss of certainty*. New York, NY: Oxford University Press.
- Kroeber, A. L., & Kluckhohn, C. (1952). *Culture: A critical review of concepts and definitions*. Cambridge, MA: The Museum.
- Lakatos, I. (1976). *Proofs and refutations: The logic of mathematical discovery*. Cambridge, UK: Cambridge University Press. doi: 10.1017/CBO9781139171472
- Leikin, R., & Winicki-Landman, G. (2001). Defining as a vehicle for professional development of secondary school mathematics teachers. *Mathematics Education Research Journal*, 3, 62-73.

- Liu, P.-H. (2009). History as a platform for developing college students' epistemological beliefs of mathematics. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 7(3), 473-499. doi: 10.1007/s10763-008-9127-x
- Liu, P.-H. (2014). When Liu Hui meets Archimedes: Students' epistemological and cultural interpretations of mathematics. *Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies*, 24(8), 710-721. doi: 10.1080/10511970.2014.896837
- Liu, P.-H. (2018). An international comparative study on how mathematical culture is implemented in the textbooks. In E. Barbin, U. T. Jankvist, T. H. Kjeldsen, B. Smestad, & C. Tzanakis (Eds.), *Proceedings of the Eighth European Summer University on History and Epistemology in Mathematics Education* (pp. 345-354). Oslo, Norway: Oslo Metropolitan University.
- Marchisotto, E. A. (1993a). Connections in mathematics: An introduction to Fibonacci via Pythagoras. *Fibonacci Quarterly*, 31(1), 21-27.
- Marchisotto, E. A. (1993b). Teaching mathematics humanistically: A new look at an old friend. In A. M. White (Ed.), *Essays in Humanistic mathematics* (pp. 183-190). Washington, DC: Mathematical Association of America.
- Polya, G. (1954). *Mathematics and plausible reasoning*. Princeton, NJ: Princeton University Press.
- Tarr, J. E., & Jones, G. A. (1997). A framework for assessing middle school students' thinking in conditional probability and independence. *Mathematics Education Research Journal*, 9, 39-59. doi: 10.1007/BF03217301
- Thomas, R. S. D. (2002). Mathematics and narrative. *Mathematical Communities*, 24(3), 43-46. doi: 10.1007/BF03024731
- Tomlinson, S., & Quinn, R. (1997). Understanding conditional probability. *Teaching Statistics*, 19(1), 2-7. doi: 10.1111/j.1467-9639.1997.tb00309.x
- Tubau, E., Aguilar-Lleyda, D., & Johnson, E. D. (2015). Reasoning and choice in the Monty Hall Dilemma (MHD): Implications for improving Bayesian reasoning. *Frontiers in Psychology*, 6, 353. doi: 10.3389/fpsyg.2015.00353
- White, A. M. (1993). *Essays in Humanistic mathematics*. Washington, DC: Mathematical Association of America.
- White, L. A. (1947). The locus of mathematical reality: An anthropological footnote. *Philosophy of Science*, 14(4), 289-303. doi:10.1086/286957
- Wilder, R. L. (1950). The cultural basis of mathematics. In L. M. Graves, E. Hille, P. A. Smith, & O. Zariski (Eds.), *Proceedings of the International Congress of Mathematicians* (Vol. 1, pp. 258-271). Providence, RI: American Mathematical Society.
- Wilder, R. L. (1968). *Evolution of mathematical concepts: An elementary study*. New York, NY: Wiley.
- Wilder, R. L. (1981). *Mathematics as a cultural system*. Oxford, UK: Pergamon Press. doi: 10.1016/C2013-0-00708-6

蘇意雯 (2021)。
中小學數學史教案開發與實作研究。
臺灣數學教育期刊，8 (1)，27-53。
doi: 10.6278/tjme.202104_8(1).002

中小學數學史教案開發與實作研究

蘇意雯

臺北市立大學數學系

本研究主要由研究者及在職教師共同規畫開發十二年國教的數學史素材，以及進行實作。整個研究執执行程序包含文件分析與文本研讀、教案發展以及教案成效評量。本研究針對數學主題，蒐集、研讀與討論相關的數學史文獻，完成托勒密定理與和角公式、最大公因數、分數與十進位制小數等中小學數學史素材的開發及相關教案設計。從研究的過程及實作成果，發現所開發之中小學數學史教案獲得教師和學生的正面肯定，顯見數學史素材融入中小學數學教學之可行性。本研究希望能提供國內數學教育社群相關參考資訊，也可以充實數學史素材資料庫，以利各階段教師之用。

關鍵詞：數學文化、數學史、數學教學

通訊作者：蘇意雯，e-mail：yiwen@utapei.edu.tw
收稿：2021年1月25日；
接受刊登：2021年4月9日。

Su, Y. W. (2021).

Research on the development and implementation of lesson plans for the history of mathematics in primary and secondary schools.

Taiwan Journal of Mathematics Education, 8(1), 27-53.

doi: 10.6278/tjme.202104_8(1).002

Research on the Development and Implementation of Lesson Plans for the History of Mathematics in Primary and Secondary Schools

Yi-Wen Su

Department of Mathematics, University of Taipei

This study primarily represents a collaborative effort between researchers and in-service teachers in designing teaching activities and developing history of mathematics lesson plans for primary and secondary school students. At first, we studied and analyzed relevant literature documents for 12-year basic education to identify available and valuable materials. The development of lesson plans was followed by a validity check, on-site teaching, and result evaluation. The research aimed to collect, discuss, and investigate the related history of mathematics literature to develop materials and resources for teaching in primary and secondary schools the following topics: Ptolemy's theorem and trigonometric identities, the greatest common factor, fractions and decimals. The research process and results demonstrated that the developed history of mathematics materials had a positive effect on the students and also displayed the feasibility of integrating the history of mathematics into primary and secondary school mathematics teaching. We hope this study can provide valuable information to practitioners in mathematics education and enrich the database for the history of mathematics.

Keywords: mathematical culture, history of mathematics, mathematics teaching

Corresponding author : Yi-Wen Su · e-mail : yiwen@utapei.edu.tw

Received : 25 January 2021;

Accepted : 9 April 2021.

壹、前言

數學家 Richard Courant 在 Morris Kline《西方文化中的數學》(Mathematics in western culture) 一書中提到，許多世紀以來，人們一直遵循數學是文化的組成部分之傳統，但在我們這個教育普及的時代，這一傳統卻被拋棄了。大量枯燥乏味、商業氣十足的教科書和無視智力訓練的教學風氣，在教育界掀起了一股反數學的浪潮。然而，我們深信公眾依然對數學有濃厚的興趣(Kline, 1953/1995)。日本數學史研究學者平山諦在《東西數學物語》中也說，不管東方還是西方，兩千年以來數學一直被人類所喜愛，誠然這不是為了考試，也不是為了單純的應用，而是因為人類有追求真理、提高教養的慾望所致，於是數學就成了文化的一個基準(平山諦, 1956/2005)。近年所提倡素養導向的教育，對於數學教師而言，如何在數學領域提升學生國民素養？給予學生機會嘗試感受數學的創造歷程，在教學中融入數學文化素材的方法，提升學生的學習興趣，豐富學生對數學的認識，感受數學在人類歷史上的貢獻，及其文化魅力和人文價值，正是一個可行的方式(李國偉、黃文璋、楊德清、劉柏宏, 2013)。

教育部在之前國民中小學九年一貫課程綱要曾強調：「在教師教學裡，引進與主題相關的數學史題材，對學童的學習會有很正面的意義，尤其能協助學童將抽象觀念具體化。」(教育部, 2008)。至於現行的十二年國民基本教育數學領域課程綱要中也提及數學是一種人文素養(教育部, 2018, p. 1)：

人類各種族文明造就出不同的思維文化，例如，古代東方數學偏向具象方式的歸納推理，而西方則傾向抽象方式的演繹思考，數學史能夠幫助我們理解數學發展在不同時期與不同文化的差異，更能協助教師釐清數學學習的主軸。所以適時地在數學教學之中融入適當的數學史內容，可以提升數學教學品質與學生的學習成效。

可見，數學史素材在數學教學中正可以扮演正向的輔助角色。

但是就實際面而言，數學史相關素材搜尋不易，就算教師有心想要實施，第一個面臨的便是素材何處尋的問題(蘇意雯, 2011a)。Panasuk 與 Horton (2012) 針對 367 位中學數學教師所做的線上調查顯示，雖然大部分的教師都認同數學史在數學學習上的價值和地位，但是數學史相關資源的缺乏卻是他們沒有在課堂上運用數學史的主要原因之一。另一個同樣針對 38 位中學數學教師所做的研究顯示，大多數老師沒有在他們的課程中使用數學史，使用數學史的那些教師是在課堂開始時，藉由提及數學家的生平故事以及古代文明對數學的貢獻，引起學生的動機。另外該研究也發現，總體而言，教師只擁有較低層次的數學史知識，那些在課堂上沒有使用數學史的教師在數學史知識上的得分比在課堂上有使用數學史的教師為低(Bütüner, 2018)。

對照國內狀況，上文提過目前實施的十二年國教課綱強調「數學是一種人文素養，宜培養學生的文化美感」（教育部，2018）。針對 1992 年至 2017 年間的碩博士論文分析，有 143 篇涉及數學史與數學教育相關議題之學位論文（蔡文榮、張鈞淇、劉柏宏，2019）。有數學素養的人必應具備某種程度的數學文化內涵，透過數學文化融入教學，可以引領學生領略數學實境，進而欣賞數學與文化的關係（劉柏宏，2016）。對於強調素養取向的新課綱而言，鼓勵教師運用數學史融入數學教學正是一個值得關注的議題。

因此，本研究由師資培育者及在職教師共同規畫開發十二年國教的數學史素材，希望能方便現場教師擷取運用，也希望經由此一進路，讓學生在數學思維發展的脈絡鋪排中，更能清楚所學的數學主題，增進學習興趣和概念理解。目前國內已開發之數學史教案多為需要數節課實施（蘇意雯，2011b；蔡文榮等人，2019），而有心嘗試數學史融入數學教學的現場教師也容易由於教學時數的限制及教學進度的考量而裹足不前（蘇意雯，2011a）。有鑒於此，本研究團隊視單元需要，將搜尋到之素材串連成一節課的教案形式，所開發之數學史素材，包含了原始文本，也鋪排數學家生平事蹟介紹，包含學生之學習工作單，方便現場教師使用。此外目前數學史融入數學教學多為針對特定年級發展相關教案的研究（蔡文榮等人，2019），並沒有透過縱貫多個年齡層的教案研發來歸納共同點或是需要考量的面向，因此，本研究配合十二年國民基本教育數學課綱內容，發展出高中、國中及國小各階段的數學史教案，並透過實地教學、觀察、與分析，檢測數學史教案之成效。本研究之主要目的為：開發配合十二年國教數學課綱內容之數學史教案，並檢驗所開發出的數學史教案之成效。與之對應之研究問題如下：

- 一、如何開發配合十二年國教數學課綱內容之數學史教案？
- 二、所開發出的中小學數學史教案之成效為何？

貳、文獻探討

一、數學文化探討

在西方文明中，數學一直是主要的文化力量，數學在使人賞心悅目和提供審美價值方面，可與任何一種文化媲美（Kline, 1953/1995）。數學文化不是數學與文化，而是一種由數學物件的形式建構而成的特殊文化，是人類文化系統中的一個子系統；是人類文化中一個有機組成部分，與其他各種成分密切相關，並在相互影響中共同發展（童莉，2006）。數學文化是人類探索數學知識時其行為的外顯和內隱模式，並藉由人類群體，特別是數學家社群，所創造獨特成就的符碼（符號、圖形或文字）來傳遞。數學文化可說是人類探索數學知識的各種外顯和內隱行為的模式，而數學知識就是藉由數學家社群所創造的獨特符碼，它可能以符號、圖形或文字的形式來傳遞（劉柏宏，2016）。也就是說，數學以數學家和數學知識為中心去發展，其邊界與民族、

社會、歷史、文化相互作用、時時滲透，文化在歷史上發揮了一定的重要作用（李國偉，2013）。de Lange（2003）認為從歷史、哲學和社會觀點欣賞數學是當務之急，Niss 與 Højgaard（2011）也認為不能只把數學當做一個理論學科看待，也應該重視與其他領域的連結，特別是和文化與社會的連結，尤其是數學史和統計史。從歷史角度來看，數學最初只是人類文化的一部分，但之後隨著數學本身和人類文明的進步，數學逐漸表現出相對的獨立性（張維忠，2011），數學的歷史面向正是我們所不可忽視的。

部分數學知識因應社會所需而社會化，而社會問題數學化的成果也反饋到數學本身。數學依社會進步而發展，社會因數學發展而進步（方延明，2007）。赫希（R. Hersh）有一段關於數學知識風貌的比喻，他形容數學就像一個出色的餐廳，在前面的用餐區，顧客們享用著乾淨且精心烹製的數學菜餚。可是在火熱的廚房中，數學家卻在看起來雜亂無章的環境中，烹調著他們的「新知識」（引自 Hellman, 2006/2009）。過程是掌握知識本質一個不可或缺的環節（洪萬生，2009），在社會文化的脈絡下，社會團體及社會氛圍正會影響數學的發展以及數學家之間的互動，數學家所處的學術環境會影響數學家之研究，數學知識的發生也與當代社會之進展有著交互關係。介紹數學的社會面向，正有助於學生體認數學知識與社會之關聯（蘇意雯，2015）。

數學知識經常被視為超越種族地域的真理，但客觀事實也說明，數學知識的發展仍具有民族的歧異性。近年興起的民族數學（ethnomathematics）研究可看成是一種關於數學的人類文化學（張維忠、唐恒鈞，2008）。什麼是民族數學呢？根據 Borba（1990）的說法，所謂的民族數學就是特定文化族群所表現出來的獨特數學概念。值得注意的是，在這裡的「ethno」和「mathematics」應該用更宏觀的角度來考量。也就是說，「ethno」不再如過去般僅僅代表生物性的「種族」，而是意指「文化族群」。此外，舉凡做算術、歸類、排序、遞推、統計等等一系列的活動都可稱為「mathematics」。在不同的時代、不同的地點，人們由於生活的需要，或者為了對周遭的現象尋求解釋，會隨著各自的文化環境，發展出一套解決問題的工具、技術和理論，民族數學是不同文化背景所體現的數學概念，不同民族的文化遺產都值得珍視，也是後代子孫的寶藏（蘇意雯，1994）。因此，讓學生了解數學的民族面向，也是不可或缺的一環。

美國歷年來的數學課程指引一向重視數學知識的人文面向。例如美國數學教師協會（National Council of Teachers of Mathematics [NCTM]）早在 1989 年就指出，要瞭解數學的價值就必須讓學生認知到數學與歷史情境間之互動，與此兩者互動結果對我們文化與生命的影響（NCTM, 1989）。2000 年則再次強調在此快速更替的世界中，數學是人類最偉大的文化和智識成就之一，公民應發展對此成就的珍視和理解，包括其美感甚至娛樂面向（NCTM, 2000）。透過數學文化融入教學，正可以引領學生領略數學實境，進而欣賞數學與文化的關係（劉柏宏，2016）。

至於為何在數學教學現場，需要布置數學史素材呢？Heiede（1992）認為教數學還必須教數

學史，因為一個學科的歷史也是該學科的一部份，就像是如果沒有意識到即使是對數也有自己的發展軌跡，你也像沒有學過對數一樣。這樣的認知對於小學和國中階段的教師更為重要，因為孩子們對數學所形塑的第一個印象往往也是非常持久的。對於國小師資培育過程中的分數主題教學，Park、Güçler 與 McCrory (2013) 雖然不強調分數的歷史發展應該是課程的一部份，但是認為一個很重要的面向就是，讓師資生從中了解到即使是對過去的數學家或是目前的學生而言，「視分數為一個數」都不是一件顯而易見的事，讓這些未來的國小教師能有足夠的機會充實他們自身的學科內容知識，也更能理解將來任教的學生對於分數的思考。Mann (2011) 發現英國數學史社群的多樣性面貌，也影響了數學史學科本身的發展，例如在大學教學上，由於質量保證機構 (Quality Assurance Agency [QAA]) 關注於發展溝通以及批判性思考等畢業技能，也鼓勵了對於數學系學生教授數學史模組。同樣的，也有許多熱情的學校數學教師被歷史所吸引，並使用歷史資料來激勵他們的學生。資格和課程發展機構 (Qualifications and Curriculum Development Agency [QCDA]) 最近也將「歷史和文化脈絡」納入學校數學課程，這也顯示了數學史是有價值的教育工具 (Mann, 2011)。事實上，早前 Fasanelli (2000) 分析中國、希臘、義大利、荷蘭、波蘭、澳洲、巴西、丹麥、法國、紐西蘭、挪威等等國家的課程綱領，就發現數學史可以在情意、認知、文化活動相關部分的啟發上佔有一席之地。下一節，我們將探討如何將數學史融入數學教學。

二、數學史與數學教學

承上所述，我們得知數學史素材的引用，可以涵蓋情意、認知及文化活動等面向。對教師而言，適當的史料剪裁及文本的提供，正可以當作教學上的範例，幫助學生對於數學重要概念的體會和啟發，於數學教學時適當引入 (洪萬生, 2002; 蘇意雯, 2011a, 2011b, 2018; 蘇意雯、黃俊瑋、陳靜惠、林明怡, 2014)，開發數學史教案，讓學生知曉數學之歷史脈絡，領略數學文化面向，將素材與更多社群同儕分享，正是研究者執行本研究之目的。

本研究所開發的數學史教案，主要關注於數學思維發展的歷史脈絡以及各民族文化的數學知識產物。教師在課堂中，可以就多元面向，向學生分享數學文化的關懷，以下研究者將分別加以敘述並舉實例詳細說明。

教師可在講課中穿插介紹數學家的生平事蹟以及奮鬥過程，例如祖沖之父子竭盡心力割圓，終於提出圓周率近似值，領先世界的傑出成就，讓學生興起向大師學習的壯志，以及「有為者亦若是」的豪情。另外也可以讓學生經由認識各民族所呈現之各具特色的數學發展，進而珍視數學的文化性 (洪萬生, 1998、2002; 蕭文強, 1992; Tzanakis & Arcavi, 2000)。例如介紹日本數學家如何藉由繪馬傳統，衍伸出算額，從而促進日本本土數學的發展，形成日本數學的獨特樣貌，讓學生明白地域的不同，會孕育出不一樣的數學風情 (蘇意雯, 2007, 2011b)。

教師也可以對數學符號或是數學概念的源起，加以整理，適度介紹，幫助學生知曉數學知識與人類活動之關聯。也就是透過對數學文化遺產的緬懷、追溯、獵奇與探索，讓學生得以認識古算家的數學思維與發展軌跡，進而領會文化交融的啟發與創意。例如從歷史源流看虛數思想發展的過程，由 Cardano (1501-1576) 到 Bombelli (1526-1572) 解三次方程式時第一次不得不正視複數，到 19 世紀數學上接納這些數，經過相當長一段時間的發展，數學家花了幾世紀才解決了這個問題。此外，在強調跨領域的現代，教師也可以從數學史中搜尋能與其他領域連結之素材，讓數學的學習更為豐富。例如安排數學詩題材，進行數學與文學之結合，從古代數學詩解題到現代數學詩賞析，並讓學生嘗試數學詩創作，此教案正可以和國文領域連結，達到跨領域的學習目標。

對於數學知識內容的闡釋，教師可以妥善運用古文本上的問題，作為啟蒙例之用，讓學生古今觀照，比較現行策略和原始文獻之異同。也就是說我們可以在數學發展史中，找出與教科書的單元有關之適當的歷史素材，使學生有所參照。例如在高中階段雖然用三角形面積公式和餘弦定理可以導出海龍公式，但是教師也可以補充被譽為初等幾何中最高明的數學證明之一的海龍公式原始證法，或是中國秦九韶等價於海龍公式的三斜求積術。此外還可以藉由文本讓學生比較各種不同的解題方法或思考方向，解放對數學的單一思考方式。例如提供畢氏定理的多種證法，從希臘歐幾里得的《幾何原本》中利用全等三角形的想法，到中國趙爽直接由面積看出關係的弦圖等等。事實上，恰當運用古代文本，也能造成學生的認知衝突，進而釐清學生的觀念，例如在機率教學時，提供賭金分配問題，藉由數學家佩西歐里 (Luca Pacioli, 1445-1517)、卡爾連奇 (Filippo Calandri, 1467-1512)、費馬 (Pierre de Fermat, 1601-1665)、巴斯卡 (Blaise Pascal, 1623-1662) 的不同想法，提供學生討論及探索的機會 (洪萬生, 1998, 2002; 蕭文強, 1992; 蘇意雯, 2007, 2011b; 蘇意雯等人, 2014; Tzanakis & Arcavi, 2000)。

荷蘭數學家也是數學教育大師 Freudenthal (1973) 認為數學是人類的活動，數學必須與現實連結、接近孩童的經驗、與社會相關。Gravemeijer (1989) 提出引導式再發明、教學現象學以及必要的建模三個啟發式的教學設計。再發明原則首先建議教學設計者關注數學史以明瞭在時間長河中，確切的數學實作發展，也建議必須探究從學生非形式化的解釋以及解法是否可能預期更多的形式化數學實作，如果答案是肯定的，那麼學生初始的非形式化推理就可以當成再發明過程的起點。利用歷史資源，教師也能有效提供、支持不同狀況的學生學習 (Michalowicz, Daniel, FitzSimons, Ponza & Troy, 2000)。事實上，數學不同部分的諸多連結確實存在，關注歷史是察覺這些連結的一種方法，對於我們以及學生而言，知道一個概念的歷史，可以導向更深層的理解，且經由學生的積極參與，可以提升他們的數學成就感 (Berlinghoff & Gouvêa, 2004/2008)，數學史之重要性可見一斑。

對於數學史融入數學教學的方式，除了以說故事口語講述方式實施、以學習工作單方式實施、以數學史動畫或影片輔以學習工作單方式實施（蘇意雯，2011b；蔡文榮等人，2019），數學史料還能結合現代科技，以電子繪本的形式賦與學生更新的感受及多樣化的選擇（蘇意雯，2020），不過在數學課堂上，教師口述數學史以及學習工作單輔助和課程結合，是較為常用的方式。

如前文所述，目前實施的十二年國教數學課綱提到「數學史能夠幫助我們理解數學發展在不同文化的差異」、「教科用書之編寫可適當編入數學史、民族數學及數學家介紹，以引發學生興趣、培養其欣賞數學發展的素養，並了解不同性別者的成就與貢獻。」（教育部，2018），可見數學史在國內數學教學上所受到的關注。事實上，國際數學教育學界早在 1970 年代起，就開始注意在數學教學上輔以歷史取向。數學史與數學教學的關聯之國際研究群（International Study Group on the Relations between the History and Pedagogy of Mathematics）也因此應運而生。此研究群關切數學史與數學教學之關聯，致力於數學史學對數學教育的應用，目的是利用數學史的研究成果，以及數學史與數學教育的互動，進而提升數學教師的教學品質與學生的學習成效（洪萬生，1998）。研究者身為此研究群諮詢委員會之成員，也嘗試發展臺灣本土中小學數學史教案，期能與國際學界交流分享。

參、研究設計

一、研究方法

本研究為質性研究，研究團隊共同討論搜尋適用於十二年國教數學課程的數學史素材，編製成教案，進而實施於教學現場，並觀察學生的反應。針對數學史教案的開發及實作，主要是依循研究者從詮釋學的理念出發，沿用由 Jahnke 的「雙圈」(twofold circle)之概念(Jahnke, 1994)，考慮文本、脈絡和讀者的關係，以及 Horng (2006) 的詮釋學(循環)四面體所發展出來的 HPM (History and Pedagogy of Mathematics) 實作之模型(如圖 1 所示)(蘇意雯，2004, 2007, 2011b; Su, 2006)。在此模型中上方的 T 代表教師教學；左圓中 E 代表教科書編者；S 代表課程標準；K 代表數學知識；C 代表教科書內容；M 是古代數學家；右圓中 O 是數學物元；T 是數學理論；I 則是體會各循環之後的自我詮釋。由 E、S/K 和 C 這三者的循環組成了 C₁ 的圓，M、O 及 T 三者的循環則組成了 C₂ 的圓。研究團隊經過 C₁ 循環，詮釋了解教學內容和目標之後，再到 C₂ 尋找史料，詮釋所蒐集到的數學史素材是否符合 C₁ 的內涵，若覺得在史料上有所欠缺，必須再回到 C₂ 搜尋，再經過自我詮釋後編製成教案，實施於教學。

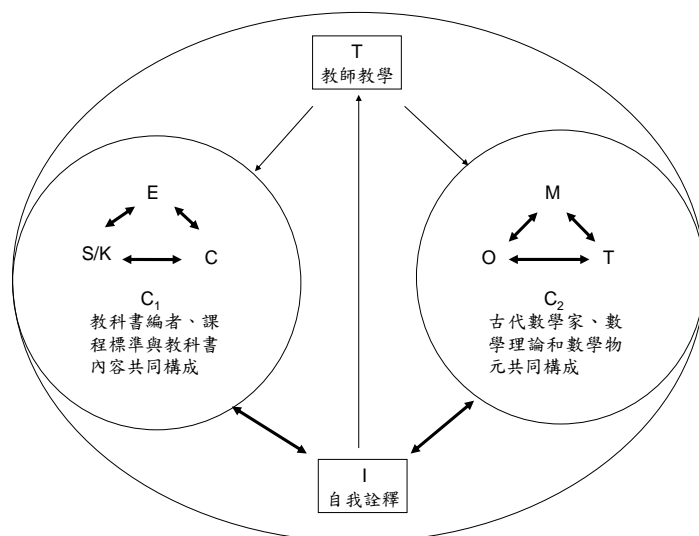


圖 1 HPM 實作之模型。引自「運用古文本於數學教學—以開方法為例」，蘇意雯，2007，台灣數學教師(電子)期刊，9，65。

本研究開發適於十二年國教數學課程之數學史教案實施於教學，進而明瞭學生之學習成效。參與研發及教學實驗教師共 8 人，教學實驗對象及人數分別為國小學生 46 人、國中學生 160 人以及高中學生 166 人。教學實驗之研究工具為學習工作單以及課程實施學生學習意見表和教師的回饋意見表。本研究資料收集方式，主要以「觀察」、「文本收集」、「問卷」等方式取得，藉由資料來源與蒐集方法的多元性，探究數學史教案融入數學教學之成效，提高研究資料的可信度。由「觀察」所收集到的資料，是指教學現場之觀察記錄，「文本收集」包含學生的學習單，以及參與教師的實作心得。「問卷」指的是學生和教師的回饋意見表，從這些資料中，我們可以更清楚得知所開發出數學史教案之適切性。

二、研究步驟

本研究為中小學數學史教案開發以及教學實踐，研究者依照上述 HPM 實作之模型發展中小學數學史教案，並加以實踐。Fink (2003, 2005) 提出在課程規劃之前，必須考慮三大情境因素，那就是學習目標：「我想要讓學生學習什麼?」、教學和學習活動設計：「為了達成學習目標師生應該如何做?」，以及回饋及評量：「師生如何知道達成了學習目標?」。這三大要素應形成一個設計迴圈，彼此支持及增強。本研究的目標是分析數學史相關文本，從中擷取資源，開發中小學數學史教案，並進行教學，讓學生經由數學文化面向，學習到相關之數學知識內容，藉由學習工作單以及問卷等研究工具加以評鑑。研究者參考密西根大學教學研究中心 (Center for Research on Teaching and Learning) 所揭示的準則 (http://www.crlt.umich.edu/gsis/p2_5)，教案設計遵照 1. 列出學習目標、2. 準備開場白、3. 規劃學習活動、4. 測試學生的理解程度、5. 準備

結語與預告以及 6. 設定進程時間表等六個步驟進行。本研究開發適合中小學使用之數學史教案，為方便教師教學使用，每個教案設定教學時間為一節課。

在教師教學階段，也就是研究團隊將所編製之中小學數學史教案經過專家諮詢及修改後，研究者延請現場教師於中小學數學課堂，進行教學。針對教學實驗的結果，提供研究者對於主題選擇、順序邏輯性、素材呈現方式、估計時間、學生反應等方面加以反思及改進，使下一次再度進行的 HPM 實作能更為完整成熟。

肆、研究結果與討論

本研究開發了高中階段的「托勒密定理與和角公式」教案、國中階段的「最大公因數」教案、國小階段的「分數與十進位制小數」教案，皆依照 HPM 實作之模型進行。以「托勒密定理與和角公式」教案的開發為例，一般教師教學都聚焦在 C_1 循環，在單元擷取的過程，研究團隊認為三角學及其相關公式的主題，往往是學生學習困難的單元，學生們對於許多三角公式的了解和使用都有障礙，此時正是數學史融入數學教學的適當時機。在數學的發展歷程中，希臘天文學家及數學家托勒密（Claudius Ptolemy）用數學捕捉星空的規律，其所發想的托勒密定理可以說是三角學的結晶（蔡聰明，2003），因此研究者與研究團隊進行文本分析，進入 C_2 循環尋找相關史料，針對「托勒密定理與和角公式」教案，研究團隊首先藉由數學普及讀物《數學拾貝》（蔡聰明，2003）中的相關章節，對托勒密定理脈絡有一個通盤概略的了解，接著直接搜尋數學史文本，藉由網路資料（http://www.univie.ac.at/hwastro/rare/1515_ptolemae.htm），查閱托勒密 *Almagest*（1515 年版）著作，做更細緻的布置鋪排。在自我詮釋階段，研究團隊考量十二年國教數學課綱以及相關數學史料，思索如何將數學史料轉化為教學素材，編製成教案後再進行於教學。關於詳細教案內容及實施情況，研究者將於以下篇幅分別加以闡述。

一、「托勒密定理與和角公式」教案實施分析

三角學的發展源於人類的需求，現今高中階段所討論三角比的許多性質和公式，其實遠在希臘時期就被發現並且使用。「托勒密定理與和角公式」教案的設計理念就是想回歸到三角學發展的歷史脈絡，讓學生理解三角學的發展來自人類對於量天測地的需求，希望透過有脈絡意識的問題設計，讓學生體會三角學的幾何面向。

研究團隊成員蒐集、研讀與討論相關的數學史文獻，希望透過學習工作單的設計和引導，讓學生了解本單元。本份「托勒密定理與和角公式」教案的主要目標在於托勒密定理的性質與證明，以及利用托勒密定理證明和角公式。在發展階段中，本教案在介紹和角公式的主題上，就以托勒密的天文學為背景，闡述在編製弦表的需求下，自然而然會需要和角公式。接著教師提問托勒密究竟如何解決這個問題，推導出和角公式？引動學生的好奇心，順勢介紹托勒密定

理，再延伸出和角公式事實上就是托勒密定理的應用。

此份學習工作單共設計六個問題。首先描述歷史脈絡，希臘的天文學家托勒密（西元前 110 年到 170 年），在西元 150 年左右出版十三冊的數學文集，蒐集當時已知的數學與天文學知識，成功地描述行星運動現象，鞏固了地心說。後來，這套書傳到阿拉伯，被阿拉伯人稱為《天文學大成》（*Almagest, The Great Treatise*），又再傳回歐洲，直到文藝復興初期，托勒密的地心說都是天文學的典範。當時的希臘人已經體認到，不管是天文學「測星」或幾何學「測地」都需要知道各種圓心角所對應的弦長。問題一到問題三，是讓學生了解圓的弦長和圓心角、圓周角的彼此對應關係，強化他們所學的三角函數定義和正弦定理的幾何意義，進而在弦表編製的目的下，知道和角公式的必要性。

問題四則是托勒密定理的介紹，這個定理所需的知識是國中所學習的歐氏幾何，設計成閱讀填空的形式，引導學生一步步完成填答，就能理解托勒密定理的證明。問題五和問題六就是利用托勒密定理推導出和角 $\sin(\alpha + \beta)$ 、 $\cos(\alpha + \beta)$ ，以及差角 $\sin(\alpha - \beta)$ 、 $\cos(\alpha - \beta)$ ，學習工作單詳細內容請參閱附錄。

在課堂實施情形上，研究團隊依照班級學生特性，以兩種方式施行。第一種是問題一到問題三，以課堂發問，學生回答，由於這些問題和前面單元相關，學生很快就回答出正確答案。問題四關於托勒密定理的證明，由於設計成閱讀問題，學生只要能順著文章引導下來，都能了解托勒密定理的內容和證明，因此本題是讓學生分組討論，再請學生上臺說明答案和解釋原因。問題五由老師進行講解，帶領學生完成各小題的回答。問題六再由學生分組討論，並上台說明答案和解釋原因。同時，教師在課堂全程使用電腦輔助圖形的呈現，讓學生能直接看到教師或同學講解所指涉的圖形，能順利溝通，並且於過程中不需重新畫圖，節省時間，將本教學活動控制於一節課完成。由於此六個問題都是有正確答案的選擇或填充題，教師在課後收回進行批閱，由學生作答的狀況來看，都充份理解整個學習單的問題。學生也在之後的學習意見表寫下「比起純粹背下公式，這樣的學習方式似乎更加有趣，也讓人有較深印象。」、「第一次知道可以用別的定理證和角公式，引發我們思考。」、「比課本寫得更容易理解。」等回饋。

第二種教學方式是由於教師認為班級學生特性缺乏共同討論的氛圍，沒有採用較花時間的分組討論方式，而是以個人自主學習以及回答問題的方式進行。在進入和角與差角公式單元的第一節課，教師以此份學習工作單代替課本教材進行教學與學習。於上課時，教師先說明學習工作單的學習目的及脈絡，接著以加分為誘因，每一個問題先讓學生自行閱讀與思考作答，接著每個小題再讓全班學生進行搶答；配合平板教學，在每個問題的圖形之中填入答案，並在每個問題回答完畢之後歸納此問題的目標與結論。

在實施的過程中，由於問題難度不高，又有加分的誘因，因此學生回答頗為踴躍，能自己

思考出問題的答案並進行回答，順利達成教學目標。藉由學習工作單的設計，讓學生練習在圖形中以正弦與餘弦表示邊長，實驗教師認為這一點恰好是該校學生在傳統教學普遍不易學習的地方。此外這份學習工作單利用幾何的方式讓學生學習和角公式與差角公式的證明，在教學過程中，教師觀察到學生的參與度比往年要來得高，課後的反應回饋也都認為比較曉得三角函數的作用，大都有正面的回饋。不過教師也反思以這樣的方式進行，完成整份學習工作單需要花費比一節課還要多一點的時間，如果教學進度趕不上的話，會覺得時間不夠，但在下一年度的課程中，實驗教師就以一節課的時間完成本份學習工作單的教學。

此份教案將和角公式放在托勒密編製弦表的脈絡下，進而引出學習和角公式的必要性，以及希臘數學家如何推導出和角公式。對於這樣的學習安排，學生普遍能夠接受，也認為能提昇他們學習和角公式的意願，例如「**我覺得這個課程很有趣，也幫助我更加了解和角公式。許多人都認為公式要死背，但透過此課程，可以發現公式應是用推論並慢慢思考理解，而不是靠硬記。**」。針對此份學習工作單對和角公式課程的學習效果部分，學生大多給予正面的肯定，由學生實地填寫的回饋也可發現，以這樣的方式進行和角與差角公式的課程內容，學生比較能由幾何意義中體會公式的由來、公式的涵義與公式的學習目的，可以強化此單元的學習動機。實驗教師也認為就進行期間同學的反應來看，由於問題難度不高，同學皆能自己思考出問題的答案並進行回答，可順利達成教學目標。本份教案於台北市兩所高中實施，經過 166 位高二學生的教學實驗及回饋問卷，有 83.7% 的學生認為此課程能幫助他們了解和角公式的原理，由於學習工作單讓學生必須藉由閱讀，實際參與推導過程理解公式，也有 75.9% 的學生認為此課程能提升他們思考與分析的能力 (Su, Su, & Su, 2018)。

參與教學實驗的教師也表示，現行教材在三角學的「和差角公式」單元的課程設計，通常都是以代數的操作為主，如果依課本內容進行教學，學生很容易失去興趣，認為只要把公式背起來即可，而不管和角差角公式還有什麼意涵，同時在學習的動機方面也需要靠教師個人補充。藉由這份學習單，可以讓學生回到三角函數之所以誕生的脈絡（圓內接三角形與四邊形），利用這樣的幾何圖形讓學生實地「看到」正弦與餘弦對應的線段，以及從圖形中理解在和角公式與差角公式中正弦與餘弦的關係。同時教案引用的托勒密定理以及問題設計的難度，並不會造成學生的學習負擔，可以在實施過程中輕易地達成本單元的教學目標，學生也有另一種學習體驗。另一位教師也觀察到實施這份學習工作單時，因為跟以往的學習經驗不同，感覺學生比較有參與感，能融入在教學活動中，有些學生可以明顯發現認真在思考學習。不過教師也認為如果有更充分的時間學生會學習得更完整，因為進度壓力，無法挪出太多時間有點可惜。

二、「最大公因數」教案實施分析

本研究團隊成員針對國中數學主題，蒐集、研讀與討論相關的數學史文獻，藉由《九章算

術及其劉徽注研究》(李繼閔, 1998)的參考以及《九章算術》原典的資料剪裁,完成「最大公因數」國中數學史素材的開發及相關教案設計。在國中一年級的數學教科書中,編入了利用標準分解式和短除法兩種方法求出給定兩數的最大公因數。「最大公因數」教案主要是介紹第三種求最大公因數的方法,也就是中國算書《九章算術》中的「更相減損法」。

「最大公因數」教案的教學目標是(一)介紹《九章算術》中的「更相減損法」,一種求最大公因數的做法。(二)讓學生能認識《九章算術》,並透過「更相減損法」的例子,讓學生對於最大公因數的性質有更多的認識。

關於學習工作單的布置,問題一首先讓學生利用標準分解式和短除法求 18 與 10 的最大公因數,接著進行下面活動:

- (1) 準備一張長 18 公分,寬 10 公分的長方形紙片,將短的一邊對摺到長邊,使得邊緣對齊,摺出一個最大的正方形。
- (2) 將多餘的長方形紙片用剪刀剪下(或用尺撕下)。
- (3) 對剪下(或撕下)的長方形紙片重覆步驟(2),直到剩下的紙片為正方形為止。

然後教師讓學生思考此活動所獲得的結果與問題一的關聯。

接著教師介紹中國古算書《九章算術》,本書成書大約在西漢末年,內容分成方田、粟米、衰分、少廣、商功、均輸、盈不足,方程、勾股等九章,共 246 個問題。由於《九章算術》是許多中國古代數學問題的源頭,吸引許多數學家深入研究,並且以術文統率應用問題的體例成為後來數學著作的典範,這使得《九章算術》深刻影響後來中國數學的發展(李繼閔, 1998)。《九章算術》一書中曾介紹求最大公因數的方法,安排於學習工作單之問題三。

為了讓學生評鑑文本內容,學習工作單接著詢問學生是否贊成劉徽的說法,並請他們說出理由。問題四是讓學生分別利用標準分解式、短除法及更相減損法三種不同的方法,求 $(180, 126) = ?$ 接著請學生比較這三種方法,挑出最喜歡的一種作法,並說明理由。

本教案於國中實作,實驗教師對於「教案說明是否清楚?」以及「教案是否易於教學實施?」等問題,都表示「很同意」之評價。至於「教案是否符合教學目標?」、「教案是否幫助學生理解教材單元中的教學概念?」、「學習工作單問題陳述是否清晰易懂?」、「是否能經學習工作單達成教案設計教學目標?」,以及「學習工作單是否幫助學生了解數學的歷史文化面向?」等問題,實驗教師也都給予「同意」的回應。

此外,針對課堂實作,實驗教師也給了一些心得及建議。關於問題二,實驗教師觀察班上有將近一半的學生,是先填完所有空格才開始動手操作,先動手操作的學生,後來也幾乎都是直接就學習單上所給的圖形來填答。實驗教師認為「似乎對學生而言,這樣的『具體操作』沒有絕對的必要性?」,也因此,實驗教師建議改為直接在學習單上給學生空白圖形,然後讓學生進

行如下操作（操作活動請參見圖 2）：

- （1）這是一個長 18 單位、寬 10 單位的長方形，請在這個長方形中，畫出一個最大的正方形（塗上第一種顏色）。
- （2）繼續在剩下空白的長方形中，再畫出一個最大的正方形（塗上第二種顏色）。
- （3）重複（2）的步驟，直到剩下空白的部分是正方形為止。

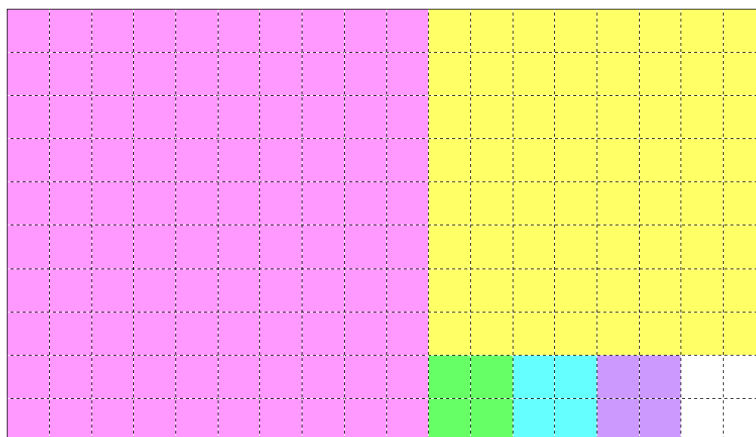


圖 2 問題二活動示意圖

實驗教師認為這樣的操作讓國中生可以透過「圖象」來觀察與思考，教師在教學使用上也會比較方便，即使不著色也可用不同斜線等區別。不過關於本題，在事後的回饋表中，也有些學生寫到「最有趣的是可以動手摺紙」、認為「還挺好玩的」、「會讓我印象比較深刻」。

在討論問題一與問題二間的關係時，實驗教師帶領學生用以下的表格（圖 3）去做紀錄、觀察：

著色的正方形		剩下空白的長方形（請寫出算式）	
顏色	邊長	較長邊長	較短邊長
紅	10	10	$18-10=8$
黃	8	8	$10-8=2$
綠	2	$8-2=6$	2
藍	2	$6-2=4$	2
紫	2	$4-2=2$	2

圖 3 問題二填寫表格（灰底部分是實驗教師建議之後改版可加入之部分）

透過這樣的表格化的整理，學生更能夠看出彼此間的關係。原始版本中多數學生都可看出最小正方形的邊長就是 10 和 18 的最大公因數，討論中更有學生發現表格中所有的數字都是最大公

因數的倍數，這讓學生在問題三看到劉徽說明的原因時，能夠有更好的理解。

有關問題三的提問：回顧問題二，你贊成劉徽的說法嗎？請說出你的理由。很多學生都只寫了贊成，然後就不知道該如何下筆。經實驗教師詢問，學生大多數回答說：「劉徽說的就是對的呀！」、「他說的就是理由，所以不知道還要寫什麼？」。因此實驗教師繼續引導學生：「那為什麼還要一直輾轉相減呢？」、「相減的結果，跟原來的數、最大公因數有什麼關係？」、「這對我們想找出兩數的最大公因數有什麼幫助？」，學生才逐漸能夠理解這題到底要他們觀察什麼，在小組討論的過程中，學生慢慢可以找到一些線索，在師生的對話中，逐步確認自己的想法，這樣的過程雖然需要花比較多的時間，但實驗教師覺得這個過程是非常好的。

在介紹問題三的史料時，實驗教師後來選擇把完整的資料都呈現給學生：

更相減損術記載見於《九章算術》方田章約分術，可以求出一個分數的分子、分母的最大公因數，其步驟如下：

約分術曰：可半者半之；不可半者，副置分母、子之數，以少減多，更相減損，求其等也。以等數約之。

主要原因是實驗教師認為學生會覺得很疑惑「為什麼明明算的是最大公因數，可是卻不是用『除法』，而是用『減法』來算，古人『怎麼想到的』？」，也因此實驗教師決定把整個史料完整的呈現，可以讓學生更了解發展的脈絡，對於古文的部份，教師也用白話文加以解釋，幫助學生理解。

除了教案和學習工作單外，本研究還分別設計了教師及學生的意見表，在事後的回饋表中顯示數學史的引入，獲得學生的認同。很多學生都特別提到這個部分，覺得「故事內容很有趣」、「原來數學背後也有一個有趣的故事」、「我覺得故事加強了我的記憶」、「歷史上的數學引起我的興趣」、「從背公式變成推導公式、我更知道在做什麼了」、「希望以後可以有更多跟這次學習單一樣，聽歷史、學數學」。

問題四是求 180 和 126 的最大公因數，幾乎所有的學生用三種方式做完以後，都覺得短除法是最簡單的，因為最大公因數 $18 = 2 \times 3^2$ ，學生在做短除法時完全沒有困難。反而是更相減損法的過程，很多學生都覺得算式太多了很麻煩，而且有的學生不小心還會減錯，結果算不出正確的答案。也因此實驗教師又故意設計了一題，讓學生求 493 和 667 的最大公因數，這時學生很難直接找到兩個數的公因數，才感覺到使用更相減損法的需要。之後實驗教師也再讓學生去討論什麼時候、用什麼方法相對會比較方便，希望他們可以了解到問題有時候並不是只會有一種解法，學會愈多的方法、想法愈靈活，解決問題的方法就會更多元、更有彈性。在事後的回饋表中，也有學生寫到「雖然沒有很快、但有時候很有用」、「可以了解不同的計算方法很好」、

「我覺得很有效率、只是要學很久」、「這讓我以後遇到這種類型可以判斷得快一點」。

實驗教師以一節課的時間完成本份教案，從教學過程觀察，整體而言，學生對這份學習工作單多給予正向的回應 (Su, 2019)。實驗教師也肯定本份教案的成效，並提出建議。研究團隊也從實驗教師的教學回饋中，再加以修改所開發之教案及學習工作單，使能更符合學生需求，讓所開發之數學史素材，更能適用於國中數學教學。

三、「分數與十進位制小數」教案實施分析

研究團隊藉由參考數學普及讀物《溫柔數學史》(Berlinghoff & Gouvêa, 2004/2008) 以及進一步延伸的 *A History of Mathematics—an Introduction* (Kate, 1993) 等書，完成分數與十進位制小數教案。本份教案適用對象為國小三年級，隨著小數位數的增加也可適用於四年級。教學目標是著眼於以數學史上的素材，從學生已有的分數概念著手，尤其分母為 10 的幕次的分數，將分數以分母這個單位的次數重新解讀，配合整數十進制中的位值表示法，將分母為 10 幕次的分數表示為小數。這份學習工作單為小數概念的引入，研究團隊建議在小數單元一開始使用，本教案以二位小數為例，此為考量有二位小數時較容易說明概念，教師可於三年級或四年級實施。與此相關之學習內容為「N-3-10 一位小數：認識小數與小數點。結合點數、位值表徵、位值表。位值單位「十分位」。位值單位換算。比較、加減（含直式計算）與解題。」以及「N-4-7 二位小數：位值單位「百分位」。位值單位換算。比較、計算與解題。用直式計算二位小數的加、減與整數倍。」。學習工作單首先從埃及的單位分數引入，讓學生從單位分數的想法來思考分數，接著再介紹一千多年前（中世紀）的歐洲將分數中的分子稱為「計算者」，代表計算個數；分母稱為「命名者」，代表什麼樣的大小單位。

之後學習工作單再繼續介紹荷蘭數學家史提文 (Simon Stevin, 1548-1620) 於 1585 年出版的《十分位》這本書引用小數的表示方法，利用十進位的概念以及一般的阿拉伯數字表示分數，以單位 1 後面的①表示小數點，小數點後面數字中的①等表示單位 1 後面的第一部分也就是 $\frac{1}{10}$ （我們現在稱為十分位），②表 1 後面的第二部分也就是 $\frac{1}{100}$ （現在稱為百分位），然後解釋像 $32①5①7②$ 就是 $32 \frac{5}{10} \frac{7}{100}$ ，即 $32 \frac{57}{100}$ ，史提文認為將分數表示成小數之後，就可以讓整數算術的簡單算法應用到分數的計算上。我們現在簡化了史提文的符號，用「.」表示小數點，並省略小數點後面的①、②...，譬如 $32①5①7②$ 以現在的表示法寫成 32.57。介紹完歷史脈絡後，再讓學生依照史提文的表示法，將 $21①4①6②$ 分別以分數和小數表示，再將 $125 \frac{37}{100} = 100 + 20 + 5 + \frac{3}{10} + \frac{7}{100}$ 以現在的表示法表示成小數。

針對分數與十進位制小數單元，29 位四年級學生有 31% 認為故事很有趣，34% 認為能提升

學習數學的興趣，有 62% 的學生認為更能了解此單元內容。同一單元針對另一班 17 位四年級學生，卻有 82% 學生認為故事有趣。針對實施情況，實驗教師認為在本節課一開始時，學生對單位分數極有興趣，尤其是古埃及人對單位分數的表示法。學生能說出他們認為何者表徵代表百、十、一，另外關於分子橢圓形畫法有大有小，就有學生的解釋為分母數字愈大，圓形就愈大。至於在歐洲將分子稱為「計算者」及分母稱為「命名者」方面，學生較無反應。可能因為已經學過十分位與百分位，對於西元 1500 年前的說法反而覺得比較複雜不實用。

針對本小節最後小題所安排的「若想將 $125\frac{37}{100} = 100 \times 1 + 10 \times 2 + 1 \times 5 + \frac{1}{10} \times 3 + \frac{1}{100} \times 7$ 省略代表位值的 100、10、1、 $\frac{1}{10}$ 、 $\frac{1}{100}$ ，可表示成_____」此問題學生較為無感，並且多數學生不懂題目的意思及要求。學習工作單最後，在進行荷蘭數學家史提文《十分位》這本書引用小數的表示方法時，實驗教師認為學生覺得有趣也發現現在小數點的便利性。

教學實作後，實驗教師認為：「從古埃及對單位分數的引入時，個人覺得十分有趣，像是開了眼界的學習。加以圖像對學生而言具有吸引力，學生自己去發現古埃及在分數上何種表徵代表百、十、一的興趣是強烈的，教師能感受學生的學習動機。」。有關學生較無反應的部份，實驗教師也表示，「在中世紀的歐洲將分子稱『計算者』，分母稱『命名者』，個人認為比較沒有引發學生思考的故事成份，導致學生學習突然由熱轉冷，加以學生已學過分數，所以過去複雜化的方式，反而令學生沒有興趣。但個人也思考過是否是教學者個人在此的教學問題，例如，沒有相關數學史概念、學生已學過分數小數，期末最後二天學生已無心上課等，導至學生此時學習較無感。還好最後又有像圖像化的荷蘭數學家的小數表示法，又引發學生興趣。」。

實驗教師也提出對此教案的建議：「個人認為，就數學史的部份，中年級學生喜好較偏好具故事性內容或具圖畫的資料，較能引發中年級學生的數學史學習興趣。」，這也是研究團隊日後編製國小數學史素材須關注的面向。

伍、結論與建議

本研究由師資培育者及在職教師共同討論研發適用於十二年國教之數學史教材，關於「如何開發配合十二年國教數學課綱內容之數學史教案？」之研究問題，從本研究中，我們發現可以依照 HPM 實作模型，並考慮 Fink (2003, 2005) 所提的三大因素進行數學史教案的開發。也就是在學習目標上，於 C₁ 思考單元主題在 12 年課綱的學習重點及教科書之編排設計，於 C₂ 搜尋相關數學史料。在教學和學習活動設計上，教師於自我詮釋階段，設計數學史教案及學習工作單，至於回饋及評量也就是教師進行教學後，可以從學生撰寫學習工作單的反應觀察，以及課程實施學生學習意見表得知學生的學習成效。

至於如何編製數學史教案包含學習工作單等問題，經由研究我們也發現，首先可以由數學普及讀物著手，讓設計者對主題發展脈絡先有通盤概略的認識，使整個教案安排有一個初步的輪廓呈現。接著再進一步搜尋原典資料，增添數學史文本，讓教案更為精緻豐富。關於數學普及讀物的選擇，除了中央研究院數學研究所於 2007 年向社會推薦的 76 本優良數學科普書籍（https://www3.math.sinica.edu.tw/mrpc_jsp/book/about.jsp）之外，今年初臺灣數學史教育學會，也將過去十三年間（2007 年-2020 年）國內所出版的數學普及書籍，選出值得「再向社會大眾推薦」的作品（<https://www.hpmsociety.tw/recommend2021>），這些都可供參考。至於進一步數學史料的搜尋，除了相關原典的文本補充，國內的《HPM 通訊》（<http://math.ntnu.edu.tw/~horng>）、臺灣數學博物館（<https://www.hpmsociety.tw/mtm>）、臺大數學系網站（<http://math.ntu.edu.tw>），以及國際上的日本算額網站（<http://www.wasan.jp>）、英國 St Andrews 大學數學系網站（<https://mathshistory.st-andrews.ac.uk>）、HPM 研究群網站上的 Newsletters（<http://www.clab.edc.uoc.gr/hpm/NewsLetters.htm>）、數學郵票網站（<http://members.tripod.com/jeff560/index.html>）等等，都是設計數學史教案的資源。

本研究所進行的數學史教案教學實作，除了教師觀察外，並藉由學習工作單以及學習意見表等研究工具加以評鑑。如前所述，針對「托勒密定理與和角公式」教案，經過 166 位高二學生的教學實驗及回饋問卷，有 83.7% 的學生認為此課程能幫助他們了解和角公式的原理，實驗教師也認為「在整個內容學習的過程，學生會比較理解直角三角形邊長（當斜邊=直徑=1 時）該用正弦或餘弦來表示，這點對學生在用正餘弦表示邊長時會有幫助。」，至於學生也有諸如「能理解到公式背後的原因，覺得很不錯。」、「我覺得了解這些公式導出的來龍去脈，讓我比較不排斥去強記這些公式，因為理解以後，這些式子都變得有脈絡可尋。」等感想，顯示本份教案能達成設計目標。至於「最大公因數」教案，在 160 位國一學生中，有 66.3% 的學生認為能幫助他們學習如何求最大公因數的方法。針對「分數與十進位制小數」教案，依照前文提及以班上只有 31% 認為故事很有趣的此一實驗班級來看，同意這份學習工作單可以讓他們更了解此單元的內容之學生也達 62%。從上述研究結果發現，考量 HPM 實作模型，於數學史教案開始設計之前先考慮數學單元學習目標，選取適合的數學史文本為素材，加以鋪排闡述並與現行教材銜接，進而安排學習活動設計與檢測學習成效的策略，對於中小學生來說，都可以獲致正向的回應。

但是針對不同階段上的考量，在自我詮釋階段的數學史學習工作單的設計上，國小階段的學生由於對生硬的知識或抽象的語意表達比較無法接受，注意力也較容易被分散，因此設計者要傳達的概念內容需要經過故事性的包裝，盡量以活潑、有趣的方式呈現，引起學生興趣，也可增加圖片以輔助文字的理解。

本研究所開發之教案皆為研究團隊考量十二年國教課綱，搜尋數學史料，直接與古文本對

話，完成教案開發進行實作。日後可以再加強探討國際學界上的相關研究，相信也會獲得不同的啟發。至於教案預期的效益除了增進對課內知識的學習外，研究者反思之後亦可設計一套工具，以檢測學生對於公式由來是否理解，和對歷史、人物、概念發展的認識程度，如此應更能掌握數學史融入數學教學所發揮之成效。針對中學教學進度壓力問題，由於新課綱實施，各校可以規劃彈性學習課程，有興趣的教師也可以利用此時段實施，應能更從容的設計一系列的數學史相關課程進行教學。此外，本研究所設計之數學史教案授課時間均精簡為一節課就能完成，如此現場教師便可以較不受教學時數的限制考量，方便進行數學史融入數學的教學。

至於國小部份的教案開發，研究者反思在學習工作單的設計上應該更為多樣靈活，增加圖片和故事性劇情，引動學生的填寫意願，以生動活潑的呈現方式提高學生的學習動機。由於國小中年級學生對於學習單的閱讀及書寫需要花費一些時間，因此文字量的安排也不宜過多。相較於中學數學史教案，日後應將國小階段之素材更加以簡化也需關注生動趣味面向，才能使所開發之素材真正能廣為教師所用，充實中小學各階段所需之數學史資料庫。

誌謝

本文之得以完成，主要來自科技部的專題研究計畫（計畫編號：MOST 105-2511-S-845-008-MY3）之部分研究成果，在此感謝科技部之補助，也謝謝期刊審查委員給予的寶貴意見。

參考文獻

- 方延明(2007)。數學文化。北京：清華大學出版社。【Fang, Yen-Ming (2007). *Mathematical culture*. Beijing: Tsinghua University Press. (in Chinese)】
- 李國偉(2013)。數學文化面面觀之數學思維。收錄於國立勤益科技大學通識教育學院 & 中央研究院數學研究所(主編)，2013年數學文化與教育國際研討會會議手冊(頁80-97)。臺中：國立勤益科技大學。【Lih, Ko-Wei (2013). *Mathematical thinking from the perspective of mathematical culture*. In College of general education, National Chin Yi University of Technology & Institute of mathematics, Academia Sinica (Eds.), *Proceedings of the 2013 International Symposium on Mathematical Culture and Education* (pp. 80-97). Taichung: National Chin Yi University of Technology. (in Chinese)】
- 李國偉、黃文璋、楊德清、劉柏宏(2013)。教育部提升國民素養實施方案—數學素養研究計劃結案報告。教育部提升國民素養專案辦公室研究計劃成果報告，未出版。【Lih, Ko-Wei, Huang, Wen-Jang, Yang, Der-Ching, & Liu, Po-Hung (2013). *Final report for educating citizen literacy in mathematics*. Project Office for Improving Citizen Literacy, unpublished. (in Chinese)】
- 李繼閔(1998)。《九章算術》及其劉徽注研究。臺北：九章。【Li, Chi-Min(1998). *A study on "The nine chapters on the art of mathematics" and Liu Hui's commentary*. Taipei: Chiuchang. (in Chinese)】

- 洪萬生 (1998)。HPM 隨筆(一)。HPM 通訊, 1 (2), 1-3。【Horng, Wann-Sheng (1998). HPM Essay(I). *HPM TongXun*, 1(2), 1-3. (in Chinese)】
- 洪萬生 (2002)。中算史中的『張本例』。HPM 通訊, 5 (12), 1-3。【Horng, Wann-Sheng (2002). Generic examples in Chinese history of mathematics. *HPM TongXun*, 5(12), 1-3. (in Chinese)】
- 洪萬生 (2009)。從科技爭議看數學知識成長的意義。收錄於范偉 (譯), 數學恩仇錄 (頁 3-10)。臺北: 博雅書屋。【Horng, Wann-Sheng (2009). The significance of the growth of mathematics knowledge from the perspective of scientific and technological disputes. In Wei Fan (Trans.), *Great feuds in mathematics: Ten of the liveliest disputes ever* (pp. 3-10). Taipei: Goodness publishing house. (in Chinese)】
- 張維忠、唐恒鈞 (2008)。民族數學與數學課程改革。數學傳播, 32 (4), 80-87。【Chang, Wei-Chung, & Tang, Heng-Chun (2008). Ethnomathematics and mathematics curriculum reform. *Mathmedia*, 32(4), 80-87. (in Chinese)】
- 張維忠 (2011)。數學教育中的數學文化。上海: 上海教育出版社。【Chang, Wei-Chung (2011). *Mathematics culture in mathematics education*. Shanghai: Shanghai Education Press. (in Chinese)】
- 教育部 (2008)。國民中小學九年一貫課程綱要。臺北: 作者。【Taiwan Ministry of Education. (2008). *Grade 1-9 curriculum guidelines*. Taipei: Author. (in Chinese)】
- 教育部 (2018)。十二年國民基本教育數學領域課程綱要。臺北: 作者。檢自 <https://www.naer.edu.tw/PageSyllabus?fid=52>【Taiwan Ministry of Education. (2018). *Curriculum guidelines of 12-year basic education: Elementary and junior high school and general senior high school (Mathematics)*. Taipei: Author. Retrieved from <https://www.naer.edu.tw/PageSyllabus?fid=52> (in Chinese)】
- 童莉 (2006)。基於“數學文化”的數學課堂教學文化氛圍的構建。重慶師範大學學報 (自然科學版), 23 (3), 92-94。【Tong, Li (2006). Set up the cultural atmosphere of mathematics teaching according to “mathematics culture” . *Journal of Chongqing Normal University (Natural Science Edition)*, 23(3), 92-94. (in Chinese)】
- 劉柏宏 (2016)。從數學與文化的關係探討數學文化素養之內涵—理論與案例分析。臺灣數學教育期刊, 3 (1), 55-83。doi: 10.6278/tjme.20160413.001【Liu, Po-Hung (2016) . Discourse on the constituent of literacy for mathematical culture in terms of the relationship between mathematics and culture Theoretical and case analysis. *Taiwan Journal of Mathematics Education*, 3(1), 55-83. doi: 10.6278/tjme.20160413.001 (in Chinese)】
- 蔡文榮、張鈞淇、劉柏宏 (2019)。臺灣學術界數學史研究之現況分析與建議: 以 1992 年至 2017 年學位論文為例。臺灣數學教育期刊, 6 (1), 27-51。doi: 10.6278/tjme.201904_6(1).003【Tsai, Wen - Rong, Chang, Chun - Chi, & Liu, Po - Hung (2019). Analysis of current state and recommendations for HPM research in Taiwan: The case of theses and dissertations from 1992 to 2017. *Taiwan Journal of Mathematics Education*, 6(1), 27-51. doi: 10.6278/tjme.201904_6(1).003 (in Chinese)】
- 蔡聰明 (2003)。數學拾貝。臺北: 三民。【Tsai, Tsung-Ming (2003). *Pretty shells found by the ocean of mathematics*. Taipei: Sanmin. (in Chinese)】
- 蕭文強 (1992)。數學史和數學教育: 個人經驗和看法。數學傳播, 16 (3), 23-29。【Hsiao, Wen-Chiang (1992). History of mathematics and mathematics education: Personal experience and

- opinions. *Mathmedia*, 16(3), 23-29. (in Chinese)】
- 蘇意雯(1994)。民族數學在台灣。科學月刊, 25(2), 140-145。【Su, Yi-Wen (1994). Ethnomathematics in Taiwan. *Science Monthly*, 25(2), 140-145. (in Chinese)】
- 蘇意雯(2004)。數學教師專業發展的一個面向：數學史融入數學教學之實作與研究(未出版之博士論文)。國立臺灣師範大學, 臺北市。【Su, Yi-Wen (2004). *Mathematics teachers' professional development: Integrating history of mathematics into teaching* (Unpublished doctoral dissertation). National Taiwan Normal University, Taipei. (in Chinese)】
- 蘇意雯(2007)。運用古文本於數學教學—以開方法為例。台灣數學教師(電子)期刊, 9, 56-67。doi: 10.6610/ETJMT.20070301.05 【Su, Yi-Wen(2007). Integrating ancient text into teaching: Taking the extraction of root as an example. *Taiwan Journal of Mathematics Teachers*, 9, 56-67. doi: 10.6610/ETJMT.20070301.05 (in Chinese)】
- 蘇意雯(2011a)。國小階段之數學史素材設計初探。科學教育研究與發展季刊, 62, 75-96。【Su, Yi-Wen(2011a). An initial investigation into the design of materials of history of mathematics for elementary school education. *Research and Development in Science Education Quarterly*, 62, 75-96. (in Chinese)】
- 蘇意雯(2011b)。數學史融入數學教學之理論與實務探究。國教新知, 58(3), 65-73。doi: 10.6701/TEEJ.201109_58(3).0007 【Su, Yi-Wen(2011b). A theoretical and practical study on integrating history of mathematics into teaching. *The Elementary Education Journal*, 58(3), 65-73. doi: 10.6701/TEEJ.201109_58(3).0007 (in Chinese)】
- 蘇意雯(2015)。遺產分配問題的數學探究活動。國教新知, 62(3), 30-39。doi: 10.6701/TEEJ.201509_62(3).0003 【Su, Yi-Wen (2015). An exploratory study of inheritance distribution problem. *The Elementary Education Journal*, 62(3), 30-39. doi: 10.6701/TEEJ.201509_62(3).0003 (in Chinese)】
- 蘇意雯(2018)。數學通識課程跨領域之創新教學。2017年大學教師優良創新課程及教學競賽專刊, 133-163。【Su, Yi-Wen (2018). Interdisciplinary teaching innovation for general math curriculum. *The Special Issue of 2017 Quality Innovative Competition for Teaching & Education Courses in University*, 133-163. (in Chinese)】
- 蘇意雯(2020)。數學史電子繪本之開發研究。收錄於2020年台灣數學教育學會年會暨第十二屆科技與數學教育學術研討會論文集(頁3-14)。臺中：國立臺中教育大學。【Su, Yi-Wen (2020). Developing the electronic picture book of history of mathematics. *Proceeding of 2020 The Twelfth International Conference on Technology and Mathematics Education and Workshop of Mathematics Teaching* (pp. 3-14). Taichung: National Taichung University of Education. (in Chinese)】
- 蘇意雯、黃俊瑋、陳靜惠、林明怡(2014)。以數學史劇本設計引動教師專業成長之研究。臺灣數學教育期刊, 1(2), 25-52。doi: 10.6278/tjme.20140904.004 【Su, Yi-Wen, Huang, Jyun-Wei, Chen, Ching-Hui, & Lin, Ming-Yi (2014). Enhancing teachers' professional development through HPM script design. *Taiwan Journal of Mathematics Education*, 1(2), 25-52. doi: 10.6278/tjme.20140904.004 (in Chinese)】
- 平山諦(2005)。東西數學物語(代欽譯)。上海：上海教育出版社。(原作出版於1956年)【Hirayama, Akira (2005). *The story of east-west mathematics* (Chin Tai, Trans.). Shanghai: Shanghai education press. (Original work published 1956) (in Chinese)】

- Berlinghoff, W. P., & Gouvêa, F. Q. (2008)。溫柔數學史：從古埃及到超級電腦（洪萬生、英家明暨 HPM 團隊譯）。臺北：博雅書屋。（原作出版於 2004 年）【Berlinghoff, W. P. & Gouvêa, F. Q. (2008). *Math through the ages: A gentle history for teachers and others* (Wann-Sheng Horng, Jia-Ming Ying, & HPM group, Trans.). Taipei: Goodness Publishing House. (Original work published 2004) (in Chinese)】
- Hellman, H. (2009)。數學恩仇錄（范偉譯）。臺北：博雅書屋。（原作出版於 2006 年）【Hellman, H. (2009). *Great feuds in mathematics: Ten of the liveliest disputes ever* (Wei Fan, Trans.). Taipei: Goodness Publishing House. (Original work published 2006) (in Chinese)】
- Kline, M. (1995)。西方文化中的數學（張祖貴譯）。臺北：九章。（原作出版於 1953 年）【Kline, M. (1995). *Mathematics in western culture* (Tsu-Kuei Chang, Trans.). Taipei: Chiuchang. (Original work published 1953) (in Chinese)】
- Borba, M. C. (1990). Ethnomathematics and education. *For the Learning of Mathematics*, 10(1), 39-43.
- Bütüner, S. Ö. (2018). Secondary school mathematics teachers' knowledge levels and use of history of mathematics. *Journal of Education and Training Studies*, 6(1), 9-20. doi: 10.11114/jets.v6i1.2722
- de Lange, J. (2003). Mathematics for literacy. In B. L. Madison & L. A. Steen (Eds.), *Quantitative literacy: Why numeracy matters for schools and colleges* (pp. 75-89). Princeton, NJ: National Council on Education and Disciplines.
- Fasanelli, F. (2000). The political context. In J. Fauvel & J. van Maanen (Eds.), *History in mathematics education* (pp. 1-38). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Fink, L. D. (2003). *Creating significant learning experiences: An integrated approach to designing college courses*. San Francisco, CA: Jossey-Bass.
- Fink, D. L. (2005, December 2). *Integrated course design*. IDEA. https://www.ideaedu.org/idea_papers/integrated-course-design/
- Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht, The Netherlands: D. Reidel Publishing Company.
- Gravemeijer, K. (1989). Developmental research as a research method. In A. Sierpiska & J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics education as a research domain: A search for identity (An ICMI Study Book 2)* (pp. 277-295). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers. doi: 10.1007/978-94-011-5470-3_18
- Heiede, T. (1992). Why teach history of mathematics? *The Mathematical Gazette*, 76(475), 151-157. doi:10.2307/3620388
- Horng, W.-S. (2006). Teacher's professional development in terms of the HPM: A story of Yu. In F. Furinghetti, S. Kaijser, & C. Tzanakis (Eds.), *Proceedings of the HPM 2004 & ESU4* (pp. 346-358). Uppsala, Sweden: Uppsala Universitet.
- Jahnke, H. N. (1994). The historical dimension of mathematical understanding: Objectifying the subjective. In J. P. da Ponte & J. F. Matos (Eds.), *Proceedings of the 18th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 1, pp. 139-156). Lisbon, Portugal: University of Lisbon.
- Kate, V. J. (1993). *A history of mathematics: An introduction*. New York, NY: HarperCollins College

Publishers.

- Mann, T. (2011). History of mathematics and history of science. *Isis*, 102(3), 518-526. doi:10.1086/661626
- Michalowicz, K. D., Daniel, C., FitzSimons, G., Ponza, M. V., & Troy, W. (2000). History in support of diverse educational requirements: Opportunities for change. In J. Fauvel & J. van Maanen (Eds.), *History in mathematics education: The ICMI study* (pp. 171-200). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers. doi: 10.1007/0-306-47220-1_6
- National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for teaching mathematics*. Reston, VA: Author.
- Niss, M., & Højgaard, T. (2011). *Competencies and mathematical learning: Ideas and inspiration for the development of teaching and learning in Denmark (IMFUFA tekst)*. Roskilde, Denmark: Roskilde University.
- Panasuk, R. M., & Horton, L. B. (2012). Integrating history of mathematics into curriculum: What are the chances and constraints? *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 7(1), 3-20.
- Park, J., Güçler, B., & McCrory, R. (2013). Teaching prospective teachers about fractions: Historical and pedagogical perspectives. *Educational Studies in Mathematics*, 82(3), 455-479. doi: 10.1007/s10649-012-9440-8
- Su, Y.-W. (2006). Mathematics teachers' professional development: Integrating history of mathematics into teaching. In F. Furinghetti, S. Kaijser, & C. Tzanakis (Eds.), *Proceedings of the HPM 2004 & ESU4* (pp. 368-382). Uppsala, Sweden: University of Uppsala.
- Su, Y.-W., Su, J.-H., & Su, H. Y. (2018, May). *A research on curriculum development in teaching Ptolemy's theorem and trigonometric identities*. Paper presented at the 8th ICMI-East Asia Regional Conference on Mathematics Education, Taipei, Taiwan.
- Su, Y.-W. (2019, July). *Integrating history of mathematics into mathematics teaching in junior high schools*. Paper presented at the 2019 3rd International Conference on Education and Multimedia Technology, Nagoya, Japan.
- Tzanakis, C., & Arcavi, A. (2000). Integrating history of mathematics in the classroom: An analytic survey. In J. Fauvel & J. van Maanen (Eds.), *History in mathematics education: The ICMI study* (pp. 201-240). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers. doi: 10.1007/0-306-47220-1_7

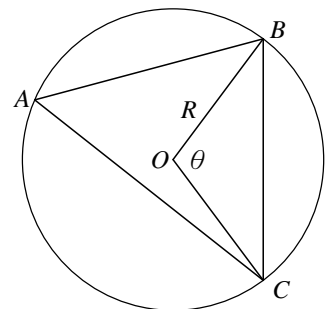
附錄：托勒密定理與和角公式

希臘的天文學家托勒密（西元前 110 年到 170 年），在西元 150 年左右出版十三冊的數學文集，蒐集當時已知的數學與天文學知識，成功地描述行星運動現象，鞏固了地心說。後來，這套書傳到阿拉伯，被阿拉伯人稱為《Almagest》（The Great Treatise，天文學大成），又再傳回歐洲，一直到文藝復興初期，托勒密的地心說都是天文學的典範。

當時的希臘人已經知道：想要天文學「測星」或幾何學「測地」都需要知道各種圓心角 θ 所對應的弦長。

【問題一】如圖一，若已知圓半徑 R ，圓心角 $\angle BOC = \theta$ ，則

- (1) 弦長 $\overline{BC} =$ _____ (用 R 與 θ 表示)
- (2) 弦長 $\overline{BC} =$ _____ (用 R 與 $\angle A$ 表示)



圖一

托勒密在《Almagest》的第一冊編製了一個圓心角從 0° 開始，以 0.5° 為間隔變化到 180° 的弦表。他的弦長編製工作是由正多邊形開始，先求出圓心角分別為 120° （正三角形）、 90° （正四邊形）、 60° （正六邊形）以及 72° （正五邊形）和 36° （正十邊形）的弦長。然而，他想計算其他角度的弦長，還需要解決幾個問題，其中，包含下列兩個問題。

【問題二】已知弦長 \overline{AB} 與 \overline{BC} ，如何求弦長 \overline{AC} ？

這個問題我們可以看成：

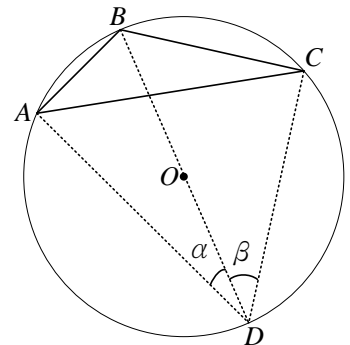
如圖二，在圓直徑 $2R = 1$ 的圓上，作直徑 \overline{BD} ，再連 \overline{AD} ， \overline{CD} 。

若弦 \overline{AB} 與 \overline{BC} 所對應的圓周角分別為 α, β ，請選出下列問題的正确選項。

(1) 弦長 $\overline{AB} = ?$ (A) $\sin \alpha$ (B) $\cos \alpha$ (C) $\sin \beta$ (D) $\cos \beta$

(2) 弦長 $\overline{BC} = ?$ (A) $\sin \alpha$ (B) $\cos \alpha$ (C) $\sin \beta$ (D) $\cos \beta$

(3) 弦長 $\overline{AC} =$ (A) $\sin(\alpha + \beta)$ (B) $\cos(\alpha + \beta)$ (C) $\sin(\alpha - \beta)$ (D) $\cos(\alpha - \beta)$

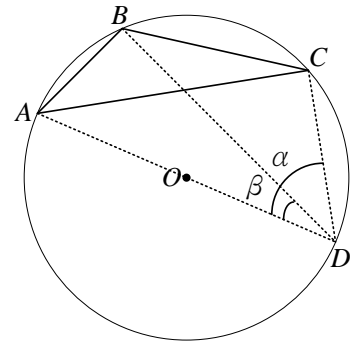


圖二

【問題三】 如圖三，已知弦長 \overline{AB} 與 \overline{AC} ，如何求弦長 \overline{BC} ？

這個問題我們可以看成：

如圖三，在圓直徑 $2R = 1$ 的圓上，作直徑 \overline{AD} ，再連 \overline{BD} ， \overline{CD} 。若弦 \overline{AC} 與 \overline{AB} 所對應的圓周角分別為 α, β ，請選出下列問題的正確選項。



圖三

(1) 弦長 $\overline{AC} = ?$ (A) $\sin \alpha$ (B) $\cos \alpha$ (C) $\sin \beta$ (D) $\cos \beta$

(2) 弦長 $\overline{AB} = ?$ (A) $\sin \alpha$ (B) $\cos \alpha$ (C) $\sin \beta$ (D) $\cos \beta$

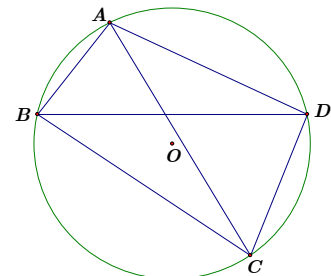
(3) 弦長 $\overline{BC} =$ (A) $\sin(\alpha + \beta)$ (B) $\cos(\alpha + \beta)$ (C) $\sin(\alpha - \beta)$ (D) $\cos(\alpha - \beta)$

由此可知，用現代的數學符號，這兩個問題等價為已知 $\sin \alpha$ ， $\sin \beta$ ，欲求 $\sin(\alpha + \beta)$ 和 $\sin(\alpha - \beta)$ 。托勒密利用一個重要的幾何定理—托勒密定理—解決上述問題，一起來看看他是如何解決的！

【托勒密定理】

如圖四，設四邊形 $ABCD$ 為圓內接四邊形，則兩條對角線長的乘積等於兩對邊長乘積的和。

$$\text{即 } \overline{AB} \times \overline{CD} + \overline{BC} \times \overline{AD} = \overline{AC} \times \overline{BD}$$



圖四

這個定理為何正確？請耐心閱讀下面的說明，跟著提示，將空格填入答案，就能知道原因囉！

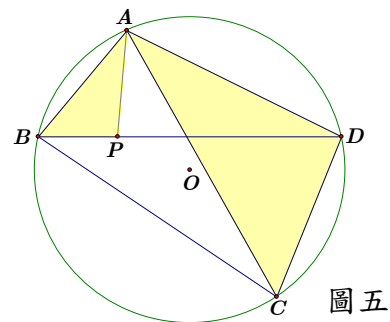
【問題四】 托勒密定理的證明

如圖五，在 \overline{BD} 上取一點 P 使得 $\angle BAP = \angle DAC$

因為 $\angle ABP =$ _____

因此， $\triangle ABP \sim$ _____

$$\Rightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{CD}} \Rightarrow \overline{AB} \cdot \overline{CD} = \overline{AC} \cdot \text{_____} \dots\dots \textcircled{1}$$



圖五

在圖六中，因為 $\angle PAD =$ _____

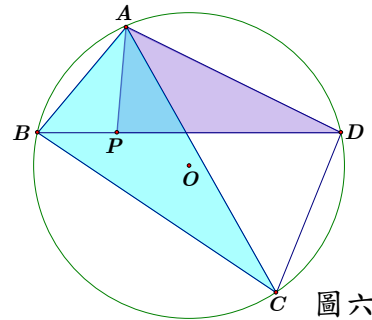
且 $\angle ADP =$ _____

因此， $\triangle APD \sim \triangle ABC$

$$\Rightarrow \frac{\overline{AD}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} \Rightarrow \overline{AD} \cdot \overline{BC} = \overline{AC} \cdot \text{_____} \dots\dots ②$$

將①+②可得

$$\overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{AD} \cdot \overline{BC} =$$



圖六

好了，既然知道托勒密定理，接著就利用來推導和角公式吧！

【問題五】托勒密定理與和角公式(1)

(1)如圖七，給定 O 為圓心，直徑 \overline{AB} 為 1 的圓，

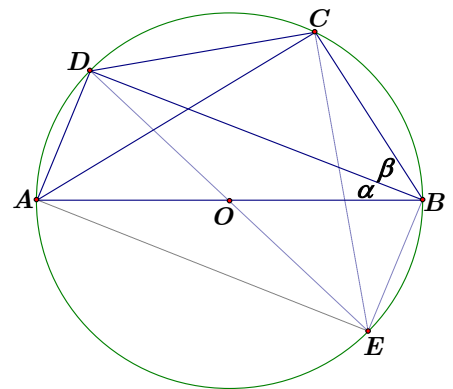
請用 $\sin \alpha, \cos \alpha, \sin \beta, \cos \beta, \sin(\alpha + \beta)$,

$\cos(\alpha + \beta)$ 標出下列線段長。

$$\overline{AD} = \overline{BE} = \text{_____}; \overline{BD} = \overline{AE} = \text{_____};$$

$$\overline{CD} = \text{_____}; \overline{CE} = \text{_____};$$

$$\overline{AC} = \text{_____}; \overline{BC} = \text{_____}。$$



圖七

(2) 觀察圖七中圓內接四邊形 $AECD$ ，由托勒密(Ptolemy)定理，得

$$\overline{AC} \times \overline{DE} = \overline{AD} \times \text{_____} + \overline{AE} \times \text{_____}$$

$$\Rightarrow \sin(\alpha + \beta) \times 1 = \text{_____}$$

(3) 觀察圖七中圓內接四邊形 $BCDE$ ，利用托勒密(Ptolemy)定理，得

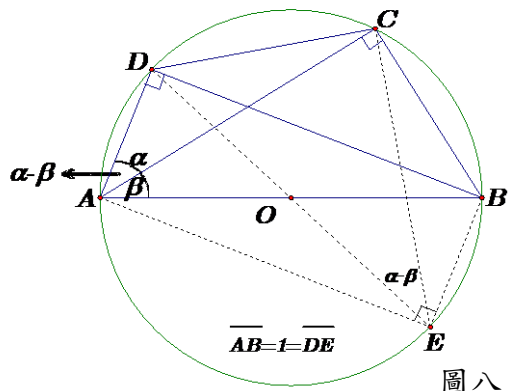
$$\overline{BD} \times \overline{CE} = \overline{BC} \times \text{_____} + \overline{BE} \times \text{_____}$$

$$\Rightarrow \cos \alpha \times \cos \beta = \text{_____}$$

$$\Rightarrow \cos(\alpha + \beta) = \text{_____}$$

【問題六】托勒密定理與和角公式(2)

(1)如圖八，給定 O 為圓心，直徑 \overline{AB} 為 1 的圓，
請用 $\sin \alpha, \cos \alpha, \sin \beta, \cos \beta, \sin(\alpha - \beta),$
 $\cos(\alpha - \beta)$ 標出下列線段長。



圖八

- $\overline{AD} = \overline{BE} =$ _____ ;
- $\overline{BD} = \overline{AE} =$ _____ ;
- $\overline{AC} =$ _____ ; $\overline{BC} =$ _____ ;
- $\overline{CD} =$ _____ ; $\overline{CE} =$ _____ 。

(2) 觀察圖八中圓內接四邊形 $ABCD$ ，由托勒密 (Ptolemy) 定理，得

$$\overline{AC} \times \overline{BD} = \overline{AB} \times \text{_____} + \overline{AD} \times \text{_____}$$

$$\Rightarrow \cos \beta \times \sin \alpha = \text{_____}$$

$$\Rightarrow \sin(\alpha - \beta) = \text{_____}$$

(3) 觀察圖八中圓內接四邊形 $AEBC$ ，由托勒密 (Ptolemy) 定理，得

$$\overline{AB} \times \overline{CE} = \overline{AE} \times \text{_____} + \overline{AC} \times \text{_____}$$

$$\Rightarrow 1 \times \cos(\alpha - \beta) = \text{_____}$$

托勒密解決了最基本的求弦長的問題（見問題一與問題二），配合著其他定理，他最後編製完成從 0° 開始，以 0.5° 為間隔變化到 180° 的弦表。這個表展現了古希臘時期的數學文明，標幟著歐幾里得之後數學的再一次高峰，尤其在幾何學、代數學，以及三角學。

陳東賢 (2021)。

發展悅趣化數學文化教案以培養數量與代數素養之探究。

臺灣數學教育期刊, 8 (1), 55-78。

doi: 10.6278/tjme.202104_8(1).003

發展悅趣化數學文化教案以培養數量與代數素養之探究

陳東賢

國立勤益科技大學基礎通識教育中心

本研究以十二年國民基本教育數學領域課程綱要為藍本，發展悅趣化數學文化教案以培養具備歸納推理能力的數量與代數素養。分別對臺灣國中生與高中生施以「撲克牌數學魔術」與「中國益智遊戲九連環」教案，並探究與反思所開發之悅趣化學習方式的兩個數量與代數素養教案的活動實施歷程。研究結果發現幾乎所有同學都認同所參與教學活動，活動有助於培養學生歸納推理能力與提升數量與代數素養。運用玩中學魔術對很多同學是很新鮮的經驗，藉由結合八年級數列單元的觀念，讓同學體會數學的妙用，確實增進學生對於等差數列單元概念理解與學習興趣，培養學生歸納推理的能力，進而運用數學規律，實際表演魔術。高中生可以藉由操作九連環遊戲培養觀察、探索、發現、分析與溝通能力，連結十年級指數、數列、級數與遞迴關係等單元，惟有些同學在數學表徵的敘述上出錯，研究顯示做更深入的抽象代數思維對十二年級高中生仍有其困難性。

關鍵詞：代數教案、悅趣化學習、數量與代數素養、數學文化、數學魔術

通訊作者：陳東賢，e-mail：chents@ncut.edu.tw

收稿：2021年1月25日；

接受刊登：2021年4月9日。

Chen, T. S. (2021).

An exploratory study on developing game-based mathematical culture lesson plans for cultivating quantitative and algebraic literacy.

Taiwan Journal of Mathematics Education, 8(1), 55-78.

doi: 10.6278/tjme.202104_8(1).003

An Exploratory Study on Developing Game-Based Mathematical Culture Lesson Plans for Cultivating Quantitative and Algebraic Literacy

Tung-Shyan Chen

Fundamental General Education Center, National Chin-Yi University of Technology

This research was based on a 12-year compulsory education syllabus in the field of mathematics, and it integrated mathematical culture to develop game-based lesson plans to cultivate students' inductive reasoning ability for quantitative and algebraic literacy. The teaching plans for “Mathematical Card Magic” and “Chinese Ring of Chinese Puzzle Games” were given to Taiwanese junior and senior high school students, respectively. This research was a theoretical and reflexive study on the implementation of the two quantitative and algebraic teaching plans. The results of the study demonstrated that most students were receptive of the teaching activities. The activities helped to cultivate students' inductive reasoning ability and improve their quantitative and algebraic literacy. The use of mathematical card magic was a new experience for many junior high school students. Combining the concept of number sequences in Grade 8 can effectively arouse students' interest in learning and study, cultivate students' ability of inductive reasoning, and then apply the patterns of mathematics to perform magic tricks. High school students can develop observation, exploration, discovery, analysis, and communication skills by operating the Chinese ring. Teaching activities can link the concepts of logarithm, number sequences, and series and recursions in Grade 10. However, some students made mistakes in mathematical representation. It remains difficult for Grade 12 high school students to do more in-depth, abstract algebra thinking.

Keywords: lesson plans for algebra, game-based learning, quantitative and algebraic literacy, mathematical culture, mathematical magic

Corresponding author : Tung-Shyan Chen , e-mail : chents@ncut.edu.tw

Received : 25 January 2021;

Accepted : 9 April 2021.

壹、前言

依據臺灣參加 2019 年國際數學與科學教育成就趨勢調查 (Trends in International Mathematics and Science Study 2019, TIMSS 2019) 成果發表 (教育部, 2020) 顯示, 我國四年級與八年級學生的數學學科平均成就分別居參加國家或地區排名第四和第二, 我國學生數學學科成就表現顯著優於國際平均 (Mullis, Martin, Foy, Kelly, & Fishbein, 2020)。同時我國學習落後學生百分比呈現了持續下降的趨勢, 城鄉間的差距也微幅縮小, 這些成就呈現臺灣國中小學教師與各界對數學教育投入、關心和努力的成果。不過值得我們關注的是, TIMSS 1999 至 2019 的臺灣學生「對數學的學習興趣」與「數學教學吸引學生投入的程度」趨勢結果, 兩項數據百分比均低於國際平均, 常常位居末段。這可能都導因於學生學習數學時經常過度拘泥於數學而脫離生活情境脈絡。例如, 2015 年 6 月 18 日華視新聞報導香港某小學一年級入學考題, 如圖 1 所示, 數學考題問汽車所在停車格號碼為多少?

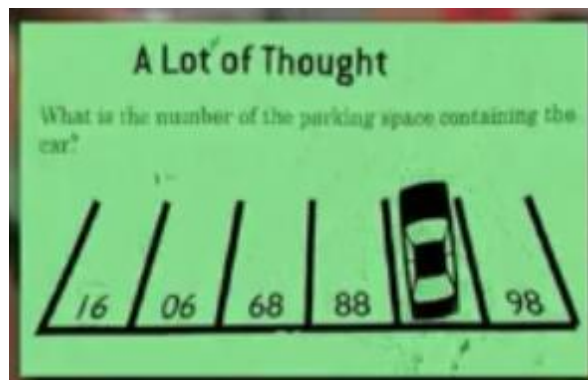


圖 1 汽車所在停車格號碼。引自「猜對了嗎? “停車格數學題超難”【新聞影片】」, 謝于婷、吳嘉文, 2015, 中華電視公司。

新聞中, 記者將這題目拿來問臺灣小一學生, 沒人能答出來, 就連大人的答案也是錯誤連連。其實這題不是要用什麼高深數學來算, 只需要換個角度思考, 既然是停車格, 停車格號碼應該不會太怪異, 為了讓收費員開單方便, 停車格號碼都會有「數」的規律, 所以駕駛的角度翻轉一下 (圖 2), 答案就呼之欲出。



圖 2 照片反轉後汽車所在停車格號碼

臺灣「十二年國民基本教育課程綱要總綱」以「核心素養」做為課程發展之主軸，強調學習應關注與生活的結合，透過實踐力行而彰顯學習者的全人發展。隨著 108 課綱實施，數學應該以一種文化的進路滲入實際教學中。劉柏宏（2016）認為數學文化融入教學，讓學生在學習數學的過程中體驗數學文化，欣賞數學與文化之美，應當可以改善臺灣學生「高成就、低態度」的狀況。本文將介紹如何以十二年國民基本教育數學領域課程綱要為藍本，融入數學文化開發「數量與代數」中學教案，並探究所開發之悅趣化學習方式的「撲克牌數學魔術」與「中國益智遊戲九連環」兩個數量與代數素養教案的實施過程和反思，以思考未來數學文化教案的發展方向。研究目的為：

- （一）發展悅趣化數學文化教案以培養具備歸納推理能力的數量與代數素養。
- （二）探究與反思所開發之悅趣化數學文化教案的活動實施歷程。

貳、數學文化對數學教育的重要性

數學本身就是人類文明發展中所伴隨而生的一種文化，Kline（1953）指出，數學一直是形成西方文化的主要力量和重要元素，且數學的發展具有文化多元性（張維忠、唐恒鈞，2008）。懷爾德（R. L. Wilder, 1896-1982）在《數學的文化基礎》（The cultural basis of mathematics, Wilder, 1950）中闡述數學文化的本質並強調從文化的視角看數學並非是新的事物。為分析數學文化的內涵，Burton（2009）將數學中的文化（culture of mathematics）與數學文化（mathematical culture）區分如下：

數學中的文化（culture of mathematics）為公認與數學相關的一些層面（如對美、嚴謹、簡潔等的特定態度），而數學文化（mathematical culture）為構成數學家的社會政治態度、價值觀與行為，及其學生在會議、教室、課程等環境中體驗數學。（p. 157）

另一方面，劉柏宏（2016）則從「文化中的數學（mathematics in culture）」與「數學中的文化（culture of mathematics）」兩大構面闡述「數學文化」（mathematical culture）：

前者是從文化的角度出發，觀察人類發展過程中，數學在其所屬社會文化所扮演的角色；後者指數學知識發展過程中其內部知識與社群所顯現的特質，這兩者呈現一種交錯的有機互動發展。（pp. 62-63）

劉柏宏（2016）在用詞上和 Burton（2009）有些許不同，但內涵大致相當。值得注意的是，中國大陸對於數學文化的研究起源甚早。張奠宙、梁紹君與金家梁（2003）強調數學文化必須走進課堂，隨之中國大陸於 2003 年頒佈《普通高中數學課程標準》（實驗）（中華人民共和國教育部，2013）提出數學文化的學習要求與落實，以展現數學對社會發展的作用。除了在課程標準上的融入，方延明（2007）進一步提出以「自在價值（概念）」、「工具價值（方法）」與「應用價值（模型）」三元結構以呈現數學文化的體系結構。接著在 2017 年《普通高中數學課程標準》（中華人民共和國教育部，2017）在課程結構中更主張把數學文化融入課程內容中，並說明數學文化是指數學的思想、精神、語言、方法、觀點，以及它們的形成和發展，包括數學在人類生活、科學技術、社會發展中的貢獻和意義，以及與數學相關的人文活動。因此王憲昌、劉鵬飛與耿鑫彪（2010）認為數學文化的研究與教學是中國數學教育最近二、三十年發展最快與普及的領域。

TIMSS 2011 至 2019 調查臺灣四年級與八年級學生不喜歡數學的比例隨著年齡提升，且高於國際平均（賓靜蓀，2020）。有感於臺灣學生在數學內容的情意態度明顯低落和「適性揚才」與「終身學習」的訴求，教育部《十二年國民基本教育國民中小學暨普通型高級中等學校課程綱要》便指出「認識數學的文化面向，不僅有助於讓數學學習從工具性層次延伸到智識性層次，也更彰顯數學知識的人文價值」（教育部，2018，p. 1）。一些學生在努力學習數學的同時，可能也正在厭煩著數學。日本數學教育家米山國藏有感於許多人在學校所學數學知識，畢業之後，若沒有機會使用，很快就忘掉，因而在其所著《數學精神思想和方法》書中序言提到

不管他們從事什麼工作，惟有深深銘刻在頭腦中的數學的精神、數學的思惟方法、研究方法，推理方法和看問題的著眼點等，卻隨時隨地發生作用，使他們終身受益（米山國藏，1969/1986，序）。

所以數學文化必須走進課堂，努力讓學生在學習數學過程中，真正去感受到數學文化，產生文化共鳴，體會數學文化品味。為達成這目標，教育者理應轉變觀念，將數學教育提升到數學文化教育的層面上，重視學生數學文化經驗的累積和總結，讓學生體驗數學思維的過程和樂趣，無論是成功還是失敗，都是有價值的。歐陽絳（2008）認為數學有「工具」與「文化」兩種品格，而數學文化品格的深遠意義與米山國藏有著相同觀點，人們所受到的數學訓練將會潛移默化一

直影響他們的生存與思維方式，並且終身受用。因此，我們規劃將數學文化融入數量與代數素養教案，開發出「撲克牌數學魔術」與「中國益智遊戲九連環」教案，讓學生在教學現場以悅趣化的方式體驗數學文化的歸納思考面向，讓孩子從遊戲中學習，跳脫數學刻板印象，以數學的精神、觀點、思維、方法等面向營造一種文化的氛圍，讓學生在學習數學過程的同時，得到更多的數學文化熏陶，從而讓學生進一步理解數學、喜歡數學、學到數學文化精神，經過潛移默化後，使學生受益終身。

參、數量素養與代數素養

國際學生能力評量計劃（The Programme for International Student Assessment, PISA）為經濟合作暨發展組織（Organisation for Economic Co-operation and Development, OECD）自 1997 年起開始籌劃。PISA（OECD, 2018）所定義的數學素養四大概念為「數量」、「不確定性與資料」、「變化與關係」與「空間與形狀」。這四大概念中的「數量」與「變化與關係」都屬於「數量與代數」的範疇。難怪數學家兼數學史家 Cajori（1928）曾說過要探索算術的最好方法，就是研究代數。有關數、量與代數的部分，由第一學習階段（國小 1 至 2 年級），能初步掌握數與量的概念，重點在自然數與其運算、長度的認識，發展至第二學習階段（國小 3 至 4 年級），掌握自然數的四則運算與培養數感，並初步學習分數與小數的概念。在量方面，以長度為基礎，學習量的常用單位及其計算。第三學習階段（國小 5 至 6 年級），學習分數與小數的四則計算，以常用的數量關係，解決日常生活的問題。到了中學第四學習階段（國中 7 至 9 年級），能認識負數與根式的概念與計算，熟悉代數式的運算、解方程式及簡單的函數。最後第五學習階段（高中 10 至 12 年級），統整認識實數與發展計數原理及其應用。透過坐標連結幾何與代數概念，並初步認識線性代數。能夠認識多項式函數、指數與對數函數與三角函數三大類基本函數，並能運用它們當作模型而解決典型問題。在這五個學習階段，隨著數學結構層層累積，數學學習將越來越抽象，由量的概念抽象為數的概念，最後再昇華到代數的概念。學生需歷經從利用數量進行計算的「算術思維」，逐漸發展變化而延伸至運用符號進行結構式運算的「代數思維」。

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM)（2000）認為，代數應包含四大部分：「瞭解式子、關係和方程式」、「使用代數符號呈現和分析代數的情境和架構」、「用數學模組來表現和瞭解量之關係」、「分析各種前後關係的改變」。代數教學強調培養學生能夠有意義地理解符號與式子背後的抽象意義，避免學生機械式地背誦一些規則與程序（Kieran, 1992, 2007）。李源順（2013）認為

符號的使用只是進入代數思維的第一步，真正進入代數思維，憑藉的是支撐在符號背後的代數想法，也就是一般化的想法。（p. 518）

一些研究發現（袁媛，1993；陳嘉皇，2006，2007；Laborde, 1990；Schliemann, Carraher, & Brizuela, 2007；Simon, 1980），由「算術」進入「代數」學習，對一些學生而言，卻是一個很高的門檻。如同洪萬生（1996b）即指出，我們國一學生的學習困擾不乏先例。代數中的抽象性並非一蹴可及，洪萬生（1996a）研究發現中國清朝康熙皇帝在符號代數的學習過程中，表現出類似國中學生的學習困擾，這一點值得教學工作者重視。這也是研發教案素材所需要著力的重點。在開發教材理念上，我們仍需要注意張海潮（2011）的提醒，利用「算術」或「圖解」解算術應用題比較有趣味與深度，有助於學習者思考。不可為了貪圖便利快速，教導孩子利用代數法取代算術，剝奪了探索的機會，因此開發「算術」連結「代數」學習教案有其重要性。本研究嘗試連結 10 年級指數、數列、級數與遞迴關係等單元，開發「算術」連結「代數」的「中國益智遊戲九連環」學習教案。一些「九連環」相關教學研究，大都講述九連環的數學文化面向，探索九連環解法，以及如何在課堂中融入九連環教學（俞昕，2015；唐慧榮，2019；高將、崔志永，2012），不過都缺乏關於九連環教案案例探究。

李國偉、黃文璋、楊德清與劉柏宏（2013）經整合國內外數學素養之觀點，明確闡述數學素養的核心內涵如下：

個人的數學能力與態度，使其在學習、生活、社會、與職業生涯的情境脈絡中面臨問題時，能辨識問題與數學的關聯，從而根據數學知識、運用數學技能、並藉由適當工具與資訊，去描述、模擬、解釋與預測各種現象，發揮數學思維方式的特長，做出理性反思與判斷，並在解決問題的歷程中，能有效地與他人溝通觀點。（p. 19）

並提出提升數學素養的四大目標：（1）學習並發揮數學思維的特長。（2）充實並活用基本的數學知識。（3）建立健康的對待數學的態度。（4）擅於利用計算器與數位工具。可見 12 年國教課綱強調素養導向，重視如何運用個人知識、能力與態度，連結應用於生活情境、面對問題與探索世界。綜合以上論點，我們可定義「數量與代數素養」為運用數量、代數知識之數學能力與態度，展現其數學素養。

肆、教案理念與設計

一、教案理念

悅趣化學習（game-based learning）是近年興起的一種學習模式，凡是透過工具或活動提升學習者的學習動機與興趣的學習方式皆屬於悅趣化學習的一環。雖然近年大都被指稱於數位學習，但並非專指數位遊戲的學習方式（Plass, Homer, & Kinzer, 2015）。廣義地說，悅趣化學習就是指設計一種互動過程，使得能在涵蓋學科知識的需求和遊戲玩法的需求之間取得平衡的學習方式（Plass, Perlin, & Nordlinger, 2010）。悅趣式學習專家侯惠澤（2016）認為從玩中學，最能帶

出學習興趣。臺灣師範大學名譽教授林福來也曾於 2015 年全國教育局長會議中表示，他透過與讀小學的孫子玩遊戲時獲得啟發，瞭解從遊戲中學習數學的效果極好，因此啟動「就是要學好數學 (JUST DO MATH)」計畫，透過「數學奠基活動」和「數學好好玩研習營」推動遊戲數學，研發許多有趣的數學奠基活動，並透過研發各種好玩的數學遊戲，幫助學生從玩遊戲中學會數學。

不過悅趣化學習只是一種協助的工具，必須搭配學習數學的主體內容方能成事。本研究的主體內容聚焦於等差數列概念和歸納推理。數學知識的主要內容包含數、量、形三大概念，雖然小學時都以接觸過數、量、形等主題，但都是具體和具象的數學物件，國中開始逐漸被抽象的符號表徵所取代，再加上代數式，使得學生一時之間不易調適 (assimilation) 與同化 (accommodation)。其中等差數列的概念雖然不是一個困難的主題，但它介於數式 ($d = a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = \dots$) 與代數式 ($a_{n+1} = a_1 + nd$) 之間，學生必須經常處理常數運算與代數運算之間的轉換，對於學生數量與代數表徵的解讀能力是一大考驗。尤其等差數列經常出現在規律探索、關係認知和推廣一般化等問題上面 (NCTM, 2000)，所以學生若能掌握這種轉換，則可望順利橋接往後的方程式。然而目前甚少研究關注中學生對於等差數列的概念 (Zazkis & Liljedahl, 2002)，特別是學生對於線性規律 (linear pattern) 的認知能力。

此外，歸納推理能力不僅在教育學習環境中扮演著關鍵的角色，也是 21 世紀的職場技能不可少的部分 (Molnár, Greiff, & Csapó, 2013; Van Vo & Csapó, 2020)。歸納推理是由特殊化而至一般化的推論過程，在數學學習領域一直是最被經常研究的推理能力之一。波利亞 (Polya, 1954) 指出，歸納推理可以應用在諸多數學解題的問題脈絡，尤其在數學的「一般化」(generalization) 這個重要的思維之中，歸納推理扮演著關鍵的角色。「一般化」是經由觀察和分析一群數學物件的特徵，企圖從中尋求共同規律並建立猜想。有了猜想之後才能透過演繹或其他方式論證猜想之正確性。進行歸納推理不僅能訓練學習者的觀察能力和培養直覺，也能增進學習者對於數學物件性質的認識，因此在數學學習中它是最根本的，也是深化數學認知相當關鍵的一個程序 (Haverty, Koedinger, Klahr, & Alibali, 2000)。有鑑於此，劉柏宏 (2016) 將歸納推理列入為數學文化素養的學習表現指標，並區分為「觀察分析」(I&G-S: Survey)、「發現規律」(I&G-P: Pattern) 和「建立猜想」(I&G-C: Conjecture) 等三個層次。

綜上所述，本研究嘗試透過悅趣化學習的方式發展兩份數學文化教案，以培養學生歸納推理的能力。不過悅趣化學習不僅僅是「玩中學」而已，為達預期之教學成效須配合適當的監控機制。Garris、Ahlers 與 Driskell (2002) 就提出一個悅趣化學習的程序模型，其中學習者判斷 (user judgments, 指學習者的感受)、學習者行為 (user behavior, 指學習者的參與程度) 和系統回饋 (system feedback, 遊戲設計者的評估) 三者構成一個動態迴圈 (圖 3)，相互回饋。本研究

即在此模型之下實施教學探究。

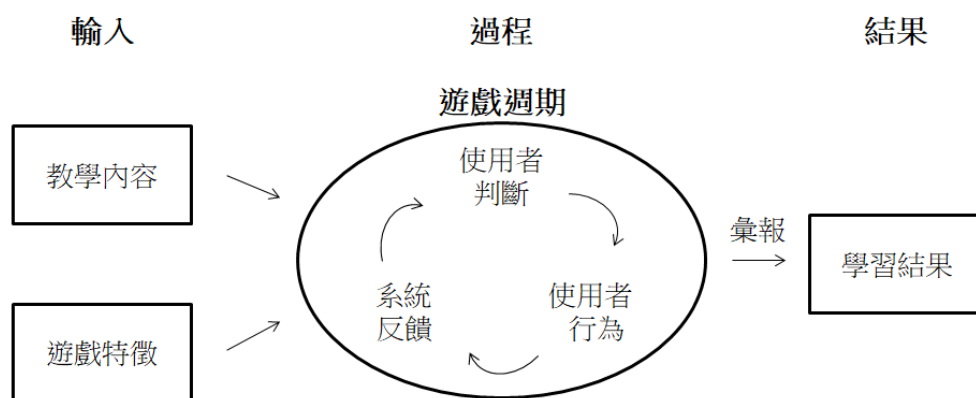


圖 3 悅趣化學習之程序模型。取自“Games, motivation, and learning: A research and practice model,” by R. Garris, R. Ahlers, & J. E. Driskell, 2002, *Simulation & Gaming: An Interdisciplinary Journal of Theory, Practice and Research*, 33(4), 445.

二、教案設計流程

本研究的教案設計發展係參考密西根大學教學研究中心 (Center for Research on Teaching and Learning) 所揭示的教案設計準則 (http://www.crlt.umich.edu/gsis/p2_5)。首先每份教案開始設計之前先考慮三大要素：學習目標、學習活動設計、與檢測學習成效的策略。這三大要素形成一個教案設計迴圈 (圖 4)，針對不同情境與對象，持續精進教案。

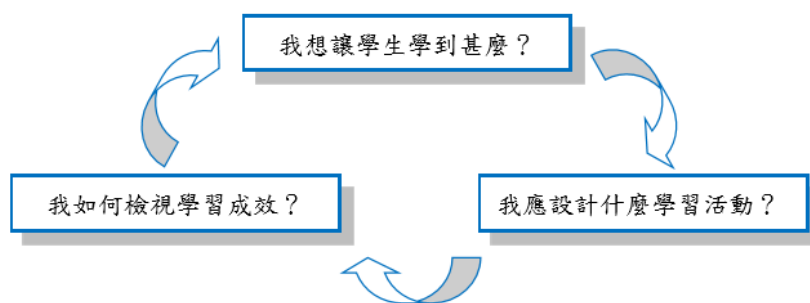


圖 4 教案設計迴圈

教案設計遵照下列六個步驟進行：

- 列出學習目標 (outline learning objectives)：事先思考幾個問題：我要學生學到甚麼？課程結束後學生帶走甚麼？哪些重要的概念、觀念和技巧是希望學生能夠掌握與應用的？
- 準備開場白 (develop the introduction)：針對主題構想一個有創意開場白以吸引學生的興趣並

鼓勵主動思考。透過各種策略讓學生進入問題情境。

- 規劃學習活動 (plan the specific learning activities)：甚麼樣的活動可以吸引學生的目光？有哪些不同的方式可以描述主題？如何讓學生投入活動？
- 測試學生的理解程度 (plan to check for understanding)：不時關注學生是否實際投入學習活動？準備幾個問題以檢測學生的理解程度？試想學生可能的回答？
- 準備結語與預告 (develop a conclusion and a preview)：簡單扼要地複習與概括整個學習活動的重點。可以由教師起頭，後續邀請學生回答，或是請學生記下他們今天所學習到的東西，並透過反問確認學生的理解程度。
- 設定進程時間表 (create a realistic timeline)：列出學習目標的優先順序後，估算每個活動流程所需時間。

伍、數量與代數素養教材案例

本節將說明依據前述融入數學文化開發「數量與代數」中學教案，藉由悅趣化學習應用於在教學現場，教學過程中加入一些引起學生學習興趣的素材，以引發學生投入學習，並產生必要的概念連結，協助學生克服學習代數困難，提升對數學的興趣，瞭解所開發教案之數量與代數概念，培養學生歸納推理的能力，進而提升其數量與代數素養。

本研究第一個教案為「撲克牌數學魔術」是在臺中市某國中八年級實施的情形，由本文作者負責教案教學的任務，計有 26 位同學參與現場教學，實施時間為兩節課。讓學習者瞭解「數」的規律，運用撲克牌點數連結八年級代數的等差規律歸納能力，並從中觀察學生是否能瞭解所開發教案之數學概念。以及所開發之悅趣化學習教案是否能培養學生歸納推理的能力，進而提升其數量與代數素養。此外，開發「算術」連結「代數」學習教案有其重要性，第二個教案嘗試連結十年級指數、數列、級數與遞迴關係等單元，規劃「中國益智遊戲九連環」教案。本教案研究的是參與科普活動高中三年級生實施的情形，由本文作者負責教案教學的任務，計有 15 位同學自由分成 8 組參與現場教學，實施時間為兩節課。除講述九連環發展歷史與操作方法之外，也讓學習者分組合作，由「算術」或「圖解」探索解九連環解法，進而運用抽象化符號進行結構式運算的「代數思維」，讓學習者嘗試運用抽象代數思維解決問題。本文「中國益智遊戲九連環」教案將可對後續相關研究提供初步探討資訊。以下我們將介紹「撲克牌數學魔術」與「中國益智遊戲九連環」教案的發展與探究過程。

一、「撲克牌數學魔術」教案

Koirala 與 Goodwin (2000) 研究顯示數學魔術融入代數教學，有助於五、六年級學生透過表演魔術理解代數概念，並引發學習興趣。Lim (2018) 研究中學教師在數學課程中使用魔術情

況，發現大多數參與學生都能學會魔術技巧，並引發學習數學的興趣，但大多數學生仍在符號表達與操作上有困難。本教案搭配八年級之「等差數列」單元，教案學習目標為讓學生透過魔術去認識等差數列，從中體會等差數列的規律，藉由學習數學魔術，進而培養學生歸納推理的能力，提升其數量與代數素養。本教案之開場白即利用撲克牌展示數學魔術，讓同學欣賞新奇的魔術，藉由詢問「魔術如何變的？」問題，啟發同學思考，引發學習數學的動機。

(一) 教案內容

1. 魔術活動 1-聽牌術：本數學魔術參考林壽福與吳如皓所合著「數學魔術：27 個數學概念奇蹟」之聽牌術（林壽福、吳如皓，2009）。教學者拿出一副撲克牌，隨機選取一位學生，將牌展開讓學生從中任意抽取一張，之後請學生將牌展示給全場同學看，但不可讓教學者看到或知道，請同學記好抽取張的花色和點數後，將牌蓋起來。教學者此時拿起手中剩餘牌湊到耳朵「聽」，即能講出被抽走的牌之花色和點數。教學者再隨機選取兩位學生，利用同一副牌再展演數學魔術兩次。魔術表演完後，詢問「魔術如何變的？」先鼓勵同學發問，與同學一起討論，引發興趣，但先不破解魔術。
2. 魔術活動 2-鐵支術：教學者繼續利用同一副撲克牌，問在場同學，玩撲克牌遊戲時最喜歡拿到哪一種「鐵支（four of a kind）」，即四張花色不同點數相同的牌，在教學者將撲克牌依序發成三份，再依序合併，連續做兩次後，即可依牌型抽出同學指定的鐵支。魔術表演完後，也是鼓勵同學發問，與同學一起討論。
3. 破解魔術：讓同學試著去分析其中的可能，討論魔術中可能用到的數學。經過一番討論後。展示魔術所利用的撲克牌（圖 5），讓同學觀察其中點數的數列規律與花色的規律，破解兩套魔術的原理與技巧。第一套魔術的數量與代數原理為除了四種花色規律排列外（依序為黑桃、紅心、梅花、方塊），撲克牌點數形成公差 $d=3$ 的等差數列（A, 4, 7, 10, K, 3, 6, ……，圖 5），因為撲克牌點數為 A、2、…、J、Q、K，活動中教導同學模數（modulo）概念，瞭解一個數除以另一個數的餘數，本次模數為 $16 \equiv 3 \pmod{13}$ 。瞭解撲克牌排列規律後，進行魔術表演時，表演者即可透過觀察被抽走的前一張牌，運用撲克牌規律歸納推理做成功預測。第二套魔術運用同一套牌，先將撲克牌依序分三份，輪流發牌，全部發完後，依分牌順序將三份牌合併，即可將撲克牌點數變為公差 $d=3 \times 3=9$ 的等差數列。接著重複一次，再將撲克牌依序分三份，即變為公差 $d=3 \times 9=27$ 的等差數列，而公差 $27 \equiv 1 \pmod{13}$ 。因此經過兩次將撲克牌依序分三份方式，即可洗出公差 $d=1$ 的等差數列，即撲克牌呈連續點數，接著只要依序抽出同學指定的鐵支，即可完成鐵支術魔術表演。



圖 5 具數學規律的撲克牌

4. 測試學生的理解程度：經歷上述等差數列與模數規律說明後，讓同學動手排牌實際運用花色規律與代數等差原理排出可以變魔術的規律牌，觀察同學排牌歷程，瞭解學生是否實際投入教案學習活動與對等差概念的理解。
5. 實際演練：請同學分組演練兩套魔術，最後並請一位同學上台表演，隨時抽問學生，以檢測學生的理解程度，並從中提醒表演魔術的一些細節。
6. 準備結語與預告：最後簡單扼要地複習整個數學魔術教案活動的重點，邀請學生回饋今天所學習到的東西，並透過反問確認學生的理解程度。再運用數學規律，教授如何最快排出有規律的魔術道具牌。最後連結八年級之「等差數列」單元，讓同學覺知「等差數列」在魔術中的運用。

(二) 教案核心概念

1. 請同學動手做將普通的撲克牌變成有規律的魔術道具牌，在這悅趣化學習歷程中，同學運用所得到的經驗去觀察分析等差數列，從中體會數列的數學規律，培養學生歸納推理的能力。
2. 請同學分組演練魔術，讓同學運用等差數列與花色的規律，學習從上一張牌歸納推理出被抽的牌，根據數量及代數知識、運用數量及代數技能、並藉由適當資訊，去描述、模擬、解釋與預測各種現象（數量與代數素養），讓學生體會與運用規律做預測的經驗。
3. 讓同學藉由兩套魔術的表演，跳脫學習數學刻板印象，從遊戲中學習，瞭解數學的不同面向，體會悅趣化學習與傳遞歸納思考的數學文化。

(三) 教案實施過程探究

這份教案有兩節課，雖然時間簡短，我們從學生上課反應、學習心得與回饋單做觀察與分析。在現場教學觀察中，雖然大部分同學都能運用等差數列、花色差異與模數概念排出可以變魔術的規律牌，但實際觀察仍有少數同學無法順利排出規律牌，經由一對一個別指導，引導其

發現排牌中的迷思與錯誤，最後也能完成撲克牌排序。回饋單兩個題目「這次教學活動是否有助於你對等差數列單元概念的理解？」與「這次教學活動是否能引起你對等差數列單元的學習興趣？」均獲得全班 26 人（100%）認同，學生的理解程度可由質性回饋意見瞭解，如同學陳述「此次的活動讓我對等差數列有更加的認識，還學習到如何在生活中與活用。」、「發現數學更多有趣的地方」、「這次活動有助於我對等差數列的了解並活用此觀念。」、與「用撲克牌改變我對等差數列的計算思考。」等，由此可以發現所開發之悅趣化學習「數學魔術」教案教學的確可以增進學生對於等差數列單元概念理解與學習興趣，培養學生歸納推理的能力，進而運用數學規律，實際表演魔術。

（四）檢討與反思

根據整個教案實施情形和同學回饋單的反應可以看出，教學者與同學在課堂上的互動相當熱絡，本份教案確實可以引起同學數學學習興趣，並提升等差數列單元概念的理解與學習興趣。研究結果顯現所開發教案可以有效引發學生學習興趣，協助其瞭解教案之數學概念，最後運用數量與代數素養理解活動背後之數學意涵。相同的教案，作者也在其他三所國中進行過實驗教學，反應與回饋大都是正面的，可見運用數學規律展演魔術，確實有其教學成效。教育不是注水入壺，而是點亮蠟燭。運用兩節課玩數學魔術的教案，或許一些教師有時間上考量，可能不會採用，但教學有時「少即是多」，依據 TIMSS 調查，臺灣「數學教學吸引學生投入的程度」數據百分比低於國際平均，我們理應轉變觀念，將數學教育提升到數學文化教育的層面，適時利用玩中學提升學習興趣，引領學生數學文化經驗的累積，讓學生體驗數學的過程和樂趣。如同一位同學回饋單中陳述「這是我第一次覺得數學這麼有趣，平常都覺得很困難，謝謝老師。」顯現此開發悅趣化學習教案的價值。

二、「中國益智遊戲九連環」教案

九連環（Chinese ring）（圖 6）是一種中國古典的數學遊戲，這種傳統玩具在民間極為普及。它包含著九個相同的圓環及一把「劍」柄，目的是把九個圓環全套上或卸下。因為「九連環」可以透過實際操作，培養學習者觀察、探索、發現、分析、溝通、論證與問題解決之能力。搭配 10 年級之指數、數列、級數與遞迴關係。本教案學習目標為透過動手操作中國益智遊戲九連環，分組合作觀察、紀錄與分析解九連環的技巧與策略，在這悅趣化學習歷程中，同學運用所得到的經驗去體驗遞迴關係，從中體會九連環數學規律，利用指數、數列、級數等數學工具從而歸納推理出代數遞迴式，進而提升其數量與代數素養。



圖 6 九連環

(一) 教案內容

1.教學活動：教學者透過拿出中國益智遊戲九連環做出開場白詢問學生「有沒有玩過九連環？」接著講演九連環歷史與示範操作九連環，讓同學瞭解九連環的兩個基本動作。

(1) 下環：把環從劍柄上卸下的動作，也就是把環從劍柄脫下，再從上方通過劍柄中間卸下。這一個動作除第 1 環可隨時上、下劍柄外，其餘的環因為有別的環扣住，所以都無法卸下。如果前面有一個鄰接的環已經套在劍柄上，且所有前面的環僅有這個在劍柄上時，那麼只要把這一個環暫時移到劍柄頭前面，讓出劍柄頭來，後一個環就可以從上而下通過劍柄中間卸下，之後再將前一環恢復原位就完成下環動作。如圖 7 第 1~3 環在柄下，第 4~6 環在柄上，第 4 環為柄上第一個環，此時將第 4 環暫時移到劍柄頭前面，讓出劍柄頭來，第 5 環就可以從上而下通過劍柄中間卸下。

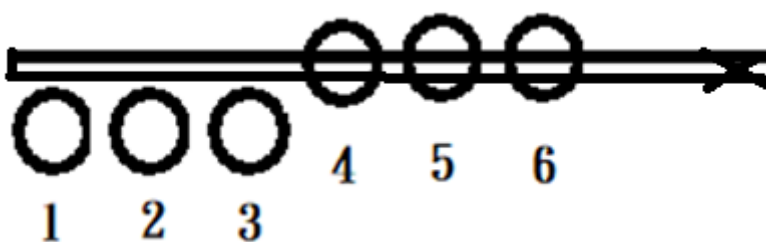


圖 7 第 5 環下環簡圖

(2) 上環：就是把環套到劍柄上的動作，只要按照上法還原，把環從下向上通過劍柄中間套在劍柄頭上即可。如圖 8 第 1~3 環在柄下，第 4 環為柄上第一個環，此時將第 4 環暫時移到劍柄頭前面，讓出劍柄頭來，第 5 環就可以從下向上通過劍柄中間套在劍柄頭上。

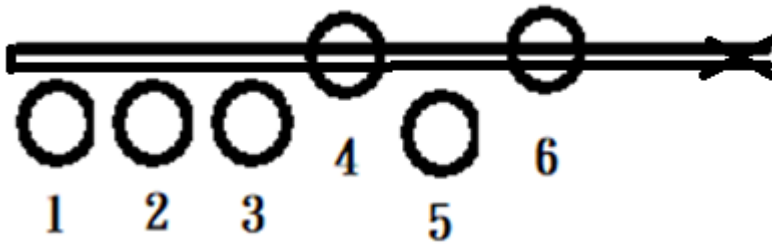


圖 8 第 5 環上環簡圖

- 綜合以上可以歸納出一個要訣，即當 n 大於 2 時，要上／下第 n 環時，第 $n-1$ 環一定要套在劍柄上，而 $n-2$ 以前的環都不能套在劍柄上。
2. 實際演練：讓同學分組實際操作九連環，在操作過程中詢問學生卸下或回覆某一環所需的動作，測試學生的理解程度，確定每組操作方法正確。
 3. 分組記錄：發下學習單，分組合作紀錄，請同學分組合作記下卸下 n 個環所需次數，並透過反問回覆 n 個環所需次數，反覆確認學生的理解程度。
 4. 請同學觀察學習單記錄，分析九連環解環次數規律並說明原因。鼓勵同學進行論證，並歸納推理解 n 個環所需最少次數。
 5. 準備結語與預告：簡單扼要地複習「中國益智遊戲九連環」教案學習活動的重點，請各組同學報告卸下與回覆 n 個環所需次數，展示經由歸納推理出的結果，依據各組報告請同學用實際數據作驗算。最後讓同學覺知教案與 10 年級之指數、數列、級數與遞迴關係的連結。

(二) 教案核心概念

1. 請同學動手操作九連環，分組合作觀察、紀錄與分析解九連環的技巧與策略，在這歷程中同學運用所得到的經驗去體驗遞迴，從中體會九連環數學規律。
2. 請同學分組討論九連環解環次數規律並說明原因，鼓勵同學從實際數據中進行推論，並歸納分析其中關係，讓學生體會與運用規律做預測的經驗，培養其數量與代數素養。
3. 請同學從遞迴原理中預測解 n 個環所需最少次數，即利用數量進行計算的「算術思維」，延伸至運用符號進行結構式運算的「代數思維」，讓同學嘗試運用抽象代數思維解決問題。

(三) 教案實施過程探究

這份教案有兩節課，雖然時間簡短，我們從學生上課反應、學習心得與學習單觀察與分析。經現場觀察全部同學都學會操作九連環。每一組都至少能找到解 5 個環的最少次數並進行記錄觀察，如圖 9 學生運用圖解說明解環次數，左邊數字代表解環數，右邊數字代表環上下順序。圖 9 之 3. $1\downarrow 3\downarrow 1\uparrow 2\downarrow 1\downarrow$ 表示解下前面 3 個環之步驟，為解下第 3 個環，如同下環基本動作說明，只能有第 2 環在柄上，所以第 1 個步驟「 $1\downarrow$ 」表第 1 環直接解下。目前在第 3 環前

面僅第 2 環在柄上時，我們可以解下第 3 個環，即第 2 個步驟「3↓」。接著因為想解下第 2 個環，所以需要第 1 個環在柄上，所以第 3 個步驟「1↑」將第 1 環上環。目前狀態第 1~2 在柄上，第 3 環已解下。接著想解下第 2 個環，進行第 4 個步驟「2↓」，將第 2 環解下。最後第 5 步驟只需直接將第 1 環解下，即「1↓」，因此解下第 1~3 環需要 5 個步驟。

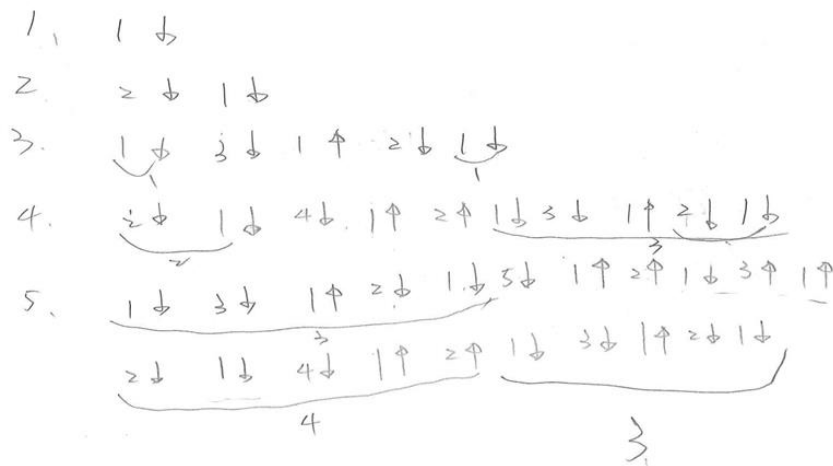


圖 9 解 5 個環的最少次數紀錄。引自“Researching high school students’ strategies for solving the Chinese rings,” by T.-S. Chen, in E. Barbin, U. T. Jankvist, T. H. Kjeldsen, B. Smestad, & C. Tzanakis (Eds.), *Proceedings of the Eighth European Summer University on History and Epistemology in mathematics Education* (p. 368), 2019, Oslo Metropolitan University.

如同 Chen (2019) 觀察最後有五組 (62.5%) 能成功發現九連環次數間之關係 (圖 10)，圖 10 呈現學生能利用符號 a_n 表示解下 n 個環次數，備註為小組從實際數據中進行推論，並歸納分析其中關係，根據數量及代數知識與技能、並藉由操作紀錄次數，去預測關係 (數量與代數素養)。如同李源順 (2013) 所言，符號的使用只是進入代數思維的第一步，同學可以探索數量之算術關係，察覺符號背後的代數想法，運用邏輯推理能力做預測，在備註中列出代數關係式。教案實施中只有三組可以正確寫下解九連環次數的遞迴關係(1) (圖 11)。

$$\text{設 } f(n) \text{ 為解 } n \text{ 連環所需最少次數, } a_1 = 1, a_2 = 2, a_n = \begin{cases} 2a_{n-1} + 1, & n = 3, 5, 7, \dots \\ 2a_n, & n = 4, 6, 8, \dots \end{cases} \quad (1)$$

鐵環數	卸下所需次數	回復原狀所需次數	備註
a_1	1	1	a_1
a_2	2	2	$2a_1$
a_3	5	5	$2a_2 + 1$
a_4	10	10	$2a_3$
a_5	21	21	$2a_4 + 1$
a_6	42	42	$2a_5$
a_7	85	85	$2a_6 + 1$
a_8	170	170	$2a_7$
a_9	341	341	$2a_8 + 1$

圖 10 卸下與回復九連環所需次數與關係

$$\begin{aligned}
 a_1 &= 1 \\
 a_2 &= 2a_1 \\
 a_3 &= 2a_2 + 1 \\
 a_4 &= 2a_3 \\
 a_5 &= 2a_4 + 1 \\
 a_6 &= 2a_5 \\
 &\vdots \\
 a_n &= 2a_{(n-1)} \quad n \text{ 為偶} \\
 a_n &= 2a_{(n-1)} + 1 \quad n \text{ 為奇}
 \end{aligned}$$

圖 11 解九連環次數的遞迴關係

(四) 檢討與反思

根據整個教案實施情形和同學學習單的反應可以看出，同學確實學會操作中國傳統數學遊戲九連環，分組互動討論相當熱絡，本份教案確實可以培養學習者觀察、探索、發現、分析與溝

通能力。教案實施中，八組中只有三組可以正確寫下解九連環次數的遞迴關係(1)，雖然另兩組可以觀察出其中的關係，但卻無法寫出正確的遞迴關係式，可見其在數學符號表徵的學習上仍需要加強，這也是教學者需要協助同學加強之處。一些學生面對數學抱持差不多的學習個性，造成一些離譜的錯誤，如其中一組甚至連奇數的「奇」都寫成錯別字「積」。這些錯誤觀念的改善未來都需要教學者循循善誘。

此外，我們可以運用符號工具來協助思考，以 1 表示該位置的環在劍柄上，利用 0 表示該環在劍柄下。以 5 個環為例，如 10110 表示由右邊算來第 1 個環在劍柄下、第 2 個環在劍柄上、第 3 個環亦在劍柄上、第 4 個環在劍柄下、最左邊的 1，則表示第 5 個環在劍柄上。我們可以將全部環都在劍柄上的九連環，簡化為下面符號結構 111111111。我們的目標是將全部環卸到劍柄下，成為 000000000 狀態。這裡使用的 0 與 1 只是記號，用 A 與 B 或其他記號也可以表示。

假設共有 n 個環，若將 n 個環全部卸下需要 a_n 次。從定義來看，全部環在劍柄上的 111...111，需要移動 a_n 次，才能變為 000...000。再從另一種角度想，我們分成幾個步驟卸下，從開始的 111...111，若把前面 $(n-2)$ 個環移下來，即 110...000，需要 a_{n-2} 次。在此狀態 110...000，我們只需要再 1 次移動，就能把第 n 個環卸下，變成 010...000 狀態。接著為了把第 $(n-1)$ 個環下移，我們需要將前面 $(n-2)$ 個環再套上，又需要 a_{n-2} 次，變為 011...111 狀態。此時若要將全部 $(n-1)$ 個環全部下移，又需要 a_{n-1} 次才可成為 000...000 狀態。因此我們得到一個遞迴關係式為

$$a_n = a_{n-2} + 1 + a_{n-2} + a_{n-1} = a_{n-1} + 2 a_{n-2} + 1。 \quad (2)$$

運用符號進行結構式的抽象代數思維論證也是數學文化重要的一環，可惜此次教學活動沒有同學可以發現遞迴關係式(2)。

教學現場中，研究結果顯示，所開發之九連環教案讓同學瞭解相關歷史文化脈絡，經過實際操作可以有效引發學生學習興趣。有些同學運用數量之算術關係，察覺數量背後的代數想法，運用邏輯推理能力做描述與預測代數關係式(1) (圖 10、11)，展現出數量與代數素養。可惜參與活動的同學欠缺更深一層運用符號進行結構式的抽象代數思維能力，在此次教案活動中無法發現遞迴關係式(2)，這也是目前臺灣學生比較欠缺的能力。

陸、結論

目前臺灣學習落後學生百分比呈現了持續下降的趨勢，城鄉間的差距也微幅縮小，這些成就呈現臺灣國中小學教師與各界對數學教育投入、關心和努力的成果，然而更值得我們長期關注的是學生「對數學的學習興趣」與「數學教學吸引學生投入的程度」趨勢結果，兩項調查數據

百分比均低於國際平均，常常位居末段。從「撲克牌數學魔術」教案的教學研究結果發現，幾乎全部同學都很認同此次教學活動，運用數學原理悅趣化學習方式變魔術對很多同學是很新鮮的經驗，藉由結合國中等差數列單元的觀念，讓同學體會數學的妙用，確實能引發同學的學習興趣。這和 Koirala 與 Goodwin (2000) 和 Lim (2018) 利用數學魔術教學引發學習興趣具有類似成效。「撲克牌數學魔術」教案教學的確可以增進學生對於等差數列單元概念理解與學習興趣。透過所開發悅趣化學習教案，讓學生體會與運用規律做出歸納推理，進而運用數學規律，以培養數量與代數素養。依據幾次「撲克牌數學魔術」教學經驗，每次中間下課 10 分鐘時間，多數同學仍然留在教室中繼續玩數學魔術，可見悅趣化學習方式教學可以有效吸引學生投入。研究結果顯現所開發悅趣化學習教案確實可以有效引發學生學習興趣，協助其瞭解教案之數量與代數概念，增進學生對於等差數列單元概念理解，培養學生歸納推理的能力，最後運用數量與代數素養表演魔術。

根據整個悅趣化學習九連環教案實施情形和同學學習單的反應可以看出，同學確實學會操作中國傳統數學遊戲九連環，分組互動討論相當熱絡，本份教案確實可以培養學習者觀察、探索、發現、分析與溝通能力，瞭解其中代數遞迴概念，讓學生運用規律做歸納推理，培養學生數量與代數素養。可惜有些同學雖觀察出其中「關係」，但在數學表徵上卻出錯，除了缺乏精準的邏輯推理外，這或許與臺灣一些學生面對數學抱持差不多的個性有關，造成一些離譜的錯誤，這些未來都需要教學者多花些心思循循善誘。如同許多學者（洪萬生，1996a，1996b；袁媛，1993；陳嘉皇，2006，2007；Laborde, 1990；Schliemann et al., 2007；Simon, 1980）指出，由「算術」進入「代數」學習，對一些學生而言是一個很高的門檻，此次教學中大部分十二年級學生可以利用數量之算術關係，運用數量與代數素養，察覺數字背後的代數想法，運用邏輯推理能力做預測，發現代數關係式(1)，可惜同學無法更深一層運用符號進行結構式的抽象代數思維能力發現遞迴關係式(2)。這也是未來中學代數教學需要大大著力之處。當初教案規劃重點在於教導學生玩九連環與分析學生解九連環策略，為避免造成同學太多負擔，未調查學生的一些數學知識觀點，所以欠缺一些相關資訊，未來可以考慮用其他模式彌補，如課後線上訪談或線上問卷進行。

數學遊戲可以說是一種「庶民數學」，反映出不同地區居民的數學文化。Moyer (2001) 就主張，不同的文化元素可以提供我們對數學本質有更豐富的理解，只要在文化脈絡中適時注入數學知識和技巧，不僅可以幫助學生的數學思考，更可以增進他們對於多元文化的認識。Fouze 與 Amit (2018) 也指出，將充滿民族數學意涵的遊戲引入教學之中，不僅能提升學習數學的效果，也能彰顯數學的文化價值，學生更容易融入。本研究觀察發現，悅趣化數學文化教案教學確實能在短時間引發同學對數學的興趣，增進學生對於單元概念理解，所以建議學校教師可以

配合教學進度進行悅趣化數學文化教案教學，並繼續關注此類教學是否可以長期改善同學對數學的態度、觀點與素養。或許一些教師覺得運用兩節課教授「撲克牌數學魔術」與「中國益智遊戲九連環」教案，花費太多時間，但教育不是注水入壺，而是點亮蠟燭。教學有時「少即是多」，適時利用玩中學，提升學習興趣，培養學生數量與代數素養，引領學生數學文化經驗的累積，讓數學學習從工具性的層次延伸到智識性的層次，學習中體驗數學的過程和樂趣。

本論文教學限制為教學者實施教案活動前與參與同學都不認識，在教學初期不易掌握學生程度來因材施教，只能透過慢慢觀察調整教學。因為只實施一次活動，後續追蹤與觀察都不容易，教案活動實施成效長期效果不易追蹤。本研究的兩個教案活動所參與的對象，包含人數與選定都受到限制，因此結論也有所侷限。期盼經由此次教案的活動初探研究，未來建議可以結合一些相關教案發展一整學期的數學文化素養課程，並探究此類型素養課程對於學生是否有所助益。

誌謝

本文是科技部專題研究計畫 MOST 106-2511-S-167 -002 -MY2 之部份研究成果，感謝科技部經費補助。感謝匿名審查者與臺灣數學教育期刊編輯委員所給予之建議和修正。

參考文獻

- 中華人民共和國教育部（2013）。普通高中數學課程標準（實驗稿）。北京：人民教育出版社。
【Ministry of Education of the People's Republic of China. (2013). *Senior high school mathematics curriculum standard (experiment manuscript)*. Beijing: People's Education Press. (in Chinese)】
- 中華人民共和國教育部（2017）。普通高中數學課程標準。北京：人民教育出版社。【Ministry of Education of the People's Republic of China. (2017). *Senior high school mathematics curriculum standard*. Beijing: People's Education Press. (in Chinese)】
- 方延明（2007）。數學文化。北京：清華大學出版社。【Fang, Yen-Ming (2007). *Mathematical culture*. Beijing: Tsinghua University Press. (in Chinese)】
- 王憲昌、劉鵬飛、耿鑫彪（2010）。數學文化概論。北京：科學出版社。【Wang, Hsien-Chang, Liu, Peng-Fei, & Keng, Hsin-Piao (2010). *Introduction to mathematical culture*. Beijing: Science Press. (in Chinese)】
- 李國偉、黃文璋、楊德清、劉柏宏（2013）。提升國民素養實施方案-數學素養期末報告。新北市：國家教育研究院。【Lih, Ko-Wei, Huang, Wen-Jang, Yang, Der-Ching, & Liu, Po-Hung (2013). *MOE project for uplifting citizen literacy: Final report of math literacy project*. Taipei: Ministry of Education. (in Chinese)】
- 李源順（2013）。數學這樣教：國小數學感教育。臺北：五南。【Lee, Yuan-Shun (2013). *Teach math like this: Elementary school mathematics sense education*. Taipei: Wu-nan. (in Chinese)】

- 林壽福、吳如皓（2009）。**數學魔術：27 個數學概念奇蹟**。臺北：尖端。【Lin, Shou-Fu & Wu, Ju-Hao (2009). *Mathematical magic: 27 miracles of mathematical concepts*. Taipei: Sharp point. (in Chinese)】
- 侯惠澤（2016）。**遊戲式學習：啟動自學 × 喜樂協作，一起玩中學！**臺北：親子天下。【Hou, Hwei-Tse (2016). *Game-based learning: Start self-study × joy collaboration, play learning together!* Taipei: Education · Parenting Family Lifestyle. (in Chinese)】
- 俞昕（2015）。擴談數學選修課“九連環”教學。**中學數學雜誌**，5，6-8。【Yu, Hsin (2015). Talking about the "Chinese ring" teaching of mathematics elective subject. *Zhongxue Shuxue Zazhi*, 5, 6-8. (in Chinese)】
- 洪萬生（1996a）。康熙皇帝與符號代數。**HPM 通訊**，2（1），1-3。【Horng, Wann-Sheng (1996b). Emperor Kangxi and symbolic algebra. *HPM TongXun*, 2(1), 1-3. (in Chinese)】
- 洪萬生（1996b）。數學史與代數學習。**科學月刊**，27（7），560-567。【Horng, Wann-Sheng (1996a). History of mathematics and learning of algebra. *Science Monthly*, 27(7), 560-567. (in Chinese)】
- 唐慧榮（2019）。古典數學遊戲走進小學數學課堂——“九連環”課堂實踐。**小學數學教師**，6，19-22。【Tang, Hui-Jung (2015). The practice of classical math games enter the primary school mathematics classroom -"Chinese ring". *Primary School Teaching Research*, 6, 19-22. (in Chinese)】
- 袁媛（1993）。國中一年級學生的文字符號概念與代數文字題的解題研究（未出版之碩士論文）。國立高雄師範大學，高雄市。【Yuan, Yuan (1993). *Research on symbolic concept of letters and word problem solving* (Unpublished master's thesis). National Kaohsiung Normal University, Kaohsiung. (in Chinese)】
- 高將、崔志永（2012）。關於九連環入選初中活動課程的價值研究。**中國科教創新導刊**，29，64。【Kao, Chiang, & Tsui, Chih-Yung (2012). Research on the value of Chinese ring selected into the junior middle school activity curriculum. *China Education Innovation Herald*, 29, 64. (in Chinese)】
- 張海潮（2011）。從代數到算術——獻給國中小的老師。**數學傳播**，35（4），49-51。【Chang, Hai-Chao (2011). From algebra to arithmetic, dedicated to elementary and junior high school teachers. *Mathmedia*, 35(4), 49-51. (in Chinese)】
- 張奠宙、梁紹君、金家梁（2003）。數學文化的一些新視角。**數學教育學報**，12（1），37-40。【Chang, Tien-Chou, Liang, Shao-Chun, & Chin, Chia-Liang (2003). Some new perspectives of mathematical culture. *Journal of Mathematics Education*, 12(1), 37-40. (in Chinese)】
- 張維忠、唐恒鈞（2008）。民族數學與數學課程改革。**數學傳播**，32（4），80-87。【Chang, Wei-Chung, & Tang, Heng-Chun (2008). Ethnomathematics and mathematics curriculum reform. *Mathmedia*, 32(4), 80-87. (in Chinese)】
- 教育部（2018）。十二年國民基本教育國民中小學暨普通型高級中等學校課程綱要（數學領域）。臺北：作者。【Taiwan Ministry of Education. (2018). *Curriculum guidelines of 12-year basic education: Elementary and junior high school and general senior high school (mathematics)*. Taipei: Author. (in Chinese)】
- 教育部（2020年12月8日）。臺灣參加國際數學與科學教育成就趨勢調查（TIMSS 2019）成果發表會。檢自 https://www.edu.tw/News_Content.aspx?n=9E7AC85F1954DDA8&s=B822E38553C1D561 【Taiwan Ministry of Education. (2018, December 8). *The report of trends in international*

- mathematics and science study 2019 for Taiwan*. Retrieved from https://www.edu.tw/News_Content.aspx?n=9E7AC85F1954DDA8&s=B822E38553C1D561 (in Chinese)】
- 陳嘉皇 (2006)。國小五年級學童代數推理策略應用之研究：以「圖卡覆蓋」解題情境歸納算式關係為例。《屏東教育大學學報》，25，381-412。【Chen, Chia-Huang (2006). A study of apply strategies on algebraic reasoning: An example from cover and arrange grids to generalize mathematical equation. *Journal of National Pingtung University of Education*, 25, 381-412. (in Chinese)】
- 陳嘉皇 (2007)。學童「圖卡覆蓋」代數推理歷程之研究—以三個個案為例。《國民教育研究學報》，19，79-107。【Chen, Chia-Huang (2007). A study on the development process analysis of algebraic reasoning—Three examples from student's cardboard covering. *Journal of Research on Elementary and Secondary Education*, 19, 79-107. (in Chinese)】
- 賓靜蓀 (2020 年 12 月 11 日)。TIMSS 調查：台灣學生科學、數學成績全球排行前五，卻不愛學。《親子天下》。檢自 <https://flipedu.parenting.com.tw/article/6309> 【Pin, Ching-Sun (2020, December 11). *TIMSS survey: Taiwanese students rank among the top five in science and mathematics in the world, but they don't like to learn*. Taipei: Education · Parenting Family Lifestyle. (in Chinese)】
- 劉柏宏 (2016)。從數學與文化的關係探討數學文化素養之內涵—理論與案例分析。《臺灣數學教育期刊》，3 (1)，55-83。doi: 10.6278/tjme.20160413.001 【Liu, Po-Hung (2016). Discourse on the constituent of literacy for mathematical culture in terms of the relationship between mathematics and culture - Theoretical and case analysis. *Taiwan Journal of Mathematics Education*, 3(1), 55-83. doi: 10.6278/tjme.20160413.001 (in Chinese)】
- 歐陽絳 (2008)。《數學方法溯源》。大連：大連理工大學出版社。【Ouyang, Chiang (2008). *Trace to the source of mathematical methods*. Dalian: Dalian University of Technology Press. (in Chinese)】
- 謝于婷、吳嘉文 (2015 年 6 月 18 日)。猜對了嗎？“停車格數學題超難”【新聞影片】。中華電視公司。取自 <https://news.cts.com.tw/cts/general/201506/201506181626784.html> 【Hsien, Yu-Ting, & Wu, Chia-Wen (2015, June 18). Did you guess right? "The mathematical problem of parking grid is super difficult" [news film]. *Chinese Television System*. Retrieved from <https://news.cts.com.tw/cts/general/201506/201506181626784.html> (in Chinese)】
- 米山國藏 (1986)。《數學的精神、思想與方法》(毛正中、吳素華譯)。成都：四川教育出版社。(原作出版於 1969 年) 【Yoneyama, Kunizo (1986). *The spirit, thoughts and methods of mathematics* (Zheng-Zhong Mao & Su-Hua Wu, Trans.). Chengdu: Sichuan Education Press. (Original work published 1969) (in Chinese)】
- Burton, L. (2009). The culture of mathematics and the mathematical culture. In O. Skovsmose, P. Valero, & O. R. Christensen (Eds.), *University science and mathematics education in transition* (pp. 157-173). New York, NY: Springer. doi: 10.1007/978-0-387-09829-6_8
- Cajori, F. (1928). *A history of mathematical notations*. La Salle, IL: Open Court.
- Chen, T.-S. (2019). Researching high school students' strategies for solving the Chinese rings. In E. Barbin, U. T. Jankvist, T. H. Kjeldsen, B. Smestad, & C. Tzanakis (Eds.), *Proceedings of the Eighth European Summer University on History and Epistemology in mathematics Education* (pp. 367-369). Oslo, Norway: Oslo Metropolitan University.

- Fouze, A. Q., & Amit, M. (2018). Development of mathematical thinking through integration of ethnomathematic folklore game in math instruction. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 14(2), 617-630. doi: 10.12973/ejmste/80626
- Garris, R., Ahlers, R., & Driskell, J. E. (2002). Games, motivation, and learning: A research and practice model. *Simulation & Gaming: An Interdisciplinary Journal of Theory, Practice and Research*, 33(4), 441-467. doi: 10.1177/1046878102238607
- Haverty, L. A., Koedinger, K. R., Klahr, D., & Alibali, M. W. (2000). Solving inductive reasoning problems in mathematics: Not-so-trivial pursuit. *Cognitive Science*, 24(2), 249-298. doi: 10.1207/s15516709cog2402_3
- Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 390-419). New York, NY: Macmillan.
- Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels: Building meaning for symbols and their manipulation. In F. K. Lester, Jr. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 707-762). Charlotte, NC: Information Age.
- Kline, M. (1953). *Mathematics in western culture*. New York, NY: Oxford University Press. doi: 10.1002/sce.37303903111
- Koirala, H. P., & Goodwin, P. M. (2000). Teaching algebra in the middle grades using mathmagic. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 5(9), 562-566. doi: 10.5951/MTMS.5.9.0562
- Laborde, C. (1990). Language and mathematics. In P. Nesher & J. Kilpatrick(Eds.), *Mathematics and cognition: A research synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 53-69). New York, NY: Cambridge University Press. doi: 10.1017/CBO9781139013499.005
- Lim, K. H. (2018). Using math magic to reinforce algebraic concepts: An exploratory study. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 50(5), 747-765. doi: 10.1080/0020739X.2018.1537450
- Molnár, G., Greiff, S., & Csapó, B. (2013). Inductive reasoning, domain specific and complex problem solving: Relations and development. *Thinking Skill and Creativity*, 9, 35-45. doi: 10.1016/j.tsc.2013.03.002
- Moyer, P. (2001). Making mathematics culturally relevant. *Mathematics Teaching*, 176, 3-5.
- Mullis, I. V. S., Martin, M. O., Foy, P., Kelly, D. L., & Fishbein, B. (2020). *TIMSS 2019 international results in mathematics and science*. Chestnut Hill, MA: TIMSS & PIRLS International Study Center, Boston College.
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.
- Organisation for Economic Co-operation and Development. (2018, November). *PISA 2021 mathematics framework (draft)*. OECD. <https://pisa2021-maths.oecd.org/files/PISA%202021%20Mathematics%20Framework%20Draft.pdf>

- Plass, J. L., Perlin, K., & Nordlinger, J. (2010, March). *The games for learning institute: Research on design patterns for effective educational games*. Paper presented at the Game Developers Conference, San Francisco, CA.
- Plass, J. L., Homer, B. D., & Kinzer, C. K. (2015). Foundations of game-based learning. *Educational Psychologist*, 50(4), 258-283. doi: 10.1080/00461520.2015.1122533
- Polya, G. (1954). *Mathematics and plausible reasoning, Volume I: Induction and analogy in mathematics*. Princeton, NJ: Princeton University Press. doi: 10.2307/j.ctv14164db
- Schliemann, A. D., Carraher, D. W., & Brizuela, B. M. (2007). *Bringing out the algebraic character of arithmetic: From children's ideas to classroom practice*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates. doi: 10.4324/9780203827192
- Simon, H. A. (1980). Problem solving and education. In D. T. Tuma & F. Reif (Eds.), *Problem solving and education: Issues in teaching and research* (pp. 81-96). Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Van Vo, D., & Csapó, B. (2020). Development of inductive reasoning in students across school grade levels. *Thinking Skill and Creativity*, 37, 100699. doi: 10.1016/j.tsc.2020.100699
- Wilder, R. L. (1950). The cultural basis of mathematics. In L. M. Graves, E. Hille, P. A. Smith, & O. Zariski (Eds.), *Proceedings of the International Congress of Mathematicians* (pp. 258-271). Providence, RI: American Mathematical society.
- Zazkis, R., & Liljedahl, P. (2002). Arithmetic sequence as a bridge between conceptual fields. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 2(1), 91-118. doi: 10.1080/14926150209556501

劉柏宏 (2021)。
論數學文化與數學教育的關係。
臺灣數學教育期刊, 8 (1), 79-88。
doi: 10.6278/tjme.202104_8(1).004

論數學文化與數學教育的關係

劉柏宏

國立勤益科技大學基礎通識教育中心

數學自身是人類諸多文化中的一種次文化，某一地區社會的數學文化對於該地區的數學教育有著舉足輕重的影響，因此本文從人類學、歷史與社會、和哲學的角度闡述數學文化的意涵，並透過一些與數學文化相關的教育研究，論述數學文化在數學教育上的價值。本文主張，「文化中的數學」和「數學中的文化」兩者的互動融滲不僅關係到該社會中數學知識的形成過程，更會影響其數學教育的現實面。因此若要提升數學的教與學，必須在數學文化的大架構下一方面在學習數學過程中實踐「數學中的文化」，另一方面必須時時關照「文化中的數學」取向。

關鍵詞：數學文化、數學文化的價值、數學教育

通訊作者：劉柏宏，e-mail：liuph@ncut.edu.tw

收稿：2021年3月15日；

接受刊登：2021年4月9日。

壹、前言

一個社會所強調的文化價值觀就代表著該社會群體文化的核心特徵（Hofstede, 1980; Schwartz, 2006）。毫無疑問地，社會群體的文化價值取向無形之中會影響其中的個體對待特定人事物的信念和行動目的，但個體實際的行為表現卻不見得完全是依據內在所抱持的信念而行，而係與其所處的外在現實環境條件有關，也就造成信念與行為兩者間之落差。一個地區或民族的文化基本核心係由透過歷史演繹與選擇所形成的一種傳統觀念，特別是與它們所附帶的價值所組成。綜合考量這些因素，如圖 1 所示之「文化-行為關係圖」，圖中顯示出整體文化型塑出個體與群體的信念並造就現實脈絡，而個體與群體的行為是信念與現實折衝妥協的結果，最終表現則視信念與現實兩者折衝之後其個別所占比例之多寡決定。值得注意的是，文化系統某一方面可以視為行動的產物，另一方面又可視為進一步行動的機制元素（Kroeber & Kluckhohn, 1952），因此圖一的關係圖並不是靜態的，而是呈現一種「由外而內」與「由內而外」的動態演變過程。數學是人類文化中偉大的智識成就之一，自身也形成一種次文化，而這種數學文化對於數學的教與學自然會產生相當的影響。

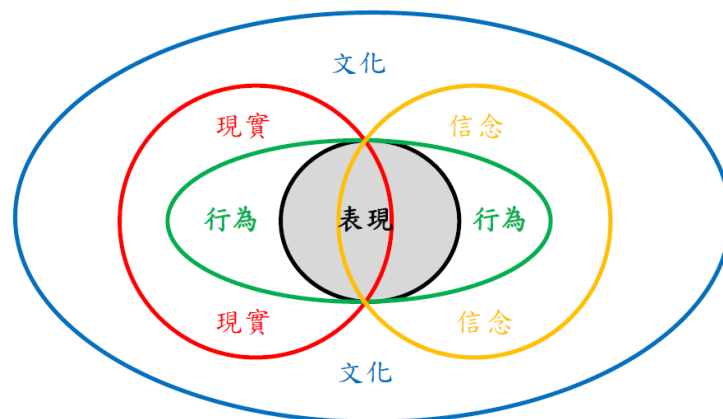


圖 1 「文化-行為關係圖」

貳、數學文化的三種視角

一、數學文化的內涵

早期具體提出數學文化（mathematical culture）概念的當屬數學家懷爾德（Raymond Wilder, 1896-1982）。他於 1950 年的國際數學家大會中以「數學的文化基底」（cultural basis of mathematics）為題發表演講，闡述數學文化的內涵和重要性。懷爾德（Wilder, 1950）強調，唯有認識數學的文化基底，才能對數學本質有更深入的理解。只是「文化」一詞極端抽象，從任何單一學術領域解

讀都難以一窺堂奧。論述數學文化的內涵至少可以從以下三個視角出發。

（一）人類學視角

從人類學解讀數學發展本質的第一人非懷爾德莫屬。身為一位職業數學家，懷爾德（Wilder, 1968）不是從數學知識的結構或數學思維的過程談數學文化，也不是從數學歷史演變的角度談數學文化，而是從人類學的觀點。他指出，假設一位數學史家 A 君生於公元 1200 年代的中國，他（她）記載的內容不外乎數字計算和解方程，不會談類似古希臘的幾何學，因為當時中國數學偏重計算之學，並沒有幾何論證的風氣。同樣地，若 A 君成長於公元 200 年的希臘，他（她）所寫的數學史必定涵蓋歐幾里得幾何學，而甚少著墨於代數，甚至數字計算。不過若 A 君是當代歷史學家，他（她）撰寫的內容必定同時包含幾何和代數，因為當今這兩者都是數學的一部份。從這一段敘述可以看出懷爾德深信人類文化脈絡對知識發展有著關鍵性的地位，學術的發展很明顯受當時文化的制約。懷爾德（Wilder, 1968）更明確指出，只有在強大的環境壓力和內部壓力作用下，才能有效改變數學演變的進程，例如當孕育知識所在地區的宿主文化（host culture）有重大改變，或是數學知識本身面臨危機時，數學演變的路徑才會產生明顯的改變。例如，古代的中國和中世紀的歐洲，其宿主文化的狀態穩定或停滯，而導致數學發展缺乏突破。相對的，二戰前後大量歐洲數學家移居美國，引發美國數學研究的重大進展。對懷爾德來說，從人類文化學檢視數學發展本質的好處是，某些對整個社會的文化演變中不十分明顯也沒有重大意義的形式和過程，對數學而言可能就變得相當重要。值得注意的是，懷爾德十分強調數學歷史（history）和數學演變（evolution）的不同，例如「馬的歷史」和「馬的演變」就是不同的概念，數學演變的概念接近於相當於生物演化的概念。

懷爾德於 1981 年進一步闡述數學和人類社會的文化演變之間的關係（Wilder, 1981）。他指出，歷史紀錄發生的事件是一種特殊化（particularizing）的過程，而演變則是一種一般化（generalizing）的過程。演變重視引發變化的作用張力（如遺傳張力、環境外部張力和知識內部張力），以文化演變的觀點看待歷史經常會獲得新的認識。在此我們以微積分和非歐幾何來理解懷爾德的論點。從數學知識來看，十七世紀微分的誕生是為了計算行星瞬間速率和切線斜率，但從文化角度來看，是為了回應十六世紀哥白尼的《天體運行論》對整個科學界所產生的外部環境張力。另一方面，非歐幾何的出現並沒有因為任何外部張力，而是源於數學家長期對歐幾里德平行公設存疑所累積的內部張力。

（二）歷史和社會視角

克萊恩的《西方文化中的數學》（Kline, 1954）表明了數學是整個人類主文化中的一種次文化，但他更大的企圖在於揭示數學是「西方文明中一個主要的文化推動力量」（a major cultural

force in Western civilization, p. ix)。這種聽起來似乎不可思議的企圖當然會引來批評，不過克萊恩認為這是由於長期以來大眾對於數學本質錯誤的認知所致。他主張數學雖然是一個知識體，但不包含真理 (truths)。科學確實在追求物理世界的真理，而數學只是扮演烽火台的角色，指引科學到達它的目的。推進數學發展的動力除回應社會所需的問題外，最重要的就是對美的追尋 (over and above all other drives to create is the search for beauty, p. 5)，這些論點都顛覆一般人對數學的認知。

在克萊恩眼中數學知識發展背後的原因難以個別區分開來，舉凡實用的、科學的、美感的和哲學等等的因素都型塑出今日所見到的數學，所以數學不僅僅是一種思維方式、一種藝術，或一種語言。數學能滿足自然科學家、社會科學家、邏輯學家、藝術家、音樂家、甚至神學家的需求，所以克萊恩在《西方文化中的數學》一書中談論數學如何與哲學、宗教、天文學、繪畫、音樂、建築、文學等領域互動，尤其是牛頓所引發的論戰。詩人波普 (Alexander Pope, 1688-1744) 曾寫下讚頌牛頓的雋永名句：「自然和自然的法則隱藏在黑夜之中。上帝說：讓牛頓去吧，於是一切變得光明。」法國哲學家伏爾泰 (1694-1778) 和情人合著的《牛頓哲學的原理》(*Elements of the Philosophy of Newton*) 一書的扉頁是一幅銅版畫，正是描寫牛頓所引來的智慧之光，用此表達對牛頓最崇高的敬意。不過十八世紀英國詩人畫家布雷克 (William Blake, 1757-1827) 在其畫作中將牛頓描繪成一位身體肌肉如幾何般僵硬，只知用圓規屈身埋首於測量的科學家，卻完全無視於背後巨石上發散出有如彩虹般的燦爛光輝。這是在諷刺牛頓的稜鏡實驗將太陽光析離成多彩顏色的組成，破壞文人對彩虹的想像，所以這幅畫是對牛頓在光學研究的諷刺與鄙視，布雷克並指稱推理是惡魔，而牛頓是最高級的祭司。可見在西方文化中，對待科學的態度並不如我們想像般全然是理性的，其中充滿許多智識文化的衝突與妥協。

(三) 哲學的視角

1980 年之前由於受到實證主義思想的影響，數學哲學的研究偏向形式邏輯，強調數學知識結構之嚴謹與絕對性。數學哲學界約莫從 1980 年代開始重視數學的經驗性，其中的代表作有二，一是拉卡托斯 (Imre Lakatos, 1922-1974) 的《證明與反駁》(*Proofs and Refutations*) (Lakatos, 1976)，另一是克萊恩的《數學：確定性的失落》(*Mathematics: The loss of certainty*) (Kline, 1982)。1960 年代英國數學家拉卡托斯眼見當時英國大數學家哈第 (Godfrey Hardy, 1877-1947) 主張的數學形式主義 (formalism) 蔚為數學哲學的主流，因此開始改寫他的博士論文成為《證明與反駁》一書。書中採蘇格拉底辯證方式，藉由師生交叉辯詰與對話探究多面體的「點 (V)、邊 (E)、面 (F)」關係式，也就是歐拉多面體公式 $V-E+F=2$ 。全書展現出一個數學概念如何「琢磨」(polishing) 的歷程。拉卡托斯強調「思想實驗」(thought experiment) 與「準實驗」(quasi-experiment)，以突顯數學方法論中「觀察特例→猜想規律→建構反例→修正猜想→提出證明」

的精髓。克萊恩在《數學：確定性的失落》一書中直陳“數學的發展歷程其實很不邏輯”，其中包含錯誤的證明、推理的疏漏、概念的認知錯誤等等，這番論述顛覆一般人對數學的印象。事實上，克萊恩的論斷有其歷史依據，許多數學概念的產生不是根據理性的邏輯推理，甚至有些時候數學家具有「反智」傾向，只為固守信念而不願接受邏輯上並不矛盾的新概念。例如畢達哥拉斯堅持宇宙間只存在正整數和由正整數所形成的比例數（ q/p ），也就是有理數，類似 $\sqrt{2}$ 這種無理數是不存在的。往後一千多年的數學主流思想一直堅持畢氏的想法，直到十六世紀文藝復興時期才接受根號運算，但仍拒絕 $\sqrt{-1}$ 的存在（雖然運算中會使用到它），再等到十七世紀的笛卡爾才承認 $\sqrt{-1}$ 是一個數字，不過他還是不太願意大方承認它是個真實的數（real number），而是個想像的數（imaginary number），中文翻譯以縹緲的「虛數」稱之。

我們可以發現無論是克萊恩或是拉卡托斯，都是從數學家的思維歷程出發，而不是以最後的知識結構做為探究數學本質的依歸，也就是如赫許（Ruben Hersh）所說，數學哲學的工作應該聚焦於“職業數學家的工作哲學”（working philosophy of professional mathematicians）（Hersh, 1997, p. 31）。在此基礎之上，數學哲學出現兩派相關的主張，分別是拉卡托斯的經驗主義觀（empiricist view）（Lakatos, 1978）和厄尼斯特的可謬主義觀（fallibilist view）（Ernest, 1991），這兩種觀點強調數學的經驗性，不強調（但不是否定）數學的絕對性，反而著重數學知識的動態過程，主張數學知識不是先驗的（*a priori*），也不必然擁有絕對的真理性（absolute validity）。反而，它是可以調整的，永遠對於修正持開放態度，表明出一種數學知識建構的文化。

從以上三種關於數學文化的論述我們可以發現，不同視角對於數學文化的闡述都有其基本立場。人類學視角以類似生物演化的觀點探究決定數學知識演變的各種張力；歷史與社會視角著重數學如何與其他學科的互動進而引發自身的發展；哲學視角則從職業數學家的工作哲學理解數學知識如何建構。三種視角有不同程度的交集，也彼此互補。若以觀察尺度區分，人類學視角偏向宏觀，比較不探究個別事件等細節，而是注重演變趨勢。哲學視角偏向微觀，關心數學概念的發生、建構與辯證過程，甚少觸及外部環境變化對數學知識的影響；而歷史與社會視角約莫居中，依據歷史走向和社會需求觀察數學知識發展的大方向，但必要時也談論個別事件與細節。這三種知識觀（或稱認識觀，epistemological view）對數學教育也產生重大影響，1990年代科學教育與數學教育之所以引入根基建構主義（radical constructivism）和社會建構主義（social constructivism），也與此三大數學文化思潮密切相關。

參、數學文化在數學教育中的價值

一、數學文化的定義

懷爾德和克萊恩雖然是論述數學文化的先驅者，但兩人都未正式給予數學文化一個具體的

定義。當中的困難可能是因為，數學本身就是人類發展過程中所伴隨產生的一種文化，而「數學文化」一詞是否重複定義？「數學文化」的內涵究竟所指為何？由於「數學文化」很容易與「數學史」畫上等號，因此一般人直覺上認為「數學文化」就是指「數學史」，但事實上兩者是不同的概念，就如同「文化」和「歷史」是兩個相關但不同的概念一般。有鑒於此，劉柏宏（2016）參酌 Kroeber 與 Kluckhohn（1952）關於文化的定義後，將數學文化定義如下：

數學文化就是人類探索數學知識時其行為的外顯和內隱模式，並藉由人類群體，特別是數學家社群，所創造獨特成就的符碼（符號、圖形或文字）來傳遞。（p. 61）

他並從數學文化的人類學、歷史與社會、和哲學視角，建立一個縱橫雙向構面，其中「數學文化」（mathematical culture）係由「文化中的數學」（mathematics in culture）和「數學中的文化」（culture of mathematics）兩個構面組成。前者是以宏觀角度看待數學知識演變的歷程，觀察人類發展過程中，數學在其所屬社會文化所扮演的角色；後者從微觀角度探究數學概念從無到有歷程，觀察數學知識從醞釀到成熟的過程中，個體與群體所顯現的思維模式。我們可以約略地說，「文化中的數學」在概念上大部分較接近懷爾德和克萊恩的主張，而「數學中的文化」則與赫許的“職業數學家的工作哲學”有關，但兩個構面並非獨然而立，而是兩者呈現一種交錯的有機互動發展。

二、數學文化的價值

目前已有不少學者和機構直接討論數學文化在教育上的價值，或是在教學上如何呈現數學與文化的關係（Barta, 2014; Burton, 2009; D'Ambrosio, 1990; Nasir, Hand, & Taylor, 2008; Liu, 2018）。其中最廣為人知的就是「民族數學」（ethnomathematics）。「民族數學」一詞是由 D'Ambrosio（1985）所提出，用於描述一個可識別的文化群體之數學實踐的過程與內容，探究在多元文化中所能找到的數學思想。D'Ambrosio 進一步提出「民族數學」一詞字義的解釋：

字首 Ethno 如今已經廣義地指稱社會的文化脈絡，因此包含語言、術語、行為準則、神話和符號。而演繹 mathema 這詞比較困難，但通常意指解釋、認識、理解、加密、測量，分類，推斷和建模等活動。字尾 tics 源自 techné，和技術有相同的字根。（D'Ambrosio, 1990，引自 Rosa & Orey, 2011, p. 35）

換句話說，‘ethno’是指一個文化環境中以文化傳統、代碼、符號、神話以及用於推理的特定方式來識別某個群體的成員。‘Mathema’的意思是解釋和理解世界，以便超越、管理和應對現實，以便這文化團體的成員能夠生存和發展。而‘tics’是指諸如計數、排序、測量、加密、分類、推斷和建模之類的技術。簡言之，「民族數學」（ethnomathematics）意指在種族背景下為解決人們每天

遭遇的日常問題和人類為創造更有意義的世界所發展的數學技術 (Rosa & Orey, 2011)。D'Ambrosio (2005) 指出，由於全球化和西方古希臘式數學思維成為當代數學知識典範，當今數學教學已經「去知識脈絡化」，少數民族和非主流文化的數學文化多樣性在數學教學中已被犧牲，他們被強迫學習主流文化（例如歐美白人）的數學思維，這種教學取向嚴重忽略數學曾在各地區民族中扮演文化推進力量的事實，不利學生學習數學的自我認同。如此一來將衝擊學生數學學習的真實性和個別性。

Nasir、Hand 與 Taylor (2008) 強調數學知識必須融入文化脈絡，才能激發學生的有感學習以增進學習成效。以計算數值的比例和平均值問題為例，他們觀察一群加州的非裔美國學生，若要求他們直接計算 (1) $7/11=?\%$ 和 (2) (15, 20, 10) 三數之平均值，許多學生的解題策略就是直接用算術規則，卻頻頻出錯，表現並不理想。但是若將第 (1) 題改寫為：「假設你站在罰球線上投了 11 顆球，命中 7 顆。你的投球命中率是多少？」；第 (2) 改寫為：「假設你第一場球賽得 15 分，第二場得 20 分，第三場得 10，這三場的平均得分是多少？」，學生則呈現截然不同的解題表現。許多學生雖受限於算術計算能力無法直接算出答案，但是他們會嘗試發展出估算的解題策略。以第 (1) 題為例，學生假設投了 10 顆球，每進一顆就是占 10%，估計投進 7 顆球的命中率是 70%。由於總共投了 11 顆球，總命中率不可能是 110%，所以學生估算真正的命中率稍低於 70%。至於第 (2) 題，不會除法的學生學生會先觀察猜測出一個大概的數字，然後去檢驗這數字和 10, 20, 15 的差是否都相等。或許這些解題策略不見容於傳統的教學現場，但這結果顯示出將文化脈絡融入數學教學的重要性。因為傳統的數學教學只關心數學知識本身，卻忽略數學知識所源起的文化脈絡。一旦一個數學問題脫離賦予其意義的文化脈絡，將很難引起學生的有感學習。基於類似的考量，Liu (2018) 檢視臺灣、中國大陸和美國的高中數學教科書中數學文化元素的分布情形和其內涵。研究發現，臺灣、中國大陸和美國的教科書版本在「文化中的數學」方面最強調「社會」面向的生活應用題目，但對於數學概念在不同民族產生的原因、數學方法在不同民族的呈現方式和數學概念和當時哲學思想等方面幾乎完全略而不談。在「數學中的文化」方面，最常出現的是以直覺說明問題的觀念和藉由觀察分析解題，幾乎不談數學知識社群辯證的過程，只有美國教科書偶爾提到某一數學概念或性質不同年代的演變。與中國大陸和美國教科書相較，臺灣的高中數學教科書在選擇數學文化題材時，比較忽略數學在政治與經濟方面的應用，而且所選擇的應用問題，在內涵上與前述兩個地區有所差距，許多所謂的應用題與真實生活不符，其情境過於牽強，整個編排方式也大都採平鋪直述的演繹方式，雖然方便教師教學，但缺乏引發學生進行猜測、歸納、推理和論證的數學文化素材。若以 Nasir、Hand 與 Taylor 的研究結果來看，臺灣的高中數學教科書在激發學生有感學習方面相當不足。

由於教科書必須考量市場接受度，前述各地區教科書中對於數學文化元素不同的詮釋方式會受當地社會文化價值取向的影響。又由於教科書編輯的召集人幾乎都是數學家，因此數學文化的質量成分和呈現方式也與該社會中數學家的數學知識觀有關。Burton (2009) 就曾探究英國職業數學家的數學知識觀，以觀察“內嵌”於職業數學家心中的「數學文化」是否與一般數學學習者的學習傾向有著密切的鏈結。必須提醒的是，雖然 Burton 對於數學文化的詮釋方式與劉柏宏 (2016) 大致類似，但在英文的用詞上有些差異。Burton 並未給「數學文化」一個特定的詞彙，她的數學文化概念包含「culture of mathematics」和「mathematical culture」，其中「culture of mathematics」的內涵與劉柏宏相同，係指稱數學知識形成過程所包括的思維、策略與方法等元素。而 Burton 的「mathematical culture」接近劉柏宏的「mathematics in culture」，泛指引領數学家和學生在各種環境中如何體驗數學的社會政治態度、價值與行為 (the socio-political attitudes, values and behaviours that constitute how mathematicians, and their students, experience mathematics in the settings of conferences, classrooms, tutorials, etc., p. 157)。在訪談了 35 位男性數学家和 35 位女性數学家之後，Burton 發現 83% 的受訪者提到直覺 (intuition) 在思考數學中的重要性，61% 提到美學 (aesthetics) 的重要性。至於數學知識的特點，56% 認為是其知識結構 (structure)，41% 提到嚴謹性 (rigour)，37% 提到數學美 (beauty)，31% 提到規律 (pattern)，這些都是「數學中的文化」的特徵。Burton 的研究某種程度上支持劉柏宏 (2019) 的結果。劉柏宏分析英國高中教科書中數學文化元素的質與量後發現，與臺灣、中國大陸和美國的高中數學教科書相較，英國教科書最強調數學規律的探究。書中問題與「歸納猜想」相關的指標在所有「數學中的文化」各項指標中占了 54.2%，而「直覺說明」指標也占了 33.7%，這與 Burton 所觀察發現英國數学家強調數學思考中的直覺和數學知識中的規律不謀而合。不過 Burton 也指出，這些數学家心中內嵌的一些數學文化元素並沒有轉移到一般學生心中，例如結構、嚴謹性和數學美。

肆、結論

本文一開始就表示，文化系統某一方面可以視為行動的產物，另一方面又可視為進一步行動的機制元素，這可以說明數學文化中「文化中的數學」與「數學中的文化」兩者互動融滲的關係，如同劉柏宏 (2021) 以「柏拉圖立體」和「哥尼斯堡七橋問題」為例所強調的，許多數學問題都是從「文化中的數學」出發，然後遵循「數學中的文化」發展成數學知識的一環，而這些數學知識又進一步影響其他領域，形塑成另一種文化，而這兩者的互動融滲不僅關係到數學知識的形成過程，更會無形中影響數學教育的現實面。比方說，如果社會大眾只是將數學視為一種解決問題的工具，這種觀點會誤導大眾對於數學本質的認知。誠如 Burton (2009) 所指出的，一個地區「文化中的數學」的取向可能構成了某些族群進入學習數學的障礙，也影響大眾對於

「數學中的文化」的理解，所以 Burton 認為必須關注「文化中的數學」，也就是社會中對於數學的社會政治態度、價值與行為。不過反過來說，如果一個社會或群體對「數學中的文化」缺乏理解，甚至誤解（例如認為數學知識必須非常強調嚴謹與邏輯），這些信念也會逐漸形成偏頗的知識觀與價值觀，進而形塑出一種狹隘的「文化中的數學」觀。所以本文的觀點主張，若要提升數學的教與學，必須在數學文化的大架構下「小處著手，大處著眼」。「小處著手」是指在學習數學過程中實踐「數學中的文化」，「大處著眼」則是時時關照「文化中的數學」取向。

誌謝

本文是科技部專題研究計畫 MOST 105-2511-S-167-001-MY3 研究成果之一部份，感謝科技部之經費支助。本文所表達之論述係作者個人觀點，不代表科技部或本刊之立場。

參考文獻

- 劉柏宏 (2016)。從數學與文化的關係探討數學文化素養之內涵—理論與案例分析。《臺灣數學教育期刊》，3 (1)，55-83。doi: 10.6278/tjme.20160413.001 【Liu, Po-Hung (2016). Discourse on the constituent of literacy for mathematical culture in terms of the relationship between mathematics and culture - Theoretical and case analysis. *Taiwan Journal of Mathematics Education*, 3(1), 55-83. doi: 10.6278/tjme.20160413.001 (in Chinese)】
- 劉柏宏 (2019)。《數學文化融入十二年國教數學課程-總計畫》。行政院科技部專題研究計畫成果報告 (MOST 105-2511-S-167-001-MY3)。臺北：科技部。【Liu, Po-Hung (2019). *Integrating mathematical culture into math curriculum of 12-year basic education-Main project*. Achievement report of research projects of the Ministry of Science and Technology (MOST 105-2511-S-167-001-MY3). Taipei, Taiwan: Ministry of Science and Technology. (in Chinese)】
- 劉柏宏 (2021)。怎識數學真面目？談數學文化與素養。《科學研習月刊》，60-02。【Liu, Po-Hung (2021). How to know the true face of mathematics? *Science Study Monthly*, 60-02. (in Chinese)】
- Barta, J. (2014). Introduction: The crossroads of mathematics and culture. In J. Barta, R. Eglash, & C. Barkley (Eds.), *Math is a verb: Activities and lessons from cultures around the world* (pp. 1-7). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Burton, L. (2009). The culture of mathematics and the mathematical culture. In O. Skovsmose, P. Valero, & O. R. Christensen (Eds.), *University science and mathematics education in transition* (pp 157-173). New York, NY: Springer. doi: 10.1007/978-0-387-09829-6_8
- D'Ambrosio, U. (1985). Ethnomathematics and its place in the history and pedagogy of mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 5(1), 44-48.
- D'Ambrosio, U. (1990). *Etnomatemática* [Ethnomathematics]. São Paulo, Brazil: Editora Ática.
- D'Ambrosio, U. (2005). Sociedade, cultura, matemática e seu ensino. *Educação e Pesquisa*, 31(1), 99-120. doi: 10.1590/S1517-97022005000100008

- Ernest, P. (1991). *The philosophy of mathematics education*. London, UK: Falmer Press. doi: 10.4324/9780203497012
- Hersh, R. (1997). *What is mathematics, really?* New York, NY: Oxford University Press.
- Hofstede, G. (1980). *Culture's consequences: International differences in work-related values*. Beverly Hills, CA: Sage.
- Kline, M. (1954). *Mathematics in western culture*. London, UK: George Allen & Unwin.
- Kline, M. (1982). *Mathematics: The loss of certainty*. New York, NY: Oxford University Press.
- Kroeber, A., & Kluckhohn, C. (1952). *Culture: A critical review of concepts and definitions*. Cambridge, MA: The Museum.
- Lakatos, I. (1976). *Proofs and refutations: The logic of mathematical discovery*. New York, NY: Cambridge University Press. doi: 10.1017/CBO9781139171472
- Liu, P.-H. (2018). An international comparative study on how mathematical culture is implemented in the textbooks. In E. Barbin, U. T. Jankvist, T. H. Kjeldsen, B. Smestad, & C. Tzanakis (Eds.), *Proceedings of the Eighth European Summer University on History and Epistemology in Mathematics Education* (pp. 345-354). Oslo, Norway: Oslo Metropolitan University.
- Nasir, N. S., Hand, V., & Taylor, E. V. (2008). Culture and mathematics in school: Boundaries between “cultural” and “domain” knowledge in the mathematics classroom and beyond. *Review of Research in Education*, 32(1), 187-240. doi: 10.3102/0091732X07308962
- Rosa, M., & Orey, D. C. (2011). Ethnomathematics: The cultural aspects of mathematics. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, 4(2), 32-54.
- Schwartz, S. H. (2006). A theory of cultural value orientations: Explication and applications. *Comparative Sociology*, 5(2-3), 137-182. doi: 10.1163/156913306778667357
- Wilder, R. L. (1950). The cultural basis of mathematics. In L. M. Graves, E. Hille, P. A. Smith, & O. Zariski (Eds.), *Proceedings of the International Congress of Mathematicians* (Vol. 1, pp. 258-271). Providence, RI: American Mathematical Society.
- Wilder, R. L. (1968). *Evolution of mathematical concepts: An elementary study*. New York, NY: Wiley.
- Wilder, R. L. (1981). *Mathematics as a cultural system*. New York, NY: Pergamon Press.

《臺灣數學教育期刊》稿約

2013.04.03 編審委員會會議通過
2013.09.27 編審委員會會議修訂通過
2014.09.04 編審委員會會議修訂通過
2017.03.17 編審委員會會議修訂通過
2021.04.09 編審委員會會議修訂通過

壹、《臺灣數學教育期刊》(*Taiwan Journal of Mathematics Education*) (以下簡稱本刊) 是國立臺灣師範大學數學系及台灣數學教育學會共同發行之期刊，內容以出版數學教育領域相關議題的原創性論文為宗旨。

貳、本刊歡迎符合宗旨的多元型態學術論文，類型如下：

- 一、實徵性論文 (research article)：透過資料收集與分析來探究理論或檢驗假設。
- 二、回顧性論文 (review article)：整合相關之實徵研究，並提出批判性或創發思考的評析。
- 三、學術瞭望 (academy observatory)：針對國內外數學教育理論、議題、新知、研究成果、實務發展、改革趨勢，進行說明、分析、評論、反思或建議。
- 四、書評 (book review)：以導讀、討論、分析、闡釋，或比較，來介紹並評論數學教育領域新出版的重要書籍。

參、撰寫文別及字數如下：

- 一、實徵性論文與回顧性論文：可以中文或英文撰寫，中文稿件字數以20,000字、英文10,000字為上限（包含論文全文、中英文摘要、圖表、附註、參考文獻、附錄等），並需經正式審查流程（請參見第捌項之說明）。
- 二、學術瞭望與書評：以中文5,000字為原則，由編輯室邀稿。不經正式審查，但需通過編輯委員會議。

肆、本刊每年發行兩期，分別於四月、十月出刊，並採電子和紙本方式發行。全年徵稿，隨到隨審。

伍、本刊所刊之文稿須為原創性的學術論文之文稿，即未曾投遞或以全論文形式刊登於其他期刊、研討會彙編或書籍。若文稿在送審後自行撤稿，或出現一稿多投、修正稿回覆逾期、侵犯著作權等違反學術倫理等情況，將依下列規則處理：

- 一、來稿一經送審，不得撤稿。因特殊理由而提出撤稿申請者，案送主編決定；非特殊理由而自行撤稿者，一年內將不再接受該作者的投稿。
- 二、若文稿被發現一稿多投、侵犯著作權或違反學術倫理等情況，除文稿隨即被拒絕刊登外，一切責任由作者自負，且本刊於三年內不接受該作者來稿，並視情節嚴重程度求償。

三、作者應於發出文稿修正通知的三週內回傳修正稿及修正回覆說明書，逾期視同撤稿。若有特殊情況請先與本刊聯絡。

陸、未經本刊同意，已發表之文章不得再於他處發表。投遞本刊之學術論文須經編審委員會送請專家學者審查通過後予以刊登，被刊登文章之著作財產權歸國立臺灣師範大學數學系及台灣數學教育學會共同擁有，文責由作者自負。投稿至《臺灣數學教育期刊》之文章，若經編輯委員推薦且經作者同意，可轉稿至《臺灣數學教師》。

柒、中文文稿格式請參考本期刊論文撰寫體例的說明或已發行之文稿，若為英文撰寫之文稿、引用英文文獻以及數學符號、公式等請參考APA第六版出版手冊。投稿時應注意下列事項：

五、填寫投稿資料

(一) 文稿基本資料。

(二) 通訊作者之姓名、服務單位、職稱、通訊地址、聯絡電話和電子郵件地址。

一位以上作者時，非通訊作者只需填寫姓名、服務單位和職稱。

(三) 任職機構及單位：請寫正式名稱，分別就每位作者寫明所屬系所或單位。

(四) 頁首短題 (running head)：中文以不超過15個字、英文以不超過40個字元為原則。

(五) 作者註 (author note)：說明與本篇研究相關的資訊。

六、除文稿正文外，還需包含中英文摘要，相關規定如下：

(一) 中文文稿的中文摘要在前，英文文稿則英文摘要在前。

(二) 中文文稿之中文摘要頁內容包括論文題目 (粗體20級字、置中)、摘要 (不分段，限500字以內) 及關鍵詞 (以五個為上限，並依筆畫順序由少到多排列)；英文摘要頁內容包括 Title (bold, 20 pt, central)、Abstract (不分段，限300字以內) 及 Keywords (字詞及順序須與中文關鍵詞相對應)。

(三) 英文文稿之英文摘要頁內容包括 Title (bold, 20 pt, central)，Abstract (不分段，限300字以內) 及 Keywords (以五個為上限，並依字母順序排列)；中文摘要頁內容包括論文題目 (粗體20級字、置中)、中文摘要 (不分段，限500字以內) 及中文關鍵詞 (字詞及順序須與英文關鍵詞相對應)。

(四) 內文格式詳見《臺灣數學教育期刊》論文撰寫體例。

七、若為修正稿，遞交修正的文稿 (上述第三點之資料) 上請以色字標示修改處，並需依審查意見逐項說明修改內容或提出答辯。

捌、本刊審查流程分為預審與正式審查兩個階段：

一、預審：不符合本刊宗旨、品質要求，或撰寫體例者，逕行退稿或退回請作者修改後再上傳。

二、正式審查：為雙向匿名審查，除基本資料表外，不得出現作者姓名或任何足以辨識作者身份之資料，包括請先省略誌謝。匿名的參考格式為：

- (一) 若本文引用作者已發表之文章，須以「(作者, 西元年)」或“(Author, Year)”；若引用作者已發表之文章不只一篇，則以「(作者, 西元年a)、(作者, 西元年b)、……」或“(Author, Year a)、(Author, Year b)、……”的中文作者姓氏筆畫順序以及外文作者姓氏字母順序排列。
- (二) 若在參考文獻中則以「作者(西元年), 期刊刊名。」或「作者(西元年), 書名。」、「作者(西元年)。編者, 書名。」或“Author (Year). *Title of Periodical.*”表示。

引用文獻中包含一位以上的投稿文章作者，其所有著作皆須遵守上述規範。

範例1：「林妙鞠、楊德清(2011)。故事融入小一弱勢學生之補救教學研究。*台灣數學教師(電子)期刊*, 25, 1-16。doi: 10.6610/ETJMT.20110301.01」一文的作者欲引用該文，文中應以「(作者, 西元年)」表示，參考文獻則以「作者(西元年)。台灣數學教師(電子)期刊。」表示。

範例2：「李源順(2009)。三階段輔導模式 - 以數學學習領域為例。收錄於鍾靜和楊志強(主編), *優質實習輔導教師的增知賦能*(pp.141-157)。臺北市：國立臺北教育大學。」一文的作者欲引用該文，文中應以「(作者, 西元年)」表示，參考文獻則以「作者(西元年)。收錄於鍾靜和楊志強(主編), *優質實習輔導教師的增知賦能*。」

範例3：“Chang S. L., & Lin, F. L. (2006). Investigations into an elementary school teacher's strategies of advancing children's mathematical thinking. *Taiwan Journal of Mathematics Teachers*. 5, 21-34. doi: 10.6610/ETJMT.20060301.04”的作者應以“(Author, Year)”引用該文，參考文獻則以“Author (Year). *Taiwan Journal of Mathematics Teachers.*”表示。

玖、文稿透過線上投稿系統(<http://tjme.math.ntnu.edu.tw>)方式投遞。當文稿被接受，作者需在本刊提供的著作財產權讓與同意書上簽名，以掃描檔或紙本方式寄回。作者應負論文排版完成後的校對之責。被接受刊登之文稿，作者需提供文獻之doi，以及中文參考文獻之英譯資料。被接受刊登的英文文稿，作者需自行負責檢查文稿中的用詞、語法、拼寫、含意和邏輯的正確性，編輯委員僅負責格式上之校對。

壹拾、期刊助理聯絡郵箱：TJME.taiwan@gmail.com

《臺灣數學教育期刊》研究論文撰寫體例

2013.04.03 編審委員會會議通過

2013.09.27 編審委員會會議修訂通過

2014.09.04 編審委員會會議修訂通過

2017.03.17 編審委員會會議修訂通過

本期刊原則上依循美國心理學會(American Psychological Association)的撰寫格式，中文文稿請參考下面的說明或本刊已發表的文稿，若為英文撰寫之文稿、引用英文文獻以及數學符號、公式等請參考APA第六版出版手冊。文稿請使用Microsoft Word 98以上之繁體中文文書軟體處理。除另有規定外，中文字型一律採用新細明體，英文字型一律為Times New Roman。

壹、 撰稿格式

- 一、投稿除需要附上作者基本資料表檔案外，中文稿件內容依序為中文摘要頁(含關鍵字)、英文摘要頁(含關鍵字)、正文(包括圖、表、附註、誌謝、參考文獻)以及附錄(若無必要可省略)；英文稿件之撰寫順序相同，唯中英文摘要頁位置對調。
 - 二、稿件版面以單欄版面橫向印列的A4規格紙張，上下左右各留2.5公分空白，除基本資料表頁外每頁需加註頁碼。文稿字數(包含摘要、正文、圖表、附註、參考文獻、附錄等)中文以20,000字為上限，英文以10,000字為上限。
 - 三、中文摘要頁內容包括論文題目(粗體20級字、置中)、摘要(不分段，限500字以內)、與關鍵字(以五個為上限，並依筆畫順序由少到多排列)。
 - 四、英文摘要頁內容包括論文題目(bold, 20 pt, central)，並附英文摘要(不分段，限300字以內)及英文關鍵字(字詞及順序須與中文關鍵字相對應)。
 - 五、除各項標題、表之註記與另起一段之引文外，內文不分中英文均為12級字，單行行距。
 - 六、除另有規定外，中文字型一律採用新細明體，標點符號及空白字為全形字；英文字型一律為Times New Roman。
- 三、本期刊為雙向匿名審查，除基本資料表外，不得出現作者姓名或任何足以辨識作者身份之資料。匿名的參考格式為：
- (一) 若本文引用作者已發表之文章，須以「(作者，西元年)」或“(Author, Year)”; 若引用作者已發表之文章不只一篇，則以「(作者，西元年a)、(作者，西元年b)、……」或“(Author, Year a)、(Author, Year b)、……”的中文作者姓氏筆畫順序以及外文作者姓氏字母順序排列。
 - (二) 若在參考文獻中則以「作者(西元年)，期刊刊名。」或「作者(西元年)，書名。」、「作者(西元年)。編者，書名。」或“Author (Year). Title of

Periodical.”表示。

引用文獻中包含一位以上的投稿文章作者，其所有著作皆須遵守上述規範。

範例1：「林妙鞠、楊德清（2011）。故事融入小一弱勢學生之補救教學研究。

台灣數學教師(電子)期刊，25，1-16。」一文的作者欲引用該文，文中應以「（作者，西元年）」表示，參考文獻則以「作者（西元年）。台灣數學教師(電子)期刊。」表示。

範例2：「李源順（2009）。三階段輔導模式 - 以數學學習領域為例。收錄於鍾靜和楊志強（主編），優質實習輔導教師的增知賦能（pp.141-157）。

臺北市：國立臺北教育大學。」一文的作者欲引用該文，文中應以「（作者，西元年）」表示，參考文獻則以「作者（西元年）。收錄於鍾靜和楊志強（主編），優質實習輔導教師的增知賦能。」

範例3：“Chang S. L., & Lin, F. L. (2006). Investigations into an elementary school teacher's strategies of advancing children's mathematical thinking. *Taiwan Journal of Mathematics Teachers*. 5, 21-34.”的作者應以“(Author, Year)”引用該文，參考文獻則以“Author (Year). *Taiwan Journal of Mathematics Teachers.*”表示。

貳、正文

一、正文原則上包括「緒論」、「文獻探討」、「方法」、「結果」、「討論」與「參考文獻」等六部分，「緒論」含研究動機與目的、假設或研究問題等內容。前述格式為原則性規定，作者可依論文性質斟酌改變。

二、標題的層次、選用次序與字體為：

壹、16級字、粗體、置中

一、14級字、粗體、靠左對齊

(一)12級字、粗體、靠左對齊

1. 12級字、粗體、靠左對齊

(1)內縮1.5字元、12級字、粗體、靠左對齊

A.內縮1.5字元、12級字、底線、靠左對齊

1. 第一級標題為「緒論」、「文獻探討」、「方法」、「結果」、「討論」與「參考文獻」等，各層次標題選用次序為：壹、一、(一)、1、(1)、A 最多以六個層次為原則。
2. 第一、二、三、四、五層次標題請使用粗體。
3. 第一層次標題使用 16 級字，第二層次標題使用 14 級字，其餘 12 級字。
4. 第一層次標題置中，其餘靠左對齊。
5. 第一、二、三層次標題為單行間距，並與前後段距離均為 1 行；第四、五、六層次標題為 12 點最小行高，並與前後段距離均為 0.5 行。
6. 第五、六層次標題內縮 1.5 字元，而第六層次標題加上底線。
7. 標題請用字簡明，勿用句號或冒號。若逢頁尾最後一行，應移至次頁首行。

三、英文統計符號須用斜體字，例如 $F(1, 53) = 10.03$, t , F , M , SD , N , r , p 等。希臘字母則不要斜體，例如： α , β , ε , η 。

四、資料分析結果的有效位數須全文一致。恆小於「1」的數值，例如 $KR20$, α , p 等統計數值的個位數字「0」請省略。

五、文獻資料的引用一律採取文內註釋。引用文獻時，必須有作者姓名（中文作者姓名全列，英文作者僅列姓氏）及論文年份（中文文獻及英文文獻均使用西元年份）。相同作者在同一段中重複被引用時，第一次須寫出年代，第二次以後，在不造成混淆的情況下年代可省略。若在不同段落中重複引用時，則仍須完整註明。本文中引用之文獻必須在參考文獻中列出。文獻引用格式於下：

1. 當作者為一人時，格式為作者（年代）或（作者，年代）、Author (Year)或(Author, Year)。
2. 當作者為二人時，每次引用均須列出全部作者，在行文中，以「與」連接；在括號和參考文獻中，中文以頓號「、」，西文以“&”連接。格式為作者 1 與作者 2（年代）或（作者 1、作者 2，年代）、Author 1 與 Author 2 (Year)或(Author 1 & Author 2, Year)。
3. 當作者為三至五人時，第一次引用時所有作者均須列出，第二次以後僅需寫出第一位作者並加「等」字或“et al.”。在同一段落中重複引用時，第一次須完整註明，第二次以後僅需寫出第一位作者再加「等」字或“et al.”，可省略年代。若在不同段落中重複引用，則僅需寫出第一位作者再加「等」字或“et al.”，但仍需註明年代。
4. 當作者為六人以上時，每次引用都只列第一位作者並加「等」字或“et al.”。
5. 當作者或作者之一為機構時，第一次引用應寫出機構全名，並以中括號註明慣用之簡稱，第二次之後即可使用簡稱替代，並依上述一至四點處理。例如：行政院國家科學委員會（國科會，2011）或（行政院國家科學委員會[國科會]，2011）、National Science Council (NSC, 2011)或(National Science Council [NSC], 2011)。

6. 當文獻為翻譯作品時，以原作者為主要作者，中文翻譯的文獻須註明原著出版年代，接續註明譯者姓名與譯本出版年代，作者與譯者之人數及其引用格式的規範與一般作者相同。英文翻譯文獻則僅須註明原著出版年代和譯本之出版年代，中間以斜線區隔，不須註明譯者姓名，作者人數及其引用格式的規範與一般作者相同。例如：Skemp (1987/1995)。
7. 當西文作者同姓時，須引用全名，且採「名在前姓在後」方式書寫。例如：A. J. Bishop (1985)和 E. Bishop (1970) 都認為……。
8. 在同一括號內同時引用多位作者的文獻時，依作者姓名筆畫（英文用字母）排序；若同時有中英文作者，則先列中文作者。不同作者之間用分號分開，相同作者不同年代之文獻用逗號隔開年代。
9. 在文章中引用同一作者在同一年多的多篇著作時，應在年代後加註 a, b, c……以茲區別。
10. 當引用文獻需標出頁數時，西文單頁為“p.”、兩頁以上為“pp.”，中文則以「頁」表示。例如：（洪萬生，2006，頁 167）、(Dubinsky, 1991, p. 102)、(Heath, 1956, pp. 251-252)。
11. 當引用之觀念或陳述，來自第二手資料時，應將原始資料和第二手資料同時註明。在括號中首先列出原始作者與年代，接續中文以「引自」，西文以“as cited in”註明第二手資料之作者與年代，並說明出處頁碼。例如：（Garner, 1988，引自蘇宜芬、林清山，1992，頁 246）、Peirce (1968, as cited in Sáenz-Ludlow, 2002, p. 289)
12. 引文超過中文 80 字（西文 40 字），則須另起一段，並改為標楷體 10 級字，左右縮排 2 字元，與正文間前後空一行，且在引文前後無需用引號。例如：

Schoendfeld (1992, p.335) 有一段話可以用來討論：

數學從其創生之始就是一種社會活動，在此活動中一群訓練有素的實踐者（數學科學家）從事組型的科學——基於觀察、研究和實驗，有系統地試圖要決定一個公理化或理論化之系統中的規律的性質和原理（此為純數學），或者從實在世界物體中抽象出來之系統的模式（此為應用數學）。數學的工具是抽象、符號表徵、和符號操作。然而學會運用這些工具，其意義乃謂一個人以數學方式思考而非如一個工匠使用工具。以數學的方式思考就是：（1）形成數學觀點——珍視數學與抽象的歷程，並偏愛其應用，（2）發展此學科的工具的能力，並應用這些工具以協助我們理解結構——數學的建構意義（mathematical sense-making）。

六、圖與表格：

1. 圖下方應置中書明圖序及圖之標題；表格上方應置中書明表序及表名，圖表序號均使用阿拉伯數字，且圖表序與圖名之間空一個中文字（或 2 個英文字母）。各圖表之標題及說明宜精簡，但不宜精簡至看正文才能知此圖的訊息。
2. 表格之製作以簡明清楚、方便閱讀為原則，頂端與底端採用粗線(1.5pt)繪製，中間與兩邊不必畫線。表序須配合正文以阿拉伯數字加以編號，並書明表之標題。
3. 每一個圖表的大小以不超過一頁為原則，如超過時，須在續表之表序後加上(續)/(continued)，但無須重現標題，如：表 1 (續) 或 Table 1 (continued)。
4. 圖與表格應配合正文出現，與前後段空一行間距。圖及表格內容若有解釋的必要，可作註記。註記與圖表之左邊界切齊，列在圖、表之下方，每註另起一行，按編號順序排列。

七、誌謝與附註：

1. 誌謝應力求簡短扼要，置於正文之後。誌謝二字為 16 級字、粗體、置中。誌謝文另行起、第一行內縮 2 字元、12 級字。
2. 附註應置於參考文獻之前，每項附註均另起一行，並以阿拉伯數字編號，依順序排列。

參、參考文獻

一、正文中引用過之文獻，必須全部列舉在參考文獻內，且不得列出未引用之文獻，接受刊登之論文，作者應另提供中文參考文獻之英譯資料。

二、每個作者第一行由第一格開始寫，第二行中文內縮三個字；英文內縮六個字母。中文參考文獻先寫作者姓名（年代），再用「。」接續「篇名」，「。」後再寫「期刊名稱」或「書名」以及「頁碼」。中文參考文獻「書名」或「期刊名及卷數」以粗體表示，其餘（含期數）維持標準樣式。英文參考文獻先寫作者姓名（年代），再用「.»接續「篇名」，「.»後再寫「期刊名稱」或「書名」以及「頁碼」。英文參考文獻「書名」或「期刊名及卷數」以斜體表示，其餘（含期數）維持標準樣式。即：

作者（年代）。文章篇名。**期刊刊名**粗體，**卷**粗體（期若無則可省略），xxx-xxx。

Author, A. A. (Year). Title of article. *Title of Periodical*斜體, *volume*斜體 (issue若無則可省略), xxx-xxx.

三、各種不同形式的中英文參考文獻的格式如下：

1. 期刊

中文格式：作者（年代）。文章篇名。**期刊刊名**，**卷**（期），xxx-xxx。

英文格式：Author, A. A. (Year). Title of article. *Title of Periodical*, *volume*(issue),

xxx-xxx.

2. 書籍

中文格式：作者（年代）。**書名**（版次若有須註記）。出版地：出版者。

英文格式：Author, A. A. (Year). *Title of book* (Edition). Location: Publisher.

3. 編輯著作：中文編輯著作以編者之姓名起始，其後以「編」、「編著」等標示其著作方式，以資區別。英文編輯著作以編者之姓氏起始，其後則為編者名字的縮寫，再加上“Ed.”、“Eds.”、或“Comp.”，以資區別其著作方式。

中文格式：編者編（年代）。**書名**（冊次若無則可省略）。出版地：出版者。

英文格式：Editor, A. A. (Ed.). (Year). *Title* (Volume若無則可省略). Location: Publisher.

4. 翻譯作品

中文格式：原作者（譯本出版年）。**翻譯書名**（譯者譯）。出版地：出版者。
（原作出版於xxxx年）

英文格式：Author, A. A. (Year). *Title* (B. B. Translator, Trans.). Location: Publisher. (Original work published Year).

5. 書中的文章

中文格式：作者（年代）。文章名稱。收錄於編著姓名（編著），**書名**（冊次若無則可省略，頁xx-xx）。出版地：出版者。

英文格式：Author, A. A. (Year). Title of article. In B. B. Editor (Ed.), *Title of Book* (Edition若無則可省略, pp. xx-xx). Location: Publisher.

6. 研究計畫報告：若引述的報告是取自 ERIC (the Educational Resources Information Center)或 NTIS (the National Technical Information Service)，則在最後須以括號註明 ERIC 或 NTIS 的編號。

中文格式：作者（年代）。**報告名稱**（報告編號若無則可省略）。出版地：出版者。

英文格式：Author, A. A. (Year). *Title of report* (Report No.若無則可省略). Location: Publisher.

7. 研討會發表之論文（未出版）

中文格式：作者（年，月）。**論文標題**。發表於會議名稱。會議地點：舉辦單位若無則可省略。

英文格式：Author, A. A. (Year, month). *Title of paper*. Paper presented at the Title of the Symposium. Location, Country.

8. 未出版之學位論文

中文格式：作者（年代）。**論文名稱**。未出版之博／碩士論文，學校暨研究所名稱，大學所在地。

英文格式：Author, A. A. (Year). *Title of doctoral dissertation/master thesis*. Unpublished doctoral dissertation/master thesis, Name of

University, Location.

9. 網路資源

中文格式：作者若無則可省略（年月日若無則可省略）。網頁標題。檢自URL。

英文格式：Author, A. A. (Year, month day若無則可省略). *Title of webpage*. Retrieved from URL.

《臺灣數學教育期刊》投稿基本資料表

篇名	(中文)		
	(英文)		
總字數	稿件全文 (含中英文摘要、正文、參考文獻、附錄等) 共_____字。		
關鍵詞 <small>(最多五個)</small>	(中文)		
	(英文)		
頁首短題 (running head)	(請以不超過15個中文字或40個英文字元為原則。)		
通訊作者資料	姓名	(中文)	(英文)
	職稱		
	服務單位 <small>(或就讀校系)</small>	(中文)	(英文)
	E-mail		
	通訊地址		
	電話	辦公室：() 分機	
		行動電話：	
<i>如為共同著作，請詳填以下共同著作人欄位，非共同著作則不需填寫。(以下欄位不敷填寫時請自行增加)</i>			
共同著作人	姓名	服務單位 <small>(或就讀校系)</small>	職稱
第一作者 (<input type="checkbox"/> 通訊作者)	(中文)	(中文)	
	(英文)	(英文)	
第二作者 (<input type="checkbox"/> 通訊作者)	(中文)	(中文)	
	(英文)	(英文)	
第三作者 (<input type="checkbox"/> 通訊作者)	(中文)	(中文)	
	(英文)	(英文)	
作者註 (可複選)	<input type="checkbox"/> 本篇論文為碩、博士論文改寫，指導教授為_____。 <input type="checkbox"/> 本篇論文曾於_____發表。 <input type="checkbox"/> 本篇論文獲國科會補助，計劃編號：_____。		
1. 茲保證本論文符合研究倫理。 2. 茲保證所填基本資料正確，文稿未曾以任何方式出版或發行，且無一稿多投、違反學術倫理，或違反著作權相關法令等事情。 3. 茲瞭解並同意貴刊著作權授權規範，並保證有權依此規範進行相關授權。 4. 茲保證文稿已經所有作者同意投稿至《臺灣數學教育期刊》。			
填表人：_____		填表日期：_____年_____月_____日	

《臺灣數學教育期刊》著作財產權讓與同意書

茲同意投稿至國立臺灣師範大學數學系與台灣數學教育學會共同發行的《臺灣數學教育期刊》之一文，名稱為：

立書人聲明及保證本著作為從未出版之原創性著作，所引用之文字、圖表及照片均符合著作權法及相關學術倫理規範，如果本著作之內容有使用他人以具有著作權之資料，皆已獲得著作權所有者之（書面）同意，並於本著作中註明其來源出處。著作人並擔保本著作未含有毀謗或不法之內容，且絕未侵害他人之智慧財產權，並同意無償授權國立臺灣師範大學數學系與台灣數學教育學會於本著作通過審查後，以論文集、期刊、網路電子資料庫等各種不同方法形式，不限地域、時間、次數及內容利用本著作，並得進行格式之變更，且得將本著作透過各種公開傳輸方式供公眾檢索、瀏覽、下載、傳輸及列印等各項服務。國立臺灣師範大學數學系與台灣數學教育學會並得再授權他人行使上述發行之權利。惟著作人保有下列之權利：

- 1.本著作相關之商標權及專利權。
- 2.本著作之全部或部份著作人教學用之重製權。
- 3.出版後，本著作之全部或部份用於著作人之書中或論文集中之使用權。
- 4.本著作用於著作人受僱機關內部分送之重製權或推銷用之使用權。
- 5.本著作及其所含資料之公開口述權。

著作人同意上述任何情形下之重製品應註明著作財產權所屬，以及引自《臺灣數學教育期刊》。

如果本著作為二人以上之共同著作，下列簽署之著作人已通知其他共同著作人本同意書之條款，並經各共同著作人全體同意，且獲得授權代為簽署本同意書。如果本著作係著作人於受僱期間為雇用機構所作，而著作權為讓機構所有，則該機構亦同意上述條款，並在下面簽署。

本著作之著作財產權係屬（請勾選一項）

- 著作人所有
 著作人之僱用機構所有

立同意書人（著作人或僱用機構代表人）簽章：_____

著作人姓名或僱用機構名稱：_____

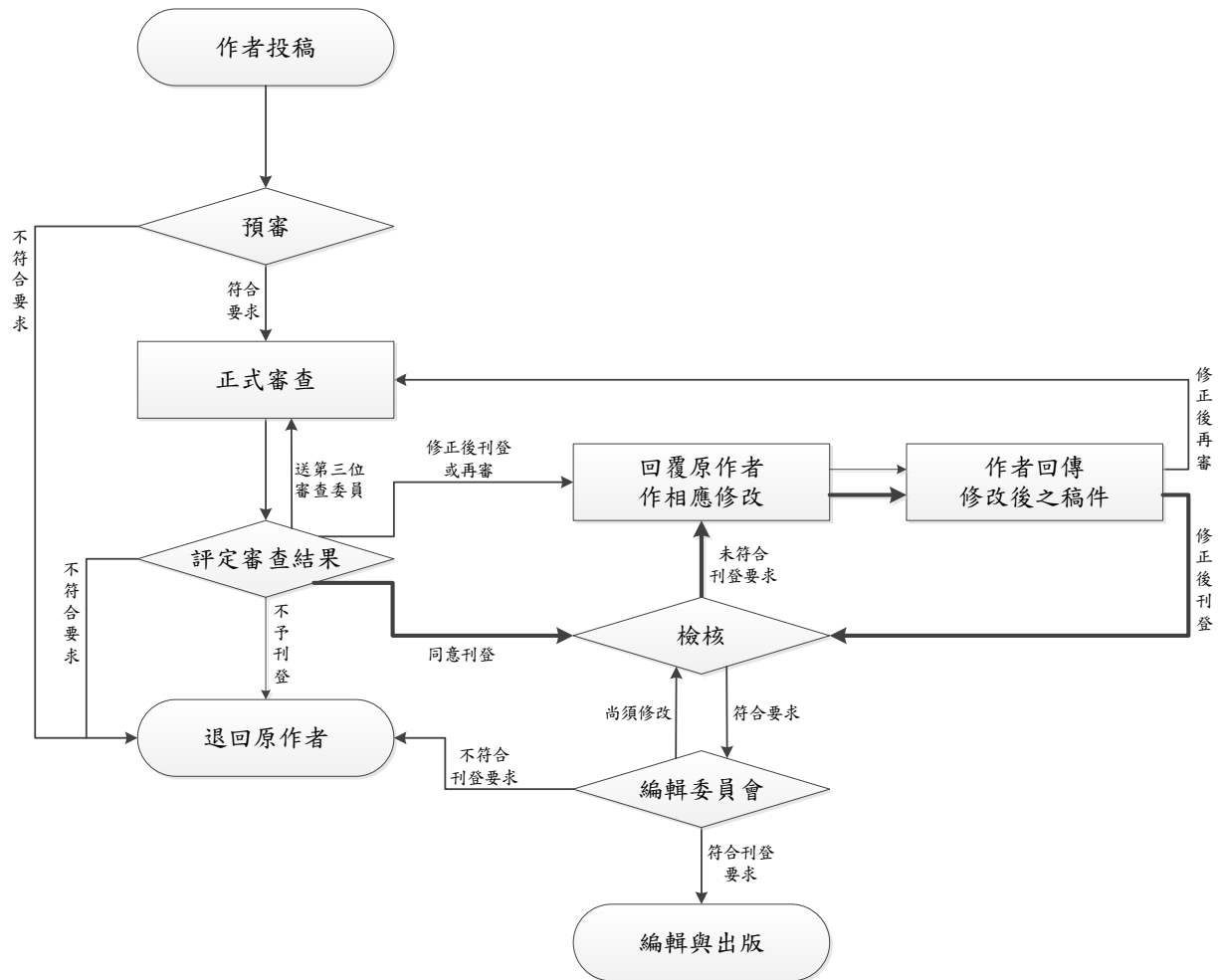
（正楷書寫）

中華民國 年 月 日

《臺灣數學教育期刊》編審辦法

2013.04.03 編審委員會會議通過

- 壹、《臺灣數學教育期刊》（以下簡稱本刊）之審查包括預審、正式審查兩個階段：
- 一、預審：檢視來稿是否符合本刊稿約之宗旨、論文品質以及進行論文格式之審查；
 - 二、正式審查：審查委員與投稿者採雙向匿名方式進行。主編就審查委員的回覆意見及論文品質決定接受或拒絕文稿，或是需要作者修改後再進行審查或檢核。需要「修正後再審」之稿件，交原審查委員或委由主編委任進行再審。所有文稿最後須經編輯委員會審查通過後，方能刊出。
稿件之最終審查決定以投稿後六個月內完成並通知作者。
- 貳、審查委員針對稿件之學術原創性、正確性及價值等條件從嚴審查，以確保所刊文稿的品質。審查委員可提供作者具建設性的修改建議，以利文稿的修正及品質提昇，並以下列其中一種的刊登建議回覆：
- 一、「同意刊登」：論文不需要修改可作原稿刊登。
 - 二、「修正後刊登」：通知作者依審查意見修改或答辯後刊登。
 - 三、「修正後再審」：要求作者依審查意見修改或答辯，修正稿由編輯委員會送原審查委員或委由主編委任進行再審。
 - 四、「不宜刊登」：通知作者退稿。
- 稿件審查的時間以三週為限，若超過期限，編輯委員會將去函提醒審查委員儘速審查，若逾六週審查者仍未寄回審查意見，則編輯委員會得再聘請另一位審查者取代之。每位審查者皆為無償審查，但會在每年第二期期刊中列名致謝。
- 參、本刊主編、副主編或編輯委員如投稿本刊，該委員應迴避推薦審查委員名單、參與審查結果決定之討論或經手處理與個人稿件有關的資料(包括審稿者資料、推薦審查委員名單、審稿意見等)。
- 肆、本刊預計每年四月和十月出版，稿件刊登順序由主編原則上依文稿性質與投稿時間之先後次序決定之，而第一作者的文稿以一篇為限，超過篇數之稿件留至下期刊登。
- 伍、本刊稿件之編審流程如下圖所示：



Publisher	Department of Mathematics, National Taiwan Normal University Taiwan Association for Mathematics Education	
Guest Chief Editor	Liu, Po-Hung	Fundamental Education Center, National Chin-Yi University of Technology
Editorial Board		
Chief Editor	Wu, Chao-Jung	Department of Educational Psychology and Counseling, National Taiwan Normal University
Vice Chief Editor	Liu, Po-Hung	Fundamental Education Center, National Chin-Yi University of Technology
Editorial Panel	Yang, Kai-Lin	Department of Mathematics, National Taiwan Normal University
	Chen, Jhih-Cheng	Department of Applied Mathematics, National University of Tainan
	Hsieh, Feng-Jui	Department of Mathematics, National Taiwan Normal University
	Hsu, Hui-Yu	Graduate Institute of Mathematics and Science Education, National Tsing Hua University
	Huang, Hsin-Mei	Department of Learning and Materials Design, University of Taipei
	Lee, Yuan-Shun	Department of Mathematics, University of Taipei
	Liu, Man-Li	Department of Science Communication, National Pingtung University of Education
	Liu, Yuan-Chen	Department of Computer Science, National Taipei University of Education
	Tam, Hak-Ping	Graduate Institute of Science Education, National Taiwan Normal University
	Yang, Chih-Chien	Graduate Institute of Educational Information and Measurement, National Taichung University of Education
	Yang, Der-Ching	Graduate Institute of Mathematics and Science Education, National Chiayi University
	Yuan, Yuan	Department of Mathematics Education, National Taichung University of Education
International Editorial Panel	Lo, Jane-Jane	Department of Mathematics, Western Michigan University
	Seah, Wee-Tiong	Mathematics Education, Melbourne Graduate School of Education, University of Melbourne
	Toh, Tin-Lam	Mathematics & Mathematics Education Academic Group, National Institute of Education, Singapore

Address | No.88 Sec. 4, Ting-Chou Rd., Taipei City, Taiwan, R.O.C.
 Department of Mathematics, National Taiwan Normal University
 "Taiwan Journal of Mathematics Education"
 TEL | 886-2-7749-3678
 FAX | 886-2-2933-2342
 E-mail | TJME.taiwan@gmail.com
 Website | <http://tjme.math.ntnu.edu.tw/contents/contents/contents.asp?id=21>

This journal was subsidized by the Humanities and Social Science Research Center of the Ministry of Science and Technology in 2021.

Copyright©2014 by Department of Mathematics, National Taiwan Normal University & Taiwan Association for Mathematics Education. All rights reserved.

1 數學人文教案培養數學文化素養之理論探討與反思

/ 劉柏宏

A Theoretical and Reflexive Study on Cultivating Literacy of Mathematical Culture by Using Lesson Plans from Humanistic Mathematics

／ Po-Hung Liu

27 中小學數學史教案開發與實作研究

/ 蘇意雯

Research on the Development and Implementation of Lesson Plans for the History of Mathematics in Primary and Secondary Schools

／ Yi-Wen Su

55 發展悅趣化數學文化教案以培養數量與代數素養之探究

/ 陳東賢

An Exploratory Study on Developing Game-Based Mathematical Culture Lesson Plans for Cultivating Quantitative and Algebraic Literacy

／ Tung-Shyan Chen

學術瞭望 **Academy Observatory**

79 論數學文化與數學教育的關係

/ 劉柏宏

On the Relationship between Mathematical Culture and Mathematics Education

／ Po-Hung Liu

