

ISSN: 2312-5810
DOI: 10.6278/tjme

第 9 卷 第 1 期
二〇二二年四月
VOL. 9 NO. 1
April 2022

臺灣數學教育期刊

Taiwan Journal of Mathematics Education



國立臺灣師範大學數學系
Department of Mathematics,
National Taiwan Normal University



台灣數學教育學會
Taiwan Association
for Mathematics Education

發行單位 | 國立臺灣師範大學數學系
台灣數學教育學會

編輯委員會

主編	吳昭容	國立臺灣師範大學教育心理與輔導學系
副主編	楊凱琳	國立臺灣師範大學數學系
	劉柏宏	國立勤益科技大學通識教育學院
編輯委員	李源順	臺北市立大學數學系
(依姓氏筆劃排序)	袁媛	國立臺中教育大學數學教育學系
	許慧玉	國立清華大學數理教育研究所
	陳致澄	國立臺南大學應用數學系
	黃幸美	臺北市立大學學習與媒材設計學系
	楊志堅	國立臺中教育大學教育資訊與測驗統計研究所
	楊德清	國立嘉義大學數理教育研究所
	劉曼麗	國立屏東大學科學傳播學系
	劉遠楨	國立臺北教育大學資訊科學系
	謝豐瑞	國立臺灣師範大學數學系
	譚克平	國立臺灣師範大學科學教育研究所
國際編輯委員	余偉忠	澳洲墨爾本大學數學教育系
	卓鎮南	新加坡國立教育學院數學與數學教育學術組
	羅珍珍	美國西密西根大學數學系

地址	臺北市汀州路四段 88 號國立臺灣師範大學數學系 《臺灣數學教育期刊》
電話	886-2-7749-3678
傳真	886-2-2933-2342
電子郵件	TJME.taiwan@gmail.com
網址	http://tjme.math.ntnu.edu.tw/contents/contents/contents.asp?id=21

主編的話

《臺灣數學教育期刊》第9卷第1期刊登兩篇文章，分別為賴孟龍等人的「三歲幼兒基本幾何圖形的辨識發展」與卓益安等人的「探討臺灣高中生使用邏輯連接詞的錯誤：以解一元二次方程式與不等式為例」，前者在研究方法上有獨特的設計，而後者則開啟數學教育有關邏輯連接詞歧義的論述與實徵探討，都頗具特色。

第一篇以三歲幼兒辨識正方形、長方形、三角形，與圓形等四種基本幾何圖形的表現與發展為重點。該研究系統操弄圖形變化的規準來編製出不同型態的典型、非典型，與開放圖形，並界定「穩定辨識」的嚴格判準，作為幼兒圖形辨識之發展順序的分析依據。本研究42位有效樣本來自兩所幼兒園，研究結果所指出的發展順序以及相關的理論觀點雖須後續研究重複檢驗，然而本文在圖形設計上的系統性設計，以及突破以往文獻通常僅從正確率高低進行討論，是未來研究值得參酌之處。

第二篇探討數學脈絡下邏輯連接詞「且」與「或」的歧義性與被誤用的情況。透過本文文獻回顧的豐富舉例與論述，讀者會驚奇地發現原來「且」與「或」存在如此多元的意義，而此種自然語言與形式邏輯之表達方式的轉換是如此困難，進而好奇學生在解方程式與不等式後會如何運用這兩個連接詞來陳述結果。本文從高一學生解一元二次方程式或不等式的表現中，分析代數運算正確但過程或解答不完整的反應中的邏輯連接詞之錯誤型態，不只提供了各類誤用狀況的描述，同時也發現了與文獻上英語為母語者不同的錯誤型態。本文不僅文辭清晰，且研究發現對學術與現場教育都深具意義，非常值得一讀。

本刊一直以發行高品質數學教育原創性論文為宗旨，每篇文稿不只經兩到三位審查委員提出審查意見、責任編輯積極建議修改方向，還需通過編輯委員會議的檢視，方能進入最後階段的編輯。感謝過程中作者的不放棄與把關者的精益求精，方能成就每一期的出版。

《臺灣數學教育期刊》主編

吳昭辰 謹誌

臺灣數學教育期刊

第 9 卷 第 1 期

2014 年 4 月創刊

2022 年 4 月出刊

目錄

- 三歲幼兒基本幾何圖形的辨識發展 1
／賴孟龍、張晉璋、黃依苓、簡琬融、洪愷翎
- 探討臺灣高中生使用邏輯連接詞的錯誤：以解一元二次方程式
與不等式為例 27
／卓益安、陳世文、楊文金、廖斌吟

Taiwan Journal of Mathematics Education

Vol. 9 No. 1

First Issue: April 2014

Current Issue: April 2022

CONTENTS

- Three-Year-Old Children's Development of Basic Geometric Shape Recognition 1
/Meng-Lung Lai, Chin-Wei Chang, Yi-Ling Huang, Wan-Jung Chien, Kai-Ling Hung
- Taiwanese High-School Students' Mistakes in the Use of Logical Connectives when Solving Quadratic Equations and Inequalities 27
/Yi-An Cho, Shih-Wen Chen, Wen-Jin Yang, Pin-Yin Liao

賴孟龍、張晉瑋、黃依苓、簡琬融、洪愷翎（2022）。
三歲幼兒基本幾何圖形的辨識發展。
臺灣數學教育期刊，9（1），1-25。
doi: 10.6278/tjme.202204_9(1).001

三歲幼兒基本幾何圖形的辨識發展

賴孟龍¹ 張晉瑋² 黃依苓¹ 簡琬融¹ 洪愷翎¹

¹國立嘉義大學幼兒教育學系

²國立嘉義大學教育系

本研究探討三歲幼兒在基本幾何圖形（正方形、長方形、三角形、與圓形）的辨識以及發展。具體而言，本研究包含三個研究目的：（一）探究三歲幼兒在四個基本幾何圖形的辨識穩定度；（二）檢視幼兒在辨識四個基本幾何圖形的發展順序；（三）系統性檢視影響三歲幼兒幾何形狀辨識的圖形設計因素。本研究以自編「幾何圖形辨識圖卡」檢視 42 位三歲幼兒（平均三歲十個月）在正方形、長方形、三角形、與圓形的辨識表現。研究發現如下：（一）雖然三歲幼兒在四個形狀的典型圖形的辨識表現皆良好，但是尚未能穩定辨識基本幾何圖形，尤其是非典型的正方形；（二）三歲幼兒圖形辨識的發展順序最早為圓形，最晚為正方形；（三）圖形方向的改變與虛線的圖形明顯影響三歲幼兒在基本幾何圖形的辨識表現。

關鍵字：基本幾何圖形辨識、基本幾何圖形發展

通訊作者：張晉瑋，e-mail：wesley52318@gmail.com

收稿：2021 年 12 月 13 日；

接受刊登：2022 年 4 月 24 日。

Lai, M. L., Chang, C. W., Huang, Y. L., Chien, W. J., & Hung, K. L. (2022).
Three-Year-Old Children's Development of Basic Geometric Shape Recognition.
Taiwan Journal of Mathematics Education, 9(1), 1-25.
doi: 10.6278/tjme.202204_9(1).001

Three-Year-Old Children's Development of Basic Geometric Shape Recognition

Meng-Lung Lai¹ Chin-Wei Chang² Yi-Ling Huang¹ Wan-Jung Chien¹ Kai-Ling Hung¹

¹ Department of Early Childhood Education, National Chiayi University

² Department of Education, National Chiayi University

This study was conducted to investigate three-year-old children's development of basic geometric shape recognition (i.e., square, rectangle, triangle, and circle). Specifically, we examined whether three-year-old children were able to reliably recognize these geometric shapes varied in sizes and orientations, examined the order of conceptual development of these geometric shapes, and examined the factors affecting three-year-children's recognition performance. Forty-two preschoolers($M = 3$ years 10 months) from southern Taiwan participated. The participants were asked to recognize each shape from example and non-example cards created by the researchers. Results indicated that while three-year-old children were able to successfully recognize typical geometrical shapes, they were still unable to reliably and flexibly recognize these geometric shapes varied in sizes and orientations. The results also showed three-year-old children's concept of circles was developed first, followed by those of triangles, rectangles, and lastly squares. In addition, orientations of the shapes significantly affected three-year-children's recognition performance.

Keyword: Basic geometric shape recognition, Basic geometric shape development

壹、緒論

辨識幾何圖形是學齡前幼兒重要的學習課題，幼兒在生活中習得的幾何圖形經驗與能力能幫助他們辨認和區別各式各樣的物體，進而發展幼兒的空間知覺，也為將來在小學學習幾何圖形預先做準備。因此，教育部幼兒園教保活動課程大綱（2017）認知領域明定在幾何概念的學習上，二至三歲幼兒學習指標為「探索物體的外型」，三至五歲幼兒學習指標為「辨識與命名物體的形狀」，五至六歲幼兒學習指標則是「覺知物體的形狀會因觀察角度的不同而不同」。

國內外學者針對學齡前幼兒辨識幾何圖形的能力有不少相關研究。經典的 van Hiele（1986）發現學習幾何圖形的認知理解為階段性的發展，學齡前幼兒可能經歷的階段為：階段零的視覺期（Visualization），此階段會忽略形狀的性質（邊、角），僅藉由比較視覺資訊與形狀原型作為辨識形狀的依據；階段一的分析期（Analysis），此階段已能指出形狀部分的特性（邊、角），但容易受到混淆，例如：無法分辨正方形與菱形（同樣是四個邊而且四邊等長）；階段二的簡述期（Abstraction），此階段已能掌握幾何形狀的各項特性，理解形狀的部分性質（邊）相同，但因部分性質不同（角度）而歸類於不同的幾何形狀，例如：菱形與正方形皆四邊等長，然而正方形尚需符合四個角度都是 90 度才能稱為正方形。Clements、Swaminthan、Hannibal 與 Sarama（1999）指出學齡前幼兒在圖形辨識多仰賴視覺區分的方式，已能辨識形狀的簡單屬性，介於 van Hiele 理論中階段零至階段一的發展階段。

許多研究顯示學齡前兒童能辨識基本幾何圖形。Zambrzycka、Kotsopoulos、Lee 與 Makosz（2017）發現二歲以下幼兒對正方形、三角形與圓形觀察力比較敏銳，他們在觀看上述圖形的時間明顯多於其他非幾何圖形，不過尚未能區別上述三種圖形。

過去研究發現幼兒在不同幾何圖形的辨識表現有差異，舉例來說，三歲以上的幼兒最容易辨識圓形（Clements et al., 1999; Ho, 2003），而最難辨識三角形（張靜文、張麗芬，2014；Aslan & Arnas, 2007）或長方形（李文貞，2003）。然而，過去研究僅比較幼兒在幾何圖形的答對率（李文貞，2003；張靜文、張麗芬，2014；Aslan & Arnas, 2007; Clements et al., 1999; Ho, 2003），本研究將檢視幼兒是否能**穩定辨識**基本幾何圖形（正方形、長方形、三角形、圓形），以及幼兒在基本幾何圖形發展的先後順序。

為了檢視幼兒是否能穩定辨識幾何圖形，過去研究除了使用典型圖形之外，也設計非典型圖形與開放圖形。本研究所指的「穩定辨識」意指幼兒在典型題型、非典型題型與開放題型三個題型的答對題數是否皆超過研究者預設的標準，若幼兒答對題數皆達標準以上，則認定幼兒能穩定辨識基本幾何圖形。典型圖形是幾何圖形的原型（Prototype）（van Hiele, 1986），最能代表該幾何圖形；非典型圖形為典型圖形的變形，通常的變形方式為改變大小（Size）、改變方向（Orientation）、操弄長寬比例（Aspect ratio，例如：長方形）、操弄底高比例（例如：三角形）、與偏斜（Skewness）（Aslan & Arnas, 2007; Clements et al., 1999），或是僅將圖形的外圍線條加粗

(張靜文、張麗芬, 2014); 開放圖形是設計缺口或是圖形線條由虛線構成(張靜文、張麗芬, 2014)。

幼兒在基本幾何圖形的辨識表現上, 多數研究發現幼兒在圓形辨識表現最佳, 其次是正方形, 再其次是長方形, 三角形的表現最弱(例如: 張靜文、張麗芬, 2014; Aslan & Arnas, 2007); 然而, 過去研究指出圖形的大小變化、改變方向, 以及長寬比例變化會影響幼兒在幾何圖形的辨識表現(張靜文、張麗芬, 2014; Aslan & Arnas, 2007); 然而, 過去研究受制於基本幾何圖形能出現的非典型變化有差異(例如: 偏斜設計可以應用在三角形而非正方形), 僅能分析個別幾何圖形非典型變化對幼兒的影響, 未能有整體比較基本幾何圖形非典型圖形的難易程度。所以, 本研究的圖形設計控制得更嚴謹, 在條件完全相同的狀況下進行比較, 亦即是設計同樣的變化(改變大小、改變方向、改變大小與方向), 系統性比較幼兒在基本幾何圖形的辨識表現。

基於上述, 本研究設計典型、非典型、與開放題型, 每個題型皆設計同樣的模式變化(例如, 非典型題型: 改變大小、改變方向、與改變大小與方向), 系統性比較幼兒辨識基本幾何圖形(正方形、長方形、三角形、圓形)的表現。本研究包含三個目的:(一) 探究三歲幼兒在四個基本幾何圖形(正方形、長方形、三角形、圓形)辨識表現的穩定度;(二) 檢視幼兒在四個基本幾何圖形的發展順序; 以及(三) 系統性檢視影響三歲幼兒幾何形狀辨識的圖形設計因素。

貳、文獻探討

一、幼兒在幾何圖形辨識的表現與發展

過去研究發現幾何圖形的發展受到年齡成熟影響(例如: Piaget, Inhelder, & Szeminska, 1960), 幼兒剛開始使用感官經驗發展直覺的幾何概念, 到具體運思期因成熟(例如: 習得保留概念)而慢慢發展出歐幾里得幾何概念(例如: 移動物體不會改變物體的形狀); van Hiele(1986) 延伸上述 Piaget 等人的理論, 提出幾何發展階段論, 學齡前幼兒先藉由視覺資訊與形狀原型作為辨識形狀的依據(視覺期), 此時幼兒尚無法指出圖形的特質; 當接受到足夠的內在(自身經驗)與外在(學校教育)刺激之後, 幼兒已能指出形狀部分的特質(邊、角)(分析期與簡述期), 然而可能因缺乏類包含概念, 認為每個幾何圖形之間沒有關聯性。

過去文獻(例如: Lin, 1988) 指出幼兒會使用非正式的方式解題(child-methods), 二歲的幼兒已能初步辨識形狀(Zambrzycka et al., 2017), 甚至在進入正式教育之前, 幼兒已經能辨識基本幾何圖狀(張靜文、張麗芬, 2014; Aslan & Arnas, 2007; Ho, 2003)。

Clements 等人(1999) 將 97 名三至六歲的美國幼兒依年齡分成四歲組、五歲組與六歲組, 進行一對一的幾何圖形辨識任務, 任務包含圓形、正方形、三角形、長方形。研究結果發現幼兒基本上都是以視覺的方式主觀辨識形狀, 年齡較大的幼兒辨識幾何圖形的能力明顯較好。以整體答對率而言, 幼兒能較輕易的辨識出圓形(94%), 其次是正方形(87%), 而三角形(59%)

與長方形（54%）則是較難以辨識的幾何圖形。此外，有少部分幼兒會提及形狀的屬性，例如：正方形有四個邊，顯示幼兒在學齡前對於形狀已有基礎概念。

Aslan 與 Arnas（2007）以 100 名三至六歲的土耳其幼兒為研究對象，探討幼兒對於形狀分類與定義的標準是否會隨著年齡而有變化。測驗工具參考了過去的研究（Clements et al., 1999; Hannibal & Clements, 2000; Satlow & Newcombe, 1998），設計三角形、長方形、正方形與圓形等四個形狀辨識的任務。研究結果發現年齡比較大的六歲幼兒會以形狀的性質和特徵進行判斷，而年齡比較小的三歲幼兒則以形狀的視覺線索回答。此外，三至六歲幼兒辨認幾何圖形的順序，由易到難依序為，圓形（90%）、正方形（76%）、長方形（73%）、與三角形（72%）。

無獨有偶的，許多研究支持 Aslan 與 Arnas（2007）的研究發現（例如：張靜文、張麗芬，2014；蔣姿儀、林思婷，2017；Ho, 2003）。Ho（2003）將兒童年齡層向上延伸，以 40 位六歲半至八歲新加坡幼兒進行幾何圖形辨識能力研究，研究工具為四種幾何圖形（圓形、三角形、正方形、長方形）。研究發現辨識圖形的難易度由易到難，也是圓形（98%）、正方形（86%）、長方形（74%）、三角形（73%）。臺灣學者也有類似的研究發現，張靜文與張麗芬（2014）以 120 名四至六歲幼兒為研究對象，使用「幾何圖形辨識任務」自編材料，探討幼兒對幾何圖形的辨識與判斷標準。研究結果顯示，幼兒最容易正確辨識的圖形為圓形（75%），其次是正方形（59%）、長方形（55%），最難辨識的圖形為三角形（42%）。蔣姿儀與林思婷（2017）也發現三歲到六歲幼兒辨識幾何圖形的難易度依序是圓形（68%）、正方形（54%）、長方形（54%）、與三角形（46%）。

然而，仍有其他學者提出不同於上述幾何圖形辨識難易度的研究結果。張英傑（2001）以正方形、長方形、圓形、三角形和菱形測驗為研究工具，檢視 40 位年齡介於六歲至九歲兒童辨識與描述幾何圖形能力，結果發現幼兒園組的兒童（10 位）在視覺辨識測驗中，說出標準用語（例如：圓形，而非說出圓圓的）次數最多的是正方形（80%）、其次是長方形（80%），最少的則是三角形（70%）與圓形（70%）。李文貞（2003）、以及李文貞與鍾志從（2006）的研究結果則顯示三至六歲幼兒平面圖形的辨識，最熟悉的是圓形（85%），之後依序是三角形（84%）、正方形（72%）、長方形（66%）。

綜上所述，學齡前幼兒已經能開始辨識幾何形狀，其中，圓形最容易辨識，其次是正方形、長方形，而三角形則最難以辨識。然而，過去的研究僅比較全體幼兒加總題型後的平均答對率，可能造成在某一個題型表現特別好，而在其他兩個題型表現普通，而誤判為理解，忽略幼兒辨識個別圖形的能力。所以，本研究藉由分析受試幼兒在各個題型（典型題型、非典型題型、開放題型）的表現，以此正確界定幼兒的辨識程度。本研究以成功、不成功的編碼形式（於資料蒐集與分析章節詳述）界定每位幼兒在形狀辨識上的表現，進一步探究幼兒是否能穩定地辨識幾何圖形。

此外，過去研究亦尚未針對參與者個別的表现分析幼兒在基本幾何圖形辨識的發展順序，且因幾何圖形不同的設計而未直接比較各圖形的差異，僅透過答對率的高低排序各形狀對幼兒

辨識的難易度，並不清楚幼兒在不同幾何圖形辨識上的發展順序，因此本研究採用幼兒是否成功且穩定地辨識作為編碼，探究幼兒在基本幾何圖形的發展順序。

二、影響幾何圖形辨識的圖形設計因素

過去研究發現幼兒對幾何圖形的理解剛開始相當有限（local understanding），經常會因為圖形位置擺放方位不同而影響辨識表現（Hannibal, 1999）。例如：正方形若不是呈現水平方位的就不是正方形。Aslan 與 Arnas（2007）稱那些非定義屬性（non-defining attributes）的圖形為非典型（Atypical）圖形。舉例而言，圓形的非典型圖形包含大小變化（Size）、周圍線條粗細變化（Thickness of side）、大小加線條粗細的變化；正方形的非典型圖形包含大小變化、方向改變（Orientation）、大小加方向改變；長方形的非典型圖形包含大小變化、方向改變、長寬比例變化（Aspect ratio）；三角形的非典型圖形包含方向改變、底高比例變化（Aspect ratio）、偏斜（鈍角、銳角三角形；Skewness）。過去研究顯示幼兒在非典型圖形的辨識表現不佳（張靜文、張麗芬，2014；Aslan & Arnas, 2007），主要是因為幼兒受到圖形偏斜與方向改變等影響，降低對非典型圖形的辨識表現。

除了非典型圖形之外，張靜文與張麗芬（2014）在圖形變化中加入開放圖形。舉例而言，圓形的開放圖形包括虛線與空缺一小段的邊；正方形、長方形與三角形的開放圖形皆包括虛線、空缺一小段的邊與空缺一角。

上述非典型變化的圖形對幼兒判斷幾何圖形有難易上的差別。Aslan 與 Arnas（2007）以 100 名三歲至六歲幼兒為研究對象，發現他們在辨識非典型圖形的表現欠佳，特別是受到圖形偏斜、方向改變，以及底、高邊長比例變化的干擾所致。無獨有偶的，張靜文與張麗芬（2014）以 120 名四至六歲幼兒為研究對象，發現受試幼兒在非典型圖形辨識的表現不佳；例如在非典型三角形的測驗中，幼兒會說「歪歪的」、「要翻過來才是」等用語；在非典型正方形的測驗中，多數幼兒會直接說「因為是菱形」；而在長方形非典型的測驗中，幼兒會說「好瘦好長」、「扁扁的」等用語，也就是說當圖形大小、方位、角度改變後，學齡前幼兒會有辨識困難（謝佩純，2008）。

綜上所述，影響幼兒幾何辨識的圖形設計因素有非典型圖形的偏斜、方向改變，以及底、高（邊長）比例變化，以及開放圖形等因素。然而，過去研究探討不同形狀的非典型圖形設計並無一定的標準，導致無法客觀公平進行不同形狀的比較，無法明確得知干擾兒童辨識圖形的系統性因素。例如，Aslan 與 Arnas（2007）正方形非典型圖形的變化設計為改變方向、改變大小、改變方向與大小；長方形非典型圖形的變化設計為改變方向、改變大小、長寬比例變化；三角形非典型圖形的變化設計為改變方向、操弄底高比例、與偏斜；Ho（2003）正方形非典型圖形的變化設計為改變方向、改變大小、改變方向與大小；長方形非典型圖形的變化設計為改變方向；三角形非典型圖形的變化設計為改變方向、操弄底高比例、與偏斜；張靜文與張麗芬（2014）正方形非典型圖形的變化設計為改變方向、改變大小、改變方向與大小、圖形外圍加粗；長方

形非典型圖形的變化設計為改變方向、改變大小、長寬比例變化；三角形非典型圖形的變化設計為改變方向、改變大小、操弄底高比例、與偏斜。

因此，為了客觀瞭解學齡前幼兒辨識基本幾何圖形的表現，本研究在非典型圖形變化中採用最常見的大小改變（Size）與方向改變（Orientation）作為非典型圖形設計的一致標準，藉此以系統性的圖形變化準則（圖形採用一致的變化方式）檢視三歲幼兒辨識圓形、正方形、長方形與三角形在不同圖形變化的表現，以探討影響幼兒辨識基本幾何圖形的因素。

參、研究設計

一、研究對象

本研究對象來自臺灣南部兩所公立幼兒園小班的幼兒，兩所幼兒園皆採主題式教學。為了確定幼兒能認出圓形、三角形、正方形、長方形這四種基本幾何圖形，正式任務前先進行一次預試，確認參與幼兒能辨識基本幾何圖形（命名）。預試參考張英傑（2001）的視覺辨識活動，以四典型圖形圖卡（圓形、三角形、正方形、長方形各 1 張）作為預試工具，要求參與幼兒回答圖卡上的幾何圖形：「這叫什麼？或是這是什麼圖形（形狀）？」四種圖形皆能正確回答的幼兒通過預試；反之，當幼兒無法正確回答其中一種基本幾何圖形時則無法通過預試。45 位幼兒參與研究，3 名幼兒未通過預試，最終參與幼兒為 42 位，幼兒的平均年齡為三歲十個月（年齡介於三歲六個月至四歲零個月），男生 22 位、女生 20 位。

二、研究工具設計

本研究工具「幾何圖形辨識圖卡」改編自 Aslan 與 Armas(2007)，以及張靜文與張麗芬(2014)使用的研究材料。本研究包含四種基本幾何圖形，分別為圓形、三角形、正方形、長方形，並將四種形狀加入題型的變化，分別是典型、非典型與開放題型（見附錄 1）；典型圖形為常見的正規圖形（原型），以及縮小為 50%、30%；非典型圖形設計同樣的變化模式，為典型圖形之旋轉圖形（旋轉 45 度）與大幅縮小之圖形（縮小為 10%），以及旋轉加上縮小圖形（旋轉 45 度&縮小為 10%）；開放圖形為典型圖形虛線、缺角、缺邊等不完整圖形。設計如下表：

表 1
基本幾何圖形變化設計標準

形狀	典型	非典型	開放
正方形、長方形 與三角形	原型	旋轉 45 度	缺邊
	縮小為 50%	縮小為 10%	缺角
	縮小為 30%	旋轉 45 度 & 縮小為 10%	缺邊缺角 虛線
圓形	原型	縮小為 20%	缺邊
	縮小為 50%	縮小為 10%	虛線

Aslan 與 Arnas (2007) 的研究材料每個形狀 12 題，共 48 題；張靜文與張麗芬 (2014) 的研究材料各 11 題，共 44 題。由於上述研究在不同幾何圖形皆安排不同題數的非典型與開放的變化圖形，因此分述於下：

(一) 典型圖形

過去文獻四個基本幾何圖形任務皆只有設計 1 題典型題 (張靜文、張麗芬, 2014; Aslan & Arnas, 2007)，而本研究在三角形、正方形與長方形題型各設計 3 種典型題變化；在圓形題設計 2 種典型題變化。詳述如下：

典型圓形 1 為直徑 6cm 圓；典型圓形 2 為典型圓形 1 縮小比例 0.5 倍呈現。典型三角形 1 為邊長 6cm，角度為 60 度之正三角形；典型三角形 2 為典型三角形 1 面積等比例 0.5 倍縮小；典型三角形 3 為典型三角形 1 面積等比例 0.3 倍縮小。典型長方形 1 長 8cm、寬 4cm，四個角度皆為 90 度；典型長方形 2 為典型長方形 1 面積等比例 0.5 倍縮小；典型長方形 3 為原典型長方形 1 面積等比例 0.3 倍縮小。典型正方形 1 四邊長 6cm，四個角度皆為 90 度；典型正方形 2 為典型正方形 1 面積等比例 0.5 倍縮小；典型正方形 3 為典型正方形 1 面積等比例 0.3 倍縮小。

(二) 非典型圖形

Aslan 與 Arnas (2007) 在三角形任務中，內含方向變化 2 題，底高比例變化 2 題，以及偏斜變化 2 題；在長方形任務中，內含方向變化 2 題，長寬比例變化 1 題，以及大小變化 1 題；在正方形任務中，內含方向變化 1 題，大小變化 1 題，以及同時改變大小與方向變化 1 題；在圓形任務中，內含大小變化 2 題，加粗邊緣變化 1 題，以及同時改變大小與加粗邊緣變化 1 題。張靜文與張麗芬 (2014) 在三角形任務中，內含大小變化 1 題，方向變化 1 題，底高比例變化 2 題，以及偏斜變化 1 題；在長方形任務中，內含大小變化 1 題，方向變化 2 題，長寬比例變化 2 題，以及加粗邊緣變化 1 題；在正方形任務中，內含大小變化 1 題，方向變化 1 題，同時大小變化與方向變化 1 題，以及加粗邊緣 1 題；在圓形任務中，內含大小變化 2 題，以及加粗邊緣變化 1 題。

本研究在三角形、正方形與長方形任務中，大小變化、方向變化、同時大小與方向變化各設計 1 種變化題型；在圓形設計 2 種大小變化題型。詳述如下：

三角形、長方形、正方形非典型圖形 1 為改變典型圖形 1 之方向 (向右旋轉 45 度)；非典型圖形 2 為原典型圖形 1 面積等比例 0.1 倍縮小；非典型圖形 3 是原典型圖形 1 旋轉 45 度加面積等比例 0.1 倍縮小。非典型圓形 1 為典型圓形 1 面積等比例縮小 0.2 倍；非典型圓形 2 為典型圓形 1 面積等比例縮小 0.1 倍。

(三) 開放圖形

張靜文與張麗芬 (2014) 在三角形任務中，內含虛線變化 1 題，缺角變化 1 題，以及缺邊變化 1 題；在長方形任務中，內含虛線變化 1 題，以及缺角變化 1 題；在正方形任務中，內含

虛線變化 1 題，缺角變化 1 題；在圓形任務中，內含虛線變化 1 題，以及缺邊變化 1 題。

本研究在三角形、正方形與長方形任務中，虛線變化、缺角變化、缺邊變化、同時缺邊與缺角變化各設計 1 種變化題型；在圓形任務中，虛線變化，以及缺邊變化各設計 1 種類變化題型。詳述如下：

三角形、長方形、正方形開放圖形分別是將典型圖形 1 以虛線、缺角、缺邊、缺角缺邊等四種方式呈現。開放圓形則是典型圓形以虛線、缺邊的方式呈現。(任務材料設計請參閱附錄二)

三、資料分析

(一) 計分方式 (保守嚴格的計分方式定義成功)

在三角形、正方形、與長方形任務中，典型題型 6 題、非典型題型 6 題、開放題型 8 題，每個形狀共 28 題 (另有 4 題練習題與 4 題混淆題)；典型、非典型題型形狀辨識正確計 1 分，辨識錯誤計 0 分，總分各 6 分。開放題型採反向計分，基本幾何圖形辨識任務中回答「是」計 0 分，回答「不是」則計 1 分，總分 8 分。練習題與混淆題皆不計分。

在圓形任務中，典型題型 4 題，非典型題型 4 題，開放題型 4 題，共 20 題 (另有 4 題練習題與 4 題混淆題)；典型、非典型題型形狀辨識正確計 1 分，辨識錯誤計 0 分，總分各 4 分。開放題型採反向計分，基本幾何圖形辨識任務中回答「是」計 0 分，回答「不是」計 1 分，共 4 分。練習題與混淆題皆不計分。

為排除幼兒盲目作答與疲勞 (全部任務只回答是或不是)，造成誤打誤撞而答對的可能性，研究者利用 4 題混淆題 (混淆題是指加入非任務的圖形，例如在長方形任務中放入圓形)，檢視每位參與幼兒的答題行為。分析後發現全數幼兒皆無全數回答「是」或是全數回答「不是」，皆有注意到非任務形狀的混淆題，混淆題的錯誤率平均為 1.4%，在每個幾何圖形任務 168 人次 (42 名幼兒 × 4 題混淆題) 的混淆題中的答錯人次，圓形 1 人次；正方形 5 人次；長方形 3 人次；三角形 0 人次，因此將 42 名參與幼兒全數納入結果分析。

(二) 資料處理

1. 基本幾何圖形辨識發展

本研究參考 Lai、Baroody 與 Johnson (2008) 的計分機制，將幼兒的辨識表現定義為成功與不成功。首先，定義典形與非典型圖形辨識的穩定度，當 6 題答對 5 題以上，編碼為穩定辨識，4 題以下則為不穩定辨識。

如果幼兒穩定辨識典型與非典型題型，且開放題答對 6 題以上，則定義為「成功」；如果幼兒穩定辨識典型與非典型題型，且開放題答對 5 題以下，則定義為「不成功」；如果典型題或非典型題任一個為不穩定辨識，則定義為不成功辨識。

受試幼兒在四個基本幾何圖形的辨識表現如表 2 所示：

具體而言，受試幼兒在正方形、長方形、與三角形的表現定義如下：

當典型與非典型題型加總為 10-12 分，開放題型為 6-8 分，定義為「成功」；
 當典型與非典型題型加總為 10-12 分，開放題型為 0-5 分，定義為「不成功」；
 當典型與非典型題型加總為 0-9 分，無論開放題型的得分幾分，定義為「不成功」。

受試幼兒在圓形的表現定義如下：

當典型與非典型題型加總為 8 分，開放題型為 2-4 分，定義為「成功」；
 當典型與非典型題型加總為 8 分，開放題型為 0-2 分，定義為「不成功」；
 當典型與非典型題型加總為 0-7 分，無論開放題型得分幾分，定義為「不成功」。

表 2
基本幾何圖形辨識表現

形狀	典型題型 + 非典型題型	開放題型	辨識表現
正方形 長方形	總分 = 10 - 12 分	分數 = 6 - 8 分	成功
		分數 = 0 - 5 分	不成功
三角形	總分 = 0 - 9 分	分數 = 0 - 8 分	不成功
圓形	總分 = 8 分	分數 = 2 - 4 分	成功
		分數 = 0 - 1 分	不成功
		總分 = 0 - 7 分	分數 = 0 - 4 分

2. 基本幾何圖形辨識發展分析方式

本研究採用個人對基本幾何圖形的辨識發展，參考 Lister、Leach 與 McCombe (1988) 針對不同保留概念的分析方式。

步驟一：依答對率高低由左至右排序四個基本幾何圖形，再由上至下依序排序成功辨識四個基本幾何圖形、成功辨識三個基本幾何圖形、成功辨識兩個基本幾何圖形、成功辨識一個基本幾何圖形，以及四個幾何圖形皆不成功辨識。

步驟二：以個人為單位，計數符合上述規則的人數，例如：僅有 1 位幼兒辨識表現符合成功辨識四個基本幾何圖形；有 4 位幼兒辨識表現符合成功辨識三個基本幾何圖形，依此類推將所有 42 位幼兒的辨識表現歸類。若幼兒辨識表現不符合上述規則，則另外歸為一類。

步驟三：刪除未被歸類的類別。

3. 基本幾何圖形辨識的差異

以幼兒辨識形狀的答對率為依變項，執行 3（形狀：正方形、長方形、三角形）× 3（題型：典型、非典型、開放）二因子重複量數分析幼兒在形狀、題型答對率的差異；以 3（形狀：正方形、長方形、三角形）× 3（變形：縮小、改變方向、縮小及改變方向）二因子重複量數分析幼兒在**非典型題型**中形狀、變形答對率的差異；以 3（形狀：正方形、長方形、三角形）× 4（開放程度：虛線、缺角、缺邊、缺邊缺角）二因子重複量數分析幼兒在**開放題型**中形狀、開放程度答對率的差異。

四、研究流程

本研究以多媒體閃卡（電腦螢幕呈現）進行任務，採取個別方式，每次施測時間約 10 分鐘。施測場所位於幼兒園內不受干擾的空間。過程中，一位施測者負責操作實驗，另有一名紀錄者負責記錄幼兒作答情形。

基本幾何圖形辨識圖卡任務一共有四個部分，分別是正方形、長方形、三角形與圓形，每一個形狀任務各有 28 張圖片（包含 4 題練習題、4 題混淆題），為了防止幼兒施測時產生疲勞效應，每個任務之間有 2 分鐘的休息時間。另外，研究者將任務分為兩個時段進行施測（間隔一週），每次任務執行四個基本幾何圖形半數的題目，加上解說，每位幼兒均可在 10 分鐘完成一個形狀任務。參與幼兒被要求以口頭方式回答「是」或「不是」以表示他們是否認同（或判斷）當前螢幕顯示的圖形為任務圖形。多數幼兒皆能在兩次任務中完成四個基本幾何形狀任務，僅有 2 位幼兒因疲勞導致注意力不集中而需要多安排一個時段以完成未完成的任務。

題型編排方面，兩個緊鄰的圖形不使用同一類的圖形；第一次施測圖形順序為開放、典型、開放、非典型、混淆、非典型、典型、開放、非典型、混淆、開放、典型；為了避免幼兒記憶保留，第二次施測圖形順序為典型、開放、非典型、開放、非典型、混淆、開放、典型、開放、非典型、典型、混淆。

基本幾何圖形辨識圖卡任務的指導語為：「皮卡丘來到長方形巧克力工廠要製作長方形巧克力，送給最喜歡吃長方形巧克力的公主，皮卡丘做了好多巧克力，可是他不知道這些巧克力是不是長方形，你幫皮卡丘找出長方形巧克力吧」（以長方形為例）。參與幼兒完成所有形狀任務後可以得到貼紙作為鼓勵。

肆、研究結果

一、幼兒穩定辨識基本幾何圖形的發展

本研究受試幼兒在正方形、長方形、三角形、與圓形的表現如表 3 所示。使用卡方同質性檢定檢視幼兒在四個形狀中判定情形是否相同，結果顯示四個圖形成功與不成功辨識的人數有顯著差異， $\chi^2(3) = 12.537$ ， $p = .006$ 。以成功而言，幼兒在圓形的辨識表現最佳，有 15 位幼兒（35%）能穩定辨識圓形，在正方形的辨識表現則欠佳，僅有 2 位幼兒（4%）能穩定辨識正方形。

表 3
幼兒成功辨識形狀與不成功辨識形狀的人數與百分比表

	正方形	長方形	三角形	圓形
成功	2 (4)	8 (19)	9 (21)	15 (35)
不成功	40 (96)	34 (81)	33 (79)	27 (65)

註：表格內容為人數（百分比）

利用卡方考驗分別檢定基本幾何圖形成功與不成功的幼兒人數，結果顯示在正方形的表現上，不成功辨識的人數顯著多於成功辨識的人數（2 vs. 40）， $\chi^2(1) = 15.429$ ， $p < .001$ ；在長方形的表現上，不成功辨識的人數顯著多於成功辨識的人數（8 vs. 34）， $\chi^2(1) = 3.857$ ， $p = .049$ ；在三角形的表現上，成功辨識的人數與不成功辨識的人數（9 vs. 33）無顯著差異， $\chi^2(1) = 2.679$ ， $p = .102$ ；在圓形的表現上，成功辨識與不成功辨識的人數（15 vs. 27）也沒有顯著差異， $\chi^2(1) = .011$ ， $p = .743$ 。幼兒在正方形、長方形的成功辨識人數明顯低於期望值（.33），不成功人數明顯高於期望值（.67）。換言之，相較於辨識圓形與三角形，三歲幼兒較無法成功辨識正方形與長方形。

受試幼兒答對率從高到低依序為圓形（74%）、三角形（71%）、長方形（71%）、與正方形（64%）。參考 Lister 等人（1988）的分析方式（詳見 p. 10）排序幼兒在各圖形的答對率，統整幼兒形狀辨識成功與否的人數於表 4；雖然三角形與長方形整體答對率相同，但經卡方分析顯示相較於三角形，幼兒比較無法成功辨識長方形，因此本研究將三角形排列在長方形之前。

表 4
幼兒形狀辨識正確率彙整表

形狀 (答對率)	圓形 (74%)	三角形 (71%)	長方形 (71%)	正方形 (64%)	人數	百分比
類型一	+	+	+	+	1	2%
類型二	+	+	+	-	4	10%
類型三	+	-	-	-	10	24%
類型四	-	-	-	-	22	53%
	-	+	+	-	2	5%
特殊類型	-	+	-	+	1	2%
	-	+	-	-	1	2%
	-	-	+	-	1	2%

註：「+」=成功；「-」=不成功

從表 4 可知，受試幼兒僅 1 位（2%）在四個基本幾何圖形都成功辨識（類型一）；22 位（53%）在四個基本幾何圖形都無法辨識成功（類型四）；14 位幼兒（34%）發展順序依序為圓形、三角形、長方形、與正方形，與整體的答對率一致，僅有 5 位幼兒（11%）有特殊的發展順序。值得注意的是，超過一半的幼兒（53%）無法成功辨識這四種圖形。

有趣的是，5 位幼兒（11%）的圖形發展順序比較特殊；具體而言，2 位在三角形與長方形辨識表現優於圓形，其他 3 位幼兒在三角形、長方形、或正方形的辨識表現優於圓形。此外，6 位幼兒（15%）在三角形與長方形似乎是同時發展。

二、幼兒在基本幾何圖形的答題表現

由於圓形的題型設計無法與正方形、長方形與三角形一致，以下將分析幼兒在正方形、長方形、三角形典型、非典型、與開放題型的辨識表現，如表 5 所示。

表 5
幼兒在典型、非典型、開放題型中辨識正方形、長方形、三角形的答對率 (%)

	正方形	長方形	三角形	平均答對率
典型	99* (3)	100* (0)	99* (3)	99 (2)
非典型	54 (27)	70* (30)	74* (29)	66 (38)
開放	39 (34)	42 (38)	39 (35)	40 (54)
平均答對率	64 (2)	71 (2)	71 (2)	

註：表格內數據為平均答對率（標準差）；*答對率顯著高於猜測（50%）（ $p < .05$ ）

以單一樣本 t 檢定分析幼兒形狀辨識答對率與隨意猜測的差異，在答覆僅有「是」與「不是」的情況下，設定猜對機率為 50%，若統計達顯著差異則表示幼兒回答正確並非隨意猜測。結果顯示典型正方形、長方形、三角形的答對率皆顯著高於隨意猜測（ $ps < .001$ ）；非典型長方形、三角形的答對率皆顯著高於隨意猜測（ $ps < .001$ ）。

為了檢視幼兒在基本幾何圖形跟幾何題型的辨識表現，以每位幼兒在某個題型中的答對率（答對題數/總題數）作為依變項，本研究執行 3（形狀：正方形、長方形、三角形） \times 3（題型：典型、非典型、開放）二因子相依樣本變異數分析，研究結果顯示形狀達顯著差異， $F(2, 41) = 17.452, p < .001, \eta^2 = .299$ ；題型達顯著差異， $F(2, 41) = 53.881, p < .001, \eta^2 = .568$ 。以形狀而言，Bonferroni 事後比較顯示幼兒在正方形（ $M = 64%$ ）的答對率顯著低於長方形（ $M = 71%$ ， $p < .001$ ）與三角形（ $M = 71%$ ， $p < .001$ ）；以題型而言，Bonferroni 事後比較顯示幼兒答對率依序為典型題型（ $M = 99%$ ）、非典型題型（ $M = 66%$ ）、開放題型（ $M = 40%$ ），題型間的答對率兩兩比較皆有顯著差異（ $ps < .003$ ），如圖 1 所示。

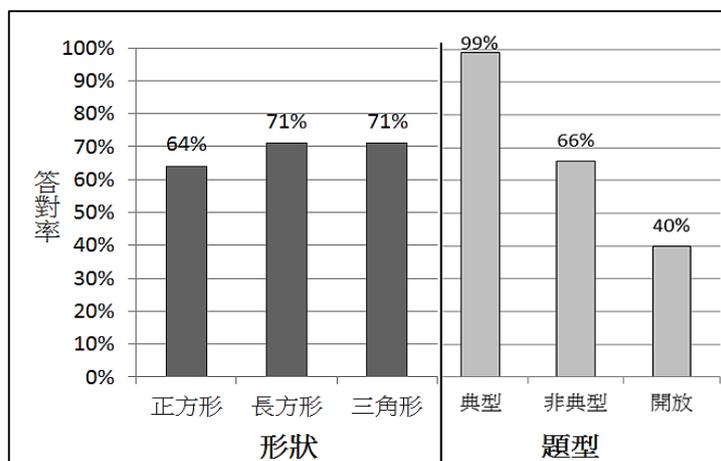


圖 1 幼兒辨識幾何形狀與幾何題型的答對率

此外，形狀與題型的交互作用亦達顯著差異， $F(4, 41) = 10.073$ ， $p < .001$ ， $\eta^2 = .197$ ，說明形狀與題型有交互作用（如圖 2），因此進一步以單純主要效果檢視在不同題型下，幼兒基本幾何圖形的辨識表現。

單因子變異數分析發現在「非典型題型」中，幼兒辨識形狀的能力有顯著差異 $F(2, 41) = 15.856$ ， $p < .001$ ，Bonferroni 事後比較發現正方形答對率（ $M = 54\%$ ）顯著低於長方形（ $M = 70\%$ ， $p = .001$ ）與三角形（ $M = 74\%$ ， $p < .001$ ）；然而，在「典型題型」中，幼兒辨識形狀的能力無顯著差異， $F(2, 41) = 1.000$ ， $p = .353$ ， $\eta^2 = .024$ ；且在「開放題型」中，幼兒辨識形狀的能力亦無顯著差異， $F(2, 41) = 1.662$ ， $p = .196$ ， $\eta^2 = .039$ 。

單因子變異數分析發現在「正方形」任務中，幼兒不同題型的答對率有顯著差異， $F(2, 41) = 58.770$ ， $p < .001$ ， $\eta^2 = .589$ ，Bonferroni 事後比較發現幼兒在典型題型（ $M = 99\%$ ）的答對率顯著高於非典型（ $M = 54\%$ ， $p < .001$ ）與開放題型（ $M = 39\%$ ， $p < .001$ ），而非典型與開放題型的答對率之間並無顯著差異（ $p = .164$ ）；在「長方形」任務中，不同題型的答對率有顯著差異， $F(2, 41) = 38.616$ ， $p < .001$ ， $\eta^2 = .485$ ，Bonferroni 事後比較發現幼兒在典型題型（ $M = 100\%$ ）、非典型題型（ $M = 71\%$ ）與開放題型（ $M = 42\%$ ）的答對率兩兩之間皆呈現顯著差異（ $ps < .007$ ）；在「三角形」任務中，不同題型的答對率有顯著差異， $F(2, 41) = 49.308$ ， $p < .001$ ， $\eta^2 = .546$ ，Bonferroni 事後比較發現幼兒在典型題型（ $M = 99\%$ ）、非典型題型（ $M = 74\%$ ）與開放題型（ $M = 39\%$ ）答對率兩兩之間皆達顯著差異（ $ps < .007$ ）。（見圖 2）

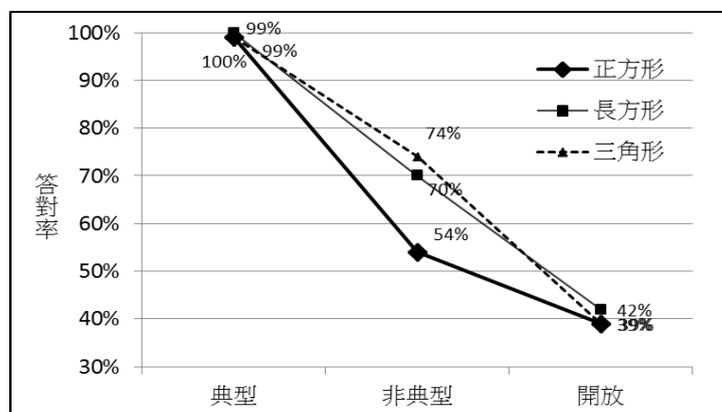


圖 2 幾何形狀與幾何題型辨識表現

三、影響幼兒辨識圖形的圖形設計因素

(一) 圖形縮小與改變方向的影響（非典型題型）

幼兒在非典型題型中，正方形、長方形、三角形；圖形縮小、改變方向、與縮小及改變方向的辨識表現如下表 6。

表 6
幼兒在非典型題型中辨識形狀的答對率 (%)

	正方形	長方形	三角形	平均答對率
縮小	96* (13)	92* (24)	96* (13)	95 (2)
改變方向	33 (42)	60 (42)	61 (45)	51 (6)
縮小及改變方向	32 (40)	61 (42)	67* (35)	53 (5)
平均答對率	54 (4)	71 (5)	75 (4)	

註：表格內數據為平均答對率（標準差）；*答對率顯著高於猜測（50%）

以單一樣本 *t* 檢定分析幼兒形狀辨識答對率與隨意猜測的差異，結果顯示縮小正方形、長方形、三角形的答對率皆顯著高於隨意猜測 ($p_s < .001$)；改變方向正方形答對率皆顯著低於隨意猜測 ($p = .014$)；縮小及改變方向正方形的答對率顯著低於隨意猜測 ($p = .048$)，而縮小及改變方向三角形答對率則高於隨意猜測 ($p = .018$)。

為了檢視幼兒是否能正確判斷不同種類的基本幾何圖形，本研究設計不同非典型的題型(縮小 1/10、改變方向、縮小 1/10 以及改變方向)，然圓形無法同其他圖形般設計改變方向的題型，故本次分析將排除圓形，僅分析正方形、長方形與三角形。以每位幼兒在某個題型中的答對率（答對題數/總題數）作為依變項，研究者執行 3（形狀：正方形、長方形、三角形）×3（變形：縮小、改變方向、縮小及改變方向）二因子相依樣本變異數分析，重複量數分析結果顯示形狀達顯著差異， $F(2, 41) = 15.856, p < .001, \eta^2 = .279$ ，變形也達顯著差異 $F(2, 41) = 56.103, p < .001, \eta^2 = .578$ 。

以形狀而言，Bonferroni 事後比較顯示幼兒正方形 ($M = 54%$) 的答對率顯著低於長方形 ($M = 71%, p = .001$) 與三角形 ($M = 75%, p < .001$)，而長方形與三角形的答對題數之間並無顯著差異 ($p = .646$)；以變形而言，Bonferroni 事後比較顯示形狀縮小 ($M = 95%$) 的答對率顯著高於圖形改變方向 ($M = 51%, p < .001$)、縮小及改變方向 ($M = 53%, p < .001$)，其中改變方向與縮小及改變方向兩種變形之間並無顯著差異 ($p = .908$)，如圖 3 所示。

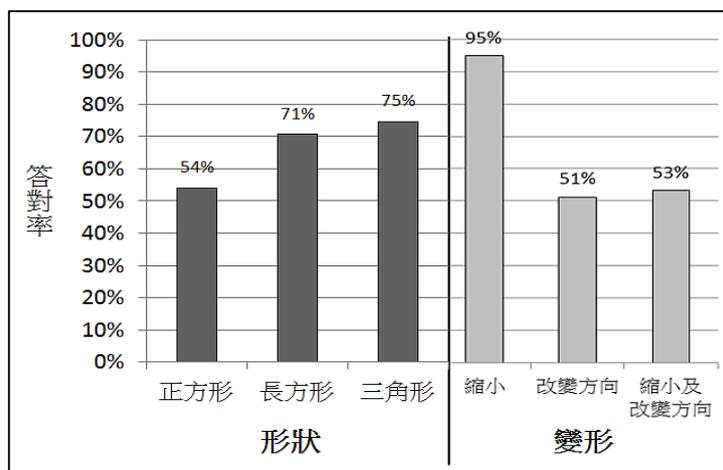


圖 3 幼兒在非典型題型設計中辨識幾何形狀的答對率

此外，形狀與變形的交互作用亦達顯著差異， $F(4, 41) = 11.632$ ， $p < .001$ ， $\eta^2 = .221$ （如圖 4），因此進一步以單純主要效果檢視在不同變形下，幼兒在基本幾何圖形的辨識表現。

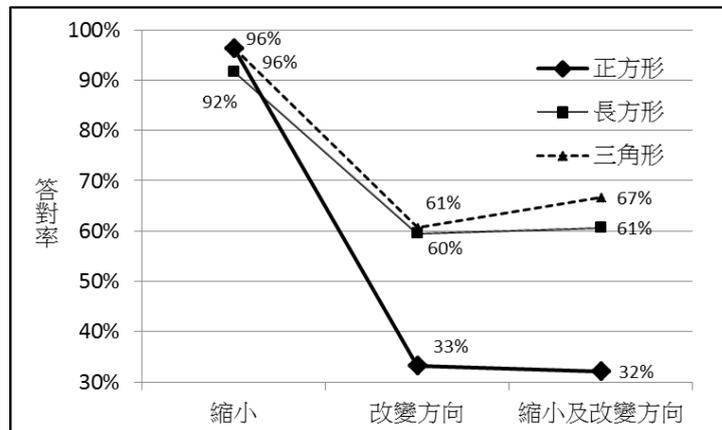


圖 4 幾何形狀與圖形變形辨識表現

單因子變異數分析發現圖形在「改變方向」後，幼兒辨識形狀的能力有顯著差異 ($F = 14.170$ ， $p < .001$ ， $\eta^2 = .340$)，Bonferroni 事後比較發現幼兒在正方形 ($M = 33\%$) 的答對率顯著低於長方形 ($M = 60\%$ ， $p = .001$) 與三角形 ($M = 61\%$ ， $p < .001$)；圖形在「縮小及改變方向」後，幼兒辨識形狀的能力有顯著差異， $F(2, 41) = 17.669$ ， $p < .001$ ， $\eta^2 = .301$ ，Bonferroni 事後比較發現幼兒正方形 ($M = 32\%$) 的答對率顯著低於長方形 ($M = 61\%$ ， $p < .001$) 與三角形 ($M = 67\%$ ， $p < .001$)；然而，圖形在「縮小」後，幼兒辨識形狀的能力並無顯著差異， $F(2, 41) = 1.238$ ， $p = .295$ ， $\eta^2 = .029$ 。

單因子變異數分析發現幼兒在「正方形」、「長方形」與「三角形」任務中，不同的變形題目的答對率皆有顯著差異，正方形： $F(2, 41) = 82.606$ ， $p < .001$ ， $\eta^2 = .668$ ；長方形： $F(2, 41) = 18.925$ ， $p < .001$ ， $\eta^2 = .316$ ；三角形： $F(2, 41) = 20.149$ ， $p < .001$ ， $\eta^2 = .330$ ，Bonferroni 事後比較發現幼兒在三個形狀任務下，答對率皆是圖形縮小顯著高於改變方向 ($ps < .001$) 與縮小及改變方向 ($ps < .001$)，而改變方向與縮小及改變方向的答對率並無顯著差異 ($ps > .288$)。

整體而言，幼兒辨識形狀的能力不受圖形「縮小」的影響，但受到「改變方向」的影響，且在改變方向（包含改變方向、縮小及改變方向）的變形下，幼兒對正方形的辨識表現較其他圖形差。

（二）圖形開放的影響（開放題型）

幼兒在開放題型中，正方形、長方形、三角形；虛線、缺角、缺邊、與缺角缺邊的辨識表現如下表 7。以單一樣本 t 檢定分析幼兒形狀辨識答對率與隨意猜測的差異，結果顯示虛線正方形、長方形、三角形的答對率皆顯著高於隨意猜測 ($ps < .001$)。

表 7
幼兒在開放題型中辨識形狀的答對率 (%)

	正方形	長方形	三角形	平均答對率
虛線	8* (22)	14* (28)	6* (20)	10 (3)
缺角	50 (43)	50 (46)	50 (46)	50 (7)
缺邊	47 (44)	53 (47)	51 (46)	51 (7)
缺邊缺角	51 (46)	53 (47)	50 (48)	52 (7)
平均答對率	39 (5)	43 (6)	39 (6)	

註：表格內數據為平均答對率（標準差）；*為答對率顯著高於猜測（50%）

為了檢視幼兒是否能正確排除幾何圖形，本研究設計不同開放的題型（虛線、缺角、缺邊、缺角缺邊）。因圓形無法設計缺角、缺角缺邊的圖形，本次分析將排除圓形數據，僅進行正方形、長方形、三角形的分析。以每位幼兒在某個題型中的答對率（答對題數/總題數）作為依變項，研究者執行 3（形狀：正方形、長方形、三角形）× 4（開放程度：虛線、缺角、缺邊、缺角缺邊）二因子相依樣本變異數分析，重複量數結果顯示圖形的開放程度有顯著差異， $F(3, 41) = 37.984$ ， $p < .001$ ， $\eta^2 = .481$ ；形狀之間無顯著差異， $F(2, 41) = 1.662$ ， $p = .196$ ， $\eta^2 = .039$ ；此外，形狀與圖形的開放程度亦無交互作用， $F(6, 41) = .966$ ， $p = .435$ ， $\eta^2 = .023$ 。Bonferroni 事後比較發現虛線圖形（ $M = 10\%$ ）的答對率顯著低於缺角（ $M = 50\%$ ， $p < .001$ ）、缺邊（ $M = 51\%$ ， $p < .001$ ）、缺角缺邊（ $M = 52\%$ ， $p < .001$ ），其中缺角、缺邊、缺角缺邊兩兩相互比較皆無顯著差異（ $ps = 1.000$ ）（如圖 5）。

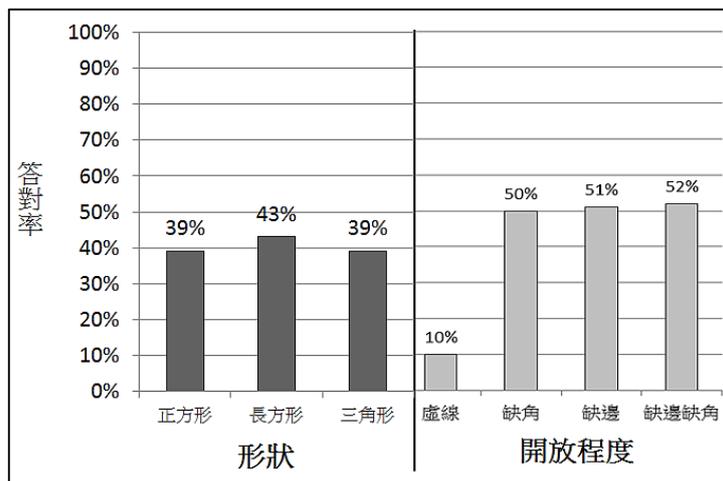


圖 5 幼兒在開放題型設計中辨識幾何形狀的答對率

整體而言，幼兒辨識開放題型並無形狀上的差異，但辨識圖形的能力受不同開放程度影響，「虛線」圖形的辨識能力遠低於其他開放程度的圖形，顯示幼兒容易受到虛線圖形的干擾而影響圖形的辨識。

伍、研究發現與討論

一、三歲幼兒尚無法穩定辨識基本幾何圖形

本研究檢視三歲幼兒在基本幾何圖形的辨識表現（正方形、長方形、三角形、圓形），每個基本幾何圖形均包含典型、非典型幾何圖形、與開放圖形的辨識表現，檢視幼兒是否**穩定成功**辨識圓形、正方形、長方形與三角形，發現雖然幼兒能穩定辨識四個基本幾何形狀的典型題型，但是在非典型與開放題型的辨識表現不佳。

以整體辨識表現而言，僅有 2 位幼兒（4%）能成功辨識正方形，8 位幼兒（19%）能成功辨識長方形，9 位幼兒（21%）能成功辨識三角形，15 位幼兒（35%）能成功辨識圓形，非典型題型與開放題型影響三歲幼兒在四個基本幾何圖形的辨識表現，大多數三歲幼兒無法成功辨識四個基本幾何圖形。

無獨有偶的，Aslan 與 Arnas（2007）研究發現三到六歲幼兒辨識非典型幾何圖形的答對率為 84%（典型幾何圖形的答對率高達 95%），而張靜文與張麗芬（2014）發現四到六歲幼兒辨識非典型幾何圖形只有 54%，開放圖形幾何圖形只有 80%（典型幾何圖形的答對率高達 98%），可以推論三歲學齡前幼兒使用知覺的辨識標準，並非使用具邏輯性的判斷標準。簡言之，幼兒容易受到視覺的線索干擾對幾何圖形的判斷表現（Clements et al., 1999），當呈現不同變化的幾何圖形時，三歲幼兒便無法穩定辨識。

綜觀過去幼兒在幾何圖形辨識的研究（例如：蔣姿儀、林思婷，2017；Aslan & Arnas, 2007），三歲幼兒在長方形、正方形、圓形的辨識表現明顯落後於五歲和六歲幼兒（Aslan & Arnas, 2007），且三歲幼兒在長方形、正方形、圓形與三角形的命名的表現上皆落後於五歲以上的幼兒（蔣姿儀、林思婷，2017），可以推論三歲幼兒在幾何圖形的辨識發展與年長的學齡幼兒有很大的差距。造成三歲與年長幼兒在發展上的差異可能的原因之一是發展上的不連續（例如：Alexander 等人，1989）。有趣的是，賴孟龍、方柔云、王雅葶與季萱（2016）發現三歲幼兒的口頭計數能力、數算能力、以及心算加法等能力的發展遠遠落後於四歲與五歲幼兒，可以推論三歲幼兒在認知發展上處於萌發階段，在此階段的幼兒可能會快速發展圖形辨識與數算等認知能力。建議未來研究可以著重在三歲幼兒不同認知能力的發展，以及彼此之間的關聯，檢視其他數學能力對幼兒幾何辨識表現與的影響。

二、三歲幼兒圖形辨識的發展順序最早的為圓形，最晚的為正方形

本研究發現在幾何圖形發展中的幼兒，基本幾何圖形發展依序為圓形、三角形、長方形、與正方形，多數大部分的三歲幼兒發展順序先是皆無法成功辨識基本幾何圖形，依序能成功辨識圓形，接著能成功辨識圓形、三角形、長方形。換言之，幼兒先發展圓形的能力，接著是三角形與長方形，最後才是正方形。不同於過去研究使用平均數表示幼兒辨識基本幾何圖形的表現，

本研究運用穩定辨識的分析方式，避免因加總平均所造成錯誤判斷，藉由分析不同題型的表現，正確界定受試幼兒的辨識程度。

過去研究（張靜文、張麗芬，2014；蔣姿儀、林思婷，2017；Aslan & Arnas, 2007; Clements et al., 1999; Ho, 2003）發現幼兒在圓形與正方形的辨識表現均優於長方形與三角形。Zambrzycka 等人（2017）使用注視法（looking time）探究二歲幼兒在辨識基本幾何圖形（正方形、長方形、三角形、圓形）的表現，研究發現二歲幼兒對正方形、三角形與圓形觀察力比較敏銳，他們在觀看上述圖形的典型題型與非典型題型的時間明顯多於其他非幾何圖形，然而在長方形的觀察力則較弱，上述研究皆與本研究發現不一致，本研究發現三歲幼兒最難以辨識正方形。造成這個差異可能有以下兩個因素：（一）參與兒童年齡組成：過去研究兒童的年齡層普遍介於三歲到六歲，可能接受過形狀辨識與命名的課程，而本研究的研究對象年齡層僅為三歲，可能尚未接受完整的形狀與物體命名教育（我國幼兒三歲到五歲時的學習目標），因而產生與過去研究發現上的歧異；（二）形狀辨識材料複雜度不同：過去研究的三角形研究材料相對複雜（Aslan & Arnas, 2007），形狀設計包含偏斜（Skewness）、底與高比例變化（Aspect ratio）、改變方向（Orientation）與大小變化（Size），Aslan 與 Arnas（2007）的研究發現幼兒難以辨識三角形，主要是因為偏斜、底與高比例變化影響兒童的判斷，而改變方向與大小變化兩設計，並不會影響兒童對三角形的辨識表現。因此，當正方形與三角形的變化條件相同，皆是改變方向與大小變化的情狀下，幼兒在本研究中較能輕易的辨識出三角形，因而更勝於正方形。另有兩點有趣的發現，其一，若擷取過去文獻（Aslan & Arnas, 2007）與本研究相同設計（改變大小、改變方向）的結果，發現幼兒辨識基本幾何圖形的答對率依序為圓形（98%）、三角形（95%）、長方形（86%）、正方形（85%），答對率排序與本研究發現有巧妙的相似度；其二，排除圓形所限制的改變方向、缺角等變形設計，將四個基本幾何圖形以相同條件進行比較，幼兒在四個基本幾何圖形的答題表現並無顯著差異，其答對率由高至低依序為長方形、三角形、正方形，圓形反而是四個幾何圖形中答對率最低的。由此可知，若以平均數或是答對題數表示幼兒的幾何圖形辨識表現有一定的推論限制，容易受到不同因素與條件影響，導致結果大相逕庭。

除此之外，本研究也發現有 11% 的幼兒並非遵從圓形、三角形、長方形、正方形的發展順序，在發展辨識幾何形狀的認知歷程中，尚有本研究未知的因素干擾其發展，例如：家庭背景與父母教育模式等，幼兒可能因為接觸來自國外的童書，常常看到三角形的屋頂，使得幼兒對三角形辨識表現較佳。因此，建議未來研究可針對特殊發展情形的兒童採用質性方式深入研究，以便探究未知的認知發展干擾因素。

三、圖形方向的改變與虛線圖形對三歲幼兒基本幾何圖形的辨識影響最大

將正方形、長方形、三角形以相同標準設計不同的題型變化（典型、非典型、開放）相互比較後，形狀與題型呈現交互作用，在形狀方面，幼兒較難以辨識正方形，尤其是在非典型的題型中的正方形最難以辨識。

在題型方面，本研究發現幼兒在典型題型中表現最好，非典型題型次之，開放題型表現最差，這和張靜文與張麗芬（2014）的發現不同，張靜文與張麗芬發現幼兒在非典型題型的辨識表現最差。本研究與張靜文與張麗芬（2014）不同之處除了參與者年齡層不同之外，非典型題型圖形設計複雜度也不同，張靜文與張麗芬除了與本研究相同的大小比例、圖形方向旋轉外，尚設計圖形周圍加粗、歪斜方向角度、圖形底高比例的變形，導致非典型題型對兒童較難以判斷。

檢視非典型題型，發現幼兒難以辨識改變方向後的圖形（旋轉 45 度，包含縮小與旋轉 45 度），特別是正方形，在改變方向時與長方形、三角形的答對率有明顯的落差，顯示幼兒較難以辨識正方形的原因明顯受到圖形改變方向的影響，大部分的幼兒無法正確辨識方向旋轉後的正方形（Halat & Dağlı, 2016），甚至兒童會認為改變方向的正方形變成菱形而判斷它並非正方形（張靜文、張麗芬，2014）。令人訝異的是，Aslan 與 Arnas（2007）研究發現，在非典型圖形上，改變方向並不會對幼兒的辨識表現有影響，與本研究的發現並不一致。具體而言，Aslan & Arnas（2007）發現三歲幼兒在改變方向的三角形、改變方向的長方形、改變方向的正方形的正確率分別為 95%、77%、85%，本研究則分別為 61%、60%、33%。整體而言，臺灣幼兒在辨識改變方向的幾何圖形時有困難，尤其是改變方向的正方形，對臺灣的三歲幼兒更是困難重重。

除此之外，本研究也發現在開放題型中圖形以虛線呈現時最容易干擾幼兒判斷基本幾何圖形，舉例來說，幼兒會認為以虛線表示的三角形就是三角形，顯示三歲幼兒多以視覺而非圖形的性質判斷形狀，符合 van Hiele（1986）兒童幾何概念學習過程層次的階段零—視覺期（Visualization），此階段的幼兒是以視覺作為觀察，透過圖形的外表、輪廓來分辨，因此他們可以簡單用視覺判斷開放題型中缺角、缺邊，以及缺角缺邊的圖形，但是由於虛線圖形與原圖形過於相像，因此幼兒會將其視為原圖形，影響幼兒的圖形辨識。依據 Piaget 等人（1960）所提出的拓樸幾何（Topology）理論，二到四歲的幼兒能區辨封閉圖形與非封閉圖形，如同本研究三歲幼兒能清楚分辨典型圖形（封閉），且 50% 以上的幼兒能區分缺角、缺邊與缺角缺邊等非封閉圖形設計，僅有虛線圖形不適用於拓樸幾何理論解釋。幼兒難以辨識虛線圖形可從完形心理學的閉合法則（Law of closure）解釋，當元素幾乎完成了某個實體，人們便會將其視為完整的物件（Wagemans et al., 2012），虛線的圖形幾乎描繪了所有的幾何圖形整體，幼兒（成人亦同）會忽略空白區段而在內心（認知）將其連接起來，視其為完整的幾何圖形。因此，虛線圖形的設計有其特殊性，不應與其他未封閉的圖形相提並論。

整體而言，學齡前幼兒不同的形狀辨識能力研究結果始終分歧，主要是此年齡的幼兒多以視覺的方式判斷形狀，參與者容易受幾何圖形教育情形不同、研究材料設計不同與地區風俗文化不同，例如：歐美地區的房子屋頂多採用類似三角形的設計，而臺灣的生活周遭較不易看到似三角形的物體，導致幼兒較擅長或無法辨識某些圖形。例如：幼兒園教師教導形狀時皆以水平方式呈現圖形的話，幼兒便會將其視為原形（Prototype），而任何不符合原形的，幼兒皆會認為其非幾何圖形，如同 van Hiele（1986）視覺期的階段，導致幼兒擅長分辨典型題型的圖形設

計，較不容易分辨非典型題型的圖形設計。因此，建議家長與教學者在教導幼兒辨識圖形時，不侷限於幾何圖形的原形，可以運用各種不同方向、大小等變換、傾斜、邊長比例不同的圖形方式，讓幼兒以不同角度來辨識圖形，並建立幼兒在幾何圖形的辨識概念。

陸、研究限制

在研究對象的面向上，本研究採立意取樣且樣本數略少，所蒐集的樣本僅能夠代表臺灣南部小班部分幼兒辨識形狀之表現，在類推與應用上須謹慎使用。

在研究材料的面向上，本研究選用四個基本幾何圖形（圓形、三角形、正方形、長方形）作為檢視三歲幼兒辨識基本幾何圖形表現的材料，然而在非典型與開放題型的變化上，圓形無法進行改變方向與缺角的設計，致使圓形較難以呈現非典型的變化，且無法與其他三個基本幾何圖形進行系統性的比較，使得較難以深入分析三歲幼兒在圓形上的表現，僅能透過整體答對率、穩定辨識編碼等方式與其他圖形進行比較，所得出之結論（例如：圓形為幼兒較早發展之幾何圖形）需謹慎使用。

過去研究並未著重學齡前幼兒是否能穩定辨識基本幾何圖形，因此在分析方法上，本研究能參考的文獻僅有一篇，論證略嫌薄弱，不容易獲得多數人認同。然而學齡前幼兒，甚至是三歲的幼兒在發展認知能力時確實是快速且不穩定的，若僅透過答對率說明幼兒辨識形狀的能力，則有高估其能力的可能性。藉此研究亦發現目前學界缺乏一套良好檢視學齡前幼兒幾何圖形辨識的工具，以及分析真實能力的方法。本研究檢核幼兒是否穩定辨識幾何圖形的編碼方式，尚未完全獲得廣泛認同與使用，故提供不同分析方式以貼近幼兒的認知表現，至於此分析方法是否能精準反應學齡前幼兒的快速變化及不穩定的認知表現，尚需未來研究與學者加以證實。

誌謝

本文改寫自黃依苓在賴孟龍指導下完成的碩士論文，感謝科技部計畫（計畫編號 MOST-106-2511-S-415-016-MY4）的經費補助，以及匿名審查者與編輯委員提供的修正建議。

參考文獻

- 李文貞 (2003)。幼兒幾何形體概念發展研究 (未出版之碩士論文)。國立臺灣師範大學, 臺北市。【Lee, Wen-Jan (2003). *Young Children's Conception of Geometry* (Unpublished master's thesis). National Taiwan Normal University, Taipei. (in Chinese)】
- 李文貞、鍾志從 (2006)。幼兒幾何形體概念發展研究。人類發展與家庭學報, 8, 1-29。doi: 10.6246/JHDFS.200605_(8).0001 【Lee, Wen-Jan, & Jong, Jyh-Tsornng (2006). Young children's conception of geometry. *Journal of Human Development and Family Studies*, 8, 1-29. doi: 10.6246/JHDFS.200605_(8).0001 (in Chinese)】
- 張英傑 (2001)。兒童幾何形體認知概念之初步探究。國立台北師範學院學報, 14, 491-528。【Chang, Ing-Jye (2001). A preliminary study on children's concepts of geometric shapes. *Journal of National Taipei Teachers College*, 14, 491-528. (in Chinese)】
- 張靜文、張麗芬 (2014)。幼兒幾何圖形辨識之研究。教育研究學報, 48 (2), 101-125。doi: 10.3966/199044282014104802005 【Chang, Ching-Wen, & Chang, Li-Fen (2014). Young children's recognition of geometric shapes. *Journal of Education Studies*, 48(2), 101-125. doi: 10.3966/199044282014104802005 (in Chinese)】
- 教育部 (2017)。幼兒園教保活動課程大綱。取自 <https://www.ece.moe.edu.tw/ch/preschool/.galleries/preschool-files/NEW1.pdf> 【Ministry of Education (2017). ECEC curriculum framework (Taiwan, R.O.C.). Retrieved from <https://www.ece.moe.edu.tw/ch/preschool/.galleries/preschool-files/NEW1.pdf>】
- 蔣姿儀、林思婷 (2017)。學齡前幼兒幾何形體概念之發展。臺灣數學教師, 38 (2), 19-41。doi: 10.6610/TJMT.20171027.01 【Chiang, Tzu-Yi, & Lin, Si-Ting (2017). The development of the concept of geometric shape of preschool children. *Taiwan Journal of Mathematics Teachers*, 38(2), 19-41. doi: 10.6610/TJMT.20171027.01 (in Chinese)】
- 賴孟龍、方柔云、王雅葶、季萱 (2016)。三到五歲臺灣學齡前幼兒基本數能力的表現: 與 TEMA 常模比較。幼兒教保研究期刊, 17, 43-61。【Lai, Meng-Lung, Fang, Rou-Yun, Wang, Ya-Ting, & Chi, Hsuan (2016). Three to five year old Taiwanese preschoolers' mathematics performance: In comparison with the TEMA norm. *Journal of Early Childhood Education & Care*, 17, 43-61. (in Chinese)】
- 謝佩純 (2008)。幼兒辨識幾何圖形之研究—以三角形和圓形為例 (未出版之碩士論文)。國立政治大學幼兒教育研究所, 臺北市。【Hsien, Pei-Chun (2008). *Young children's recognition of geometric shapes: Triangle and circle* (Unpublished master's thesis). National Chengchi University, Taipei. (in Chinese)】
- Alexander, P. A., Willson, V. L., White, C. S., Fuqua, J. D., Clark, G. D., Wilson, A. F., & Kulikowich, J. M. (1989). Development of analogical reasoning in 4- and 5-year-old children. *Cognitive Development*, 4(1), 65-88. doi: 10.1016/0885-2014(89)90005-1
- Aslan, D., & Arnas, Y. A. (2007). Three- to six-year-old children's recognition of geometric shapes. *International Journal of Early Years Education*, 15(1), 83-104. doi: 10.1080/09669760601106646
- Clements, D. H., Swaminthan, S., Hannibal, M. A. Z., Sarama, J. (1999). Young children's concepts of shape. *Journal for Research in Mathematics Education*, 30(2), 192-212. doi: 10.2307/749610
- Halat, E., & Dağlı, U. Y. (2016). Preschool students' understanding of a geometric shape, the square. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 30(55), 830-848. doi: 10.1590/1980-4415v30n55a25

- Hannibal, M. A. (1999). Young children's developing understanding of geometric shapes. *Teaching Children Mathematics*, 5(6), 353–357. doi: 10.5951/TCM.5.6.0353
- Hannibal, M. A., & Clements D. H. (2000). *Young children's understanding of basic geometric shapes* (Grant No. ESI-8954644). Alexandria, VA: National Science Foundation.
- Ho, Y. S. (2003). Young children's concept of shape: van Hiele visualization level of geometric thinking. *The Mathematics Educator*, 7(2), 71–85.
- Lai, M. L., & Baroody, A. J., & Johnson, A. (2008). Fostering preschoolers' understanding of the addition-subtraction inverse principle. *Cognitive Development*, 23(1), 216–235. doi: 10.1016/j.cogdev.2007.06.002
- Lin, F. L. (1988). Societal differences and their influences on children's mathematics understanding. *Educational Studies in Mathematics*, 19(4), 471–497. doi: 10.1007/BF00578695
- Lister, C., Leach, C., & McCombe, R. (1988). Sequence in development of conservation concepts in children with language disabilities. *Early Child Development and Care*, 34(1), 1–13. doi: 10.1080/0300443880340101
- Piaget, J., Inhelder, B., & Szeminska, A. (1960). *The child's concept of geometry*. New York: Basic Books.
- Satlow, E., & Newcombe, N. (1998). When is a triangle not a triangle? Young children's developing concepts of geometric shape. *Cognitive Development*, 13(4), 547–559. doi: 10.1016/S0885-2014(98)90006-5
- van Hiele, P. M. (1986). *Structure and insight: A theory of mathematics education*. London: Academic Press.
- Wagemans, J., Elder, J. H., Kubovy, M., Palmer, S. E., Peterson, M. A., Singh, M., & von der Heydt, R. (2012). A century of Gestalt psychology in visual perception: I. Perceptual grouping and figure-ground organization. *Psychological Bulletin*, 138(6), 1172–1217. doi: 10.1037/a0029333
- Zambrzycka, J., Kotsopoulos, D., Lee, J., & Makosz, S. (2017). In any way, shape, or form? Toddlers' understanding of shapes. *Infant Behavior and Development*, 46, 144–157. doi: 10.1016/j.infbeh.2016.12.002

附錄 1：圖形辨識任務形狀、題型示意圖

典型	非典型	開放
<p>正方形各類題型示意圖</p>		
<p>長方形各類題型示意圖</p>		
<p>三角形各類題型示意圖</p>		
<p>圓形各類題型示意圖</p>		

附錄 2：正方形、長方形、三角形、圓形圖卡施測順序

第一次任務

第二次任務

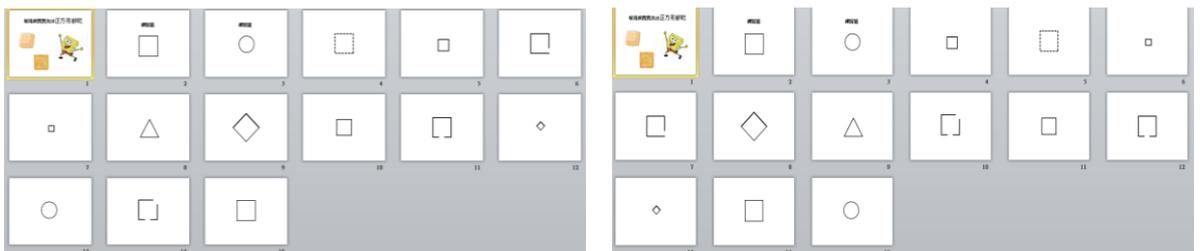
圓形圖卡



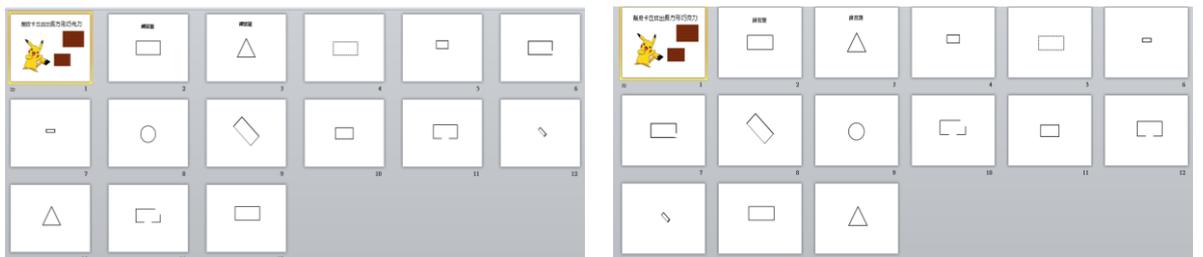
三角形圖卡



正方形圖卡



長方形圖卡



卓益安、陳世文、楊文金、廖斌吟（2022）。

探討臺灣高中生使用邏輯連接詞的錯誤：以解一元二次方程式與不等式為例。

臺灣數學教育期刊，9（1），27-48。

doi: 10.6278/tjme.202204_9(1).002

探討臺灣高中生使用邏輯連接詞的錯誤：以解一元二次方程式與不等式為例

卓益安¹ 陳世文¹ 楊文金² 廖斌吟³

¹ 國家教育研究院教科書研究中心

² 國立臺灣師範大學科學教育研究所

³ 臺東縣廣原國小

本研究探討高中一年級學生在一元二次方程式與不等式的解題過程中，使用邏輯連結詞的錯誤情形。本研究參與施測學生有 146 人，施測題目有 6 題，包含 4 題二次不等式與 2 題二次方程式。研究者透過錯誤分析（errors analysis）以及持續比較法，先歸納出四個答題類別：正確解答、正確的代數運算但是過程或解答不完整、代數運算上的錯誤導致錯誤的解答以及未答。接著，依據正確的代數運算但是過程或解答不完整這類別，分別歸納出使用邏輯連接詞（且、或）的錯誤類別。研究結果顯示：（1）「且」有 3 種誤用類別：忽略邏輯連結詞「且」並且以逗號（，）取代、以「或」取代「且」以及不正確地詮釋邏輯連結詞；（2）「或」有 5 種誤用類別：忽略邏輯連結詞「或」、忽略邏輯連結詞「或」並且以逗號（，）取代、忽略邏輯連結詞「或」並且以頓號（、）取代、以「且」取代「或」以及不正確地詮釋邏輯連結詞；（3）在忽略邏輯連結詞並且以逗號（，）取代這個類別上，「或」的誤用比例比「且」誤用比例高；（4）邏輯連結詞「或」會被頓號（、）取代這個類別的發生，說明學生的中文語言經驗對邏輯連接詞使用的影響。

關鍵字：一元二次方程式、不等式、錯誤分析、邏輯連結詞

通訊作者：卓益安，e-mail：scottiess0625@mail.naer.edu.tw

收稿：2021 年 12 月 14 日；

接受刊登：2022 年 4 月 19 日。

Cho, Y. A., Chen, S. W., Yang, W. J., & Liao, P. Y. (2022).

Taiwanese High-School Students' Mistakes in the Use of Logical Connectives when Solving Quadratic Equations and Inequalities.

Taiwan Journal of Mathematics Education, 9(1), 27-48.

doi: 10.6278/tjme.202204_9(1).002

Taiwanese High-School Students' Mistakes in the Use of Logical Connectives when Solving Quadratic Equations and Inequalities

Yi-An Cho¹ Shih-Wen Chen¹ Wen-Jin Yang² Pin-Yin Liao³

¹ Center for Textbook Research, National Academy for Educational Research

² Graduate Institute of Science Education, National Taiwan Normal University

³ Guang-Yuan primary school, Taitung County

The aim of this study is to examine the mistakes made by students in the use of logical connectives while simplifying and solving algebraic equations and inequalities. The study was conducted among 146 first-grade high-school students. The data was collected from a questionnaire for students comprising items containing inequalities or equations. The data was analyzed according to interpretative theory. The findings identify mistakes in the way students use the mathematical logical connectives when manipulating algebraic expressions. Firstly, the mistakes of using AND include ignoring the AND and replacing it with a comma (,), replacing the AND with OR, and incorrect interpretation of the AND. Secondly, the mistakes of using OR include ignoring the OR, ignoring the OR and replacing it with a comma (,), ignoring the OR and replacing it with a slight-pause mark (∙), replacing the OR with AND, and incorrect interpretation of the OR. Thirdly, in the category of ignoring the logical connective and replacing it with a comma (,), the frequency of the mistake of using OR is higher than the frequency of the mistake of using AND. Fourthly, this category of ignoring the OR and replacing it with a slight-pause mark (∙) reveals the effect of students' language background on the use of logical connectives.

Keyword: quadratic equation, inequality, error analysis, logical connectives

Corresponding author : Yi-An Cho , e-mail : scottiess0625@mail.naer.edu.tw

Received : 14 December 2021;

Accepted : 19 April 2022.

壹、背景

十二年國民基本教育課程綱要數學領域的基本理念一開始即提及：「數學是一種語言，宜由自然語言的題材導入學習。」在臺灣日常生活中，不管是報章雜誌、書籍、網頁、廣告宣傳或是文宣，甚至是政府的法令或宣導，文字的呈現都是以中文為主，然而很多時候中文其實是一種數學語言。例如，衛生福利部疾病管制署中央流行疫情指揮中心宣布全國疫情第三級警戒的第七點措施明訂：「停止室內 5 人以上、室外 10 人以上之家庭聚會（同住者不計）和社交聚會，並避免不必要移動、活動或集會。」其實涉及到許多數學的邏輯概念，例如「停止室內 5 人以上、室外 10 人以上……」即表示室內最多 4 人，室外最多 9 人，而只要是室內 5 人以上、室外 10 人以上的家庭聚會以及社交聚會均需禁止，其中此句透過標點符號「、」，還有「和」與「或」來表達其蘊涵之數學邏輯語意，顯然地，當我們在閱讀此句時，除了要理解「室內」、「室外」、「家庭聚會」、「社交聚會」此類中文詞彙的意義之外，更重要的是了解句中標點符號、連接詞所傳達的數學邏輯。當我們能夠精確理解這些標點符號與連接詞所蘊含的數理邏輯時，便能清楚遵守在三級警戒時所規範的人數與場合限制，而避免違反相關法令規定，這也顯示標點符號與連接詞在表達數學邏輯的重要性。

在數學學習上，學生不管是透過老師課堂中的話語、線上影片、教科書或者是其他參考文本，都是透過自己的語言系統來連結、理解、詮釋這些文本中的數學專業詞彙與用語。在課堂上，教師亦由師生常用的語言系統出發，連結學生的生活經驗，串接文字以及符號，並且以具體表格、圖形將情境簡化，再透過數學符號與邏輯符號的表徵，以利進行後續的代數運算與邏輯推論。在小學階段，學生需要習得相等與比較的概念、等號與大小於符號的意義與運用以及非負整數與分數的四則運算與應用。到了國中階段，學生先學習負數的四則運算與應用，並且開始假設與使用未知數來解決問題，例如，一元一次方程式或不等式、一元二次方程式等。在這個過程中，邏輯連結詞（logical connectives）的概念與使用就悄悄地進入了數學課程。例如前文中，5 人以上是意謂著人數要大於 5 或等於 5。也就是說，如果我們以 n 表示人數，就可以記為 $n \geq 5$ ，亦可記為 $n > 5$ 或 $(\vee) n = 5$ 。因此，停止室內 5 人以上意謂著否定室內 5 以上的人數，也就是室內人數要少於 5 人，可記為 $n < 5$ ，亦可記為 $n \leq 4$ ，或記為 $n < 4$ 或 $(\vee) n = 4$ 。然而，陳英貴（2005）與陳勝雄（2005）都發現，有些國高中學生對於「不大於」、「不小於」、「至少」、「至多」、「不超過」等詞彙的語意容易混淆，不僅會將以上的否定理解成以下，也會將至多的否定理解成至少。另外，吳昭容、曾建銘、鄭鈐華、陳柏熹與吳宜玲（2018, p. 32）探討國小三年級至國中八年級學生數學詞彙能力時發現，國中七年級與八年級學生的共同的數學詞彙難詞就包含大約等於、至多、遞移律、不等號、等量公理等。這些都會影響學生不等式的列式，亦會影響方程式以及不等式的解題。而且，隨著中學年級的增加，邏輯連結詞的使用就會越來越多，而且越來越頻繁（陳英貴 2005；陳勝雄 2005；Tsamir & Almog, 2001），但是卻非常少研究探討中學生使用邏輯連接詞的情形（Mokh, Othman, & Shahbari, 2019）。

Crystal (2006) 指出，學生學習學科內容專業詞彙的意義以及連結詞的使用都是一種漸次學習，尤其有些詞彙間接隱含了連結成分，例如， n 不大於 5 的意涵是 $n \leq 5$ ，同時也隱含了 $n < 5$ 或 $n = 5$ 。Crystal 更發現，雖然三歲孩童能造出和 (and)、因為 (because)、所以 (so)、如果 (if) 等句子，七歲孩童開始能說出連結關係較為複雜的句子，但是要將連結成分用得精確，還要好幾年時間。特別要用在學術情境更為困難，一方面連結詞在日常口語互動中的使用往往並不精確 (Maskill, 1988)，另一方面連結詞在文本中呈現的意義常常是多樣的 (黃仲義、陳世文、沈彥宏、楊文金, 2020; 廖斌吟, 2017; 蔣佳玲、楊文金、廖斌吟、史偉郁, 2014)，甚至也會有誤用的情形 (Mokh et al., 2019)。因此，學習者原有的語言系統有可能會影響邏輯連結詞在不同學科文本中的理解與使用。當然，數學學習也不例外。

在中學的數學學習，解方程式與不等式是重要技能，因為應用層面廣泛，所以有部分研究者 (e.g., 陳英貴, 2005; 陳勝雄, 2005; Cai & Moyer, 2008; El-khateeb, 2016; Li, 2007; Poon & Leung, 2010; Samuel, Mulenga, & Angel, 2016) 針對代數式簡化以及因式分解進行研究，也有研究者 (e.g., Knuth, Stephens, McNeil, & Alibali, 2006) 從解方程式檢視學生對等號的理解，另有研究者 (e.g., Tsamir & Almog, 2001) 著重在學生解不等式的策略。這些研究也發現，在方程式與不等式的解題歷程中，邏輯連接詞的使用也漸漸伴隨其中，例如，方程式 $-x^2 + 2x + 3 = 0$ 因式分解後為 $-(x-3)(x+1) = 0$ ，需討論以下三種狀況：(1) $x-3=0$ 且 $x+1 \neq 0$; (2) $x-3 \neq 0$ 且 $x+1=0$; (3) $x-3=0$ 且 $x+1=0$; 再整合而成其解 (solution) 為 $x=3$ 或 $x=-1$ 。從集合論的角度，構成上述方程式的解集合為 $\{x: -x^2 + 2x + 3 = 0\}$ ，亦可以記為 $\{x: x=3 \text{ or } x=-1\}$ 。它由上述三種情況所成集合聯集 (union) 而成。然而，在英文為自然語言的情況下，Mokh 等人 (2019) 針對兩個邏輯連結詞 (且、或) 進行解方程式與不等式時的答題分析發現，國中九年級學生會將 ALSO 取代「且」、忽略邏輯連結詞「或」並且以逗號 (,) 取代、以及以「且」取代「或」等錯誤情形。因此，研究者認為，在我國為中文語言經驗的情況下，邏輯連接詞應該會有不同的錯誤使用情形。也因此，本研究亦針對兩個邏輯連結詞 (且、或)，探討臺灣高中一年級學生，在一元二次方程式與不等式的解題歷程中使用錯誤。

貳、文獻探討

一、語句邏輯和邏輯連結詞的語義

(一) 語句邏輯

語句邏輯 (sentential logic) 又稱命題邏輯 (proposition logic)，是指以整個簡單語句為符號化的基本單位，不考慮語句內部的結構 (陳瑞麟, 2005; 傅皓政, 2006)。在邏輯學上，可以判斷真假的語句稱為命題，例如，「所有整數都是正的」是命題，但是，「整數比分數可愛」就不是命題。命題邏輯把一切的語句區分為「簡單語句 (simple sentence)，簡稱單句」和「複合語句

(compound sentence)，簡稱合句」。單句是一個主詞與一個述詞合成的句子，包含全稱命題與特稱命題。全稱命題是針對所有群體對象的命題，例如，所有的等腰三角形是正三角形；特稱命題是針對部分群體對象的命題，例如，有些等腰三角形是正三角形。合句包含一個以上的單句，藉由邏輯連結詞(logical connectives)組合起來，其中「且(and)」與「或(or)」為兩個最常用的邏輯連結詞。例如，所有的等腰三角形都是正三角形且所有的正方形都是平行四邊形。語句邏輯嘗試將所有語句給予真假值，決定所有語句的真假。單句的真假由敘述的內容來決定，例如，所有的等腰三角形都是正三角形是錯的、所有的正方形都是平行四邊形是對的；合句的真假判斷是透過是單句的真假並且配合邏輯連結詞的意義之後，再決定真假，例如，所有的等腰三角形都是正三角形為假、所有的正方形都是平行四邊形為真，如果兩單句是由「且」來連接，兩個單句必須同時為真，合句才為真；如果兩單句是由「或」來連接，兩個單句只要其中一個為真，整個合句即為真。

語句否定是倒轉語句真假值的工具，對一個語句而言，否定是用在該語句屬性的真假值的倒轉上，例如，「猴子是哺乳類」的否定為「猴子不是哺乳類」。單句否定也包含全稱命題與特稱命題的否定，否定全稱命題是將全稱命題變成了特稱命題，也就是，否定「所有的 A 是 B」就會是「有些 A 不是 B」，例如，否定「所有的正方形都是平行四邊形」就會是「有些正方形不是平行四邊形」；否定特稱命題是將特稱命題變成了全稱命題，也就是，否定「有些的 A 是 B」就會是「全部 A 不是 B」，例如，否定「有些正方形是平行四邊形」就會變成「所有的正方形都不是平行四邊形」。接著，合句的否定則涉及單句否定以及或且互換。例如，否定「所有的等腰三角形都是正三角形且有些正方形是平行四邊形」就會變成「有些等腰三角形不是正三角形或所有正方形都不是平行四邊形」；又如，否定「所有的等腰三角形都是正三角形或有些正方形是平行四邊形」就會變成「有些等腰三角形不是正三角形且所有正方形都不是平行四邊形」。關於否定語句的真假值，則由原單(合)句的真假決定，如果原單(合)句為假，則單(合)句的否定為真，反之亦然。

對於學生而言，從自然語言敘述(statement)轉換為形式邏輯(formal logic)是困難的，而且他(她)們常常誤用這些邏輯連結詞來連接句子(Barker-Plummer, Cox, Dale, & Etchemendy, 2008)。Tsamir 與 Almog (2001) 甚至發現，學生會搞混兩個句子的邏輯連結，究竟是用「或」，還是用「且」，甚至還有忽略的情形發生。

(二) 不同語言中邏輯連結詞的語意詮釋

在數學文本中，「且」和「或」運用在集合的運算，而且在課堂上，數學教師常常運用文氏圖(Venn's diagram)幫助學生理解邏輯連結詞的意涵。「且」可以運用到兩個集合的交集(intersection)，例如，由集合 A 和集合 B 的共同元素所組成的集合稱為 A 與 B 的交集，記作 $A \cap B$ ，即 $A \cap B = \{x: x \in A \text{ and } x \in B\}$ 。另外，「或」可以運用到兩個集合的聯集(union)，例如，由集合 A 或集合 B 的元素所組成的集合稱為 A 與 B 的聯集，記作 $A \cup B$ ，即

$A \cup B = \{x: x \in A \text{ or } x \in B\}$ 。對於「且」和「或」的否定，如果以集合論來看，將以集合的補集（complement set）並且配合狄摩根法則（DeMorgan's Law）來表示。首先，集合補集則是該集合所在的字集合（universal set）以外的範圍，例如，以整個整數系為字集，如果 $A = \{x: x \text{ 是正整數}\}$ ，其補集可記為 $A' = \{x: x \text{ 不是正整數}\}$ ，亦可記為 $A' = \{x: x \text{ 是 } 0 \text{ or } x \text{ 是負整數}\}$ 。聯集補集的運算規則為 $(A \cup B)' = A' \cap B'$ ，其運算後的內容為 $\{x: x \notin A \text{ and } x \notin B\}$ ，例如 $A \cup B = \{x: x < 1 \text{ or } x > 3\}$ ，則補集 $(A \cup B)'$ 運算後的內容為 $(A \cup B)' = \{x: x \geq 1 \text{ and } x \leq 3\}$ 。交集補集的運算規則為 $(A \cap B)' = A' \cup B'$ ，其運算後的內容為 $\{x: x \notin A \text{ or } x \notin B\}$ 。例如 $A \cap B = \{x: x > 1 \text{ and } x < 3\}$ ，則補集 $(A \cap B)'$ 運算後的內容為 $(A \cap B)' = \{x: x \leq 1 \text{ or } x \geq 3\}$ 。

在科學教科書中，我們也可以時常看到使用「且（and）」和「或（or）」來表達科學概念、科學詞彙等意義，例如，滴管是用來吸取「或」注入少量液體所用的工具。這段文字表示學生使用滴管時，只能選擇其中一個動作來操作，無法同時選擇兩個動作，這裡的「或」有選擇的涵義。又如，取一條繩子進行規律的擺動，可以產生彼此相連「且」有規律性的重複波形，穩定的向外傳播，這種連續又有規律的波，稱為週期波。這裡的「且」是連結兩個詞彙，而且它們必須同時發生才符合週期波的定義。因此，系統功能語言學家 Halliday 和 Martin（1993）就發現，在科學文本中，這兩個連結詞「且（and）」和「或（or）」常用來表達科學概念的邏輯語意，從語句中，「或」會有表達文本語意的擴展，這是傳達給讀者此語句具有選擇的語意（alternative semantic）；另外，從上述例子中也可發現，「且」表達語句中數個詞彙的连接，表示每個詞彙都必須發生或考量，這是傳達給讀者此語句具有皆要符合的語意。但是在「或」的部份，可能還會有其它語意，例如，測量物理量時，選擇適當工具「或」儀器是重要的第一步。這裡的「或」似乎不是只有選擇的涵義，它告訴學生，除了選擇工具、儀器其中一個之外，學生也可以同時選擇工具和（and）儀器。所以，學者們 Tidman 與 Kahane（2003）則指出，「或（or）」除了有選擇的意義之外，它還有「兼容」的情形。因為在滴管的例子中，吸取、注入兩者無法同時發生，它們有排斥之義，只能選擇其一；然而，在測量物理量的例子中，工具和儀器是可以同時使用的。這顯示了，上述兩種「或（or）」的選言邏輯常常用於科學語言之中。除此之外，Darlan（2003）也發現，在科學教科書中，「或（or）」也可以用於表達「等同」的意義，而且常見於科學詞彙的定義，例如，造成物質擾動的來源可稱為波源，或稱為振源。

在臺灣對於邏輯連結詞的研究中，蔣佳玲等人（2014）分析國小科學文本的「或」發現，它具有「排斥、兼容、兼有、等同、所有」等五種語意。「排斥或」意指在集合中只能選擇 A 或 B，不能全選或不選，例如，教室裡什麼東西像三角形、正方形、長方形、平行四邊形或圓形。「兼容或」則指集合中選擇多個選項，例如，平面上的直線方程式可以寫成一般式或參數式；又如，星期二或星期六到此商店買東西，都有九折優惠。「兼有或」是指「或」與「且」的通用，不過這種以「或」取代「且」的用法可能是中文的使用習慣，例如，「在家裡的浴室、廁所或廚房，都可以發現蟑螂的蹤跡」，又如，「整數、分數或無理數，都可以比大小」。蔣佳玲等人（2014）

表示，此種用法未見於英語之中。「等同或」意指相當的意思，英語科學文本也有相同用法，例如，大於 0 的整數可以稱為正整數、自然數或計數數。「所有或」則是在論述上會使用「不論...都」語式表示包括所有狀況，例如，不論是空間中的平面或是平面中的直線，都可以以一般式表示。

黃仲義等人（2020）發現，僑生和臺灣學生在日常情境與科學情境中對於「或」的各種語意具有不同程度的理解混淆，且兩組學生對於科學情境中「或」的語意理解較為困難，因此建議教師應更加關注科學語言的使用及學生對科學語言的邏輯語意理解。

二、邏輯連結詞使用的研究

Schleppegrell（2004）指出，在日常生活中，我們與人的口語互動中使用的連結成分如果要轉移到學校或學術情境，情況並不理想。我們在日常的交談中，連結成分的使用並不是很精確，例如，或會出現在不同的段落中，而且會具有不同的意義。Maskill（1988）發現，雖然我們日常的口語互動會有許多連結成分的使用，但是這些連結成分的彈性使用，在學校或學術情境是不被允許的。而且，特別在學術情境中，連結成分的使用方式反而更多變且更多樣化，同時也更受限制。Cryststal（2006）更指出，學習者要將連結成分用得精確、精準，通常要花上好幾年時間才行。也就是說，學習者在學校或學術情境下，要理解連結成分在各類文本中的邏輯關係是什麼，是需要學校教師們提供相關的學習策略。

Gardner（1975, 1980）表示，教師不應該，也不可以把學習者對於連接成分的理解或使用看待為理所應當之事，認為學生在學科活動裡都能夠十拿九穩地掌握連結成分的意義。Gardner 的研究指出，中學四年級的學生對於至少 75 個邏輯連結詞的意義與使用仍然感到困難，例如，*conversely*（反之）、*moreover*（再者，此外）、*or*（或）、*and*（且）等。這些邏輯連接詞，比較於前面所述的連結成分，Gardner 強調它們有幾個特質：（1）大多數都隱含著推論，就是連結證據到推論與結論；（2）有對照與比較的意涵；（3）有些會連結原因和結果，涉及因果性和時序性；（4）有一部分的邏輯連接詞適用於呈現假說。Gardner、Schafe、Thein 和 Watterson（1976）表示，這些邏輯連接詞的功用與使用對於科學與科學教育都很重要。研究者認為，對於其它學科的學習也是，當然，數學也不例外。

關於學生對於邏輯連結詞理解與使用上的困難，Gardner（1975）嘗試讓學生在句子中填空，填入單一答案，以測試學生的理解。Gardner 採用兩種方法，一種方法是將句子中的連接詞挖空出來，讓學生由四個選項中選出 1 個合適的連接詞填入；另一種方法是將由兩個單句結合而成的合句，呈現出第一個單句並且在句末給定一個連結詞，讓學生由 4 個選項中選出一個合適的句子填入，以完成整個合句。Sanders 與 Noordman（2000）發現，如果文本中使用較外顯的連接詞，例如因為、所以等，學生反而受惠於它們所賦予的意義，容易建立起合句與文本的連貫關係，並且對於測試問題有較快速且較合適的回答。Murray（1995）的研究顯示，像是 *yet*、

nevertheless、however 等轉折的连接成分，能讓學生縮短閱讀時間。但是，Murray 也發現，像 moreover、also、and 等附加的连接成分，反而沒有幫助學生閱讀效果。

在邏輯學中，為了明確規範與精確論述邏輯意義，常以特殊邏輯符號來表達事物之間的邏輯關係，而在日常對話或是文本書寫上則是以「和」、「或」、「如果...則」、「因為...所以」等邏輯連接詞來表徵 (Tidman & Kahane, 2003)。邏輯連接詞中以「且」與「或」最為常見，不過英語的 and 在表達聯集或交集時，容易造成讀者的混淆 (Hertwig, Benz, & Krauss, 2008)。例如，Tsamir 與 Almog (2001) 透過錯誤分析發現，學生在解不等式時，不但會混淆兩個邏輯連結詞「或」和「且」的使用，而且有時還會忽略它們，這表示學生無法理解不等式的解彼此之間的關係。另外，Mokh 等人 (2019) 分析學生解方程式與不等式時的錯誤，更發現國中三年級學生五個邏輯連接詞使用的類別：(1) 忽略邏輯連結詞 (Ignoring the logical connective)；(2) 忽略邏輯連結詞並且以逗號取代 (Ignoring the logical connective and replacing it with a comma)；(3) 以「且」邏輯連結取代「或」 (Replacing the logical connective OR with AND)；(4) 以 ALSO 取代 AND (Replacing the logical connective AND with ALSO)；(5) 以不正確的方式詮釋邏輯連結詞 (Incorrect interpretation of the logical connective)。然而，在臺灣常使用的中文語言系統，除了有逗號 (,) 之外，還有頓號 (、)，學生是否有其它誤用的情形。

綜上所述，研究者認為，學生日常生活使用的語言與其語言經驗可能會對邏輯連結詞使用有所影響，所以我們依循 Mokh 等人 (2019) 的方法，嘗試先透過比對、分類和分析臺灣高中學生解方程式與不等式的答題歷程，再探索他 (她) 們使用邏輯連接詞 (且、或) 的錯誤情形。因此，研究者參考 Mokh 等人 (2019) 的手寫問卷，並且分別發展檢測「且」與「或」的手寫問卷題目，以呈現與描述在不同邏輯連接詞的檢測題目下，臺灣高中學生的答題情形以及他 (她) 們的錯誤使用情形。也因此，本研究的研究問題如下：

- (一) 臺灣高中學生在解方程式與不等式時，有哪些答題情形？
 1. 學生在檢測「且」的問題上，有哪些答題情形？
 2. 學生在檢測「或」的問題上，有哪些答題情形？
- (二) 臺灣高中學生在解方程式與不等式的歷程中，有哪些邏輯連接詞的錯誤使用情形？
 1. 在解方程式與不等式的歷程中，有哪些使用「且」的錯誤情形？
 2. 在解方程式與不等式的歷程中，有哪些使用「或」的錯誤情形？

參、研究方法

一、研究對象

研究對象為臺灣高中一年級學生，共計 146 位，其中男生 94 位，女生 52 位。所有研究對象都來自新竹市的一所職業學校，而且他 (她) 們都是就讀該校綜合高中的學生，在高中一年

級時都是學習普通高中的課程。該校鄰近新竹市市中心的位置，而且是桃竹苗學區升學選擇序較為前面的學校。研究者在學生同意情況下才進行集體施測，他（她）們在施測之前已經學過整係數 n 次多項式的因式分解、解整係數 n 次多項式方程式、繪製 n 次多項式函數的略圖以及解整係數 n 次多項式不等式。

二、研究工具

本研究參考 Mokh 等人 (2019) 的手寫問卷進行研究問卷設計，邀請兩位專家對於手寫問卷進行內容效度 (content validity) 的檢驗，兩位專家對科學文本邏輯連接詞歧義與學生閱讀理解之議題均有深入了解，有助修正學生手寫問卷的題目內容。由於本研究目的是瞭解學生對於「邏輯連接詞」的使用，研究者與專家閱讀 Mokh 等人 (2019) 文章中的手寫問卷題目後，發現有些問卷題目的計算過於複雜。為符合研究目的，研究者與專家討論後認為，如果解題的數學技能太多且太過複雜，可能會導致學生不願意書寫；如果解題的數學技能減少，而且是學生在前階段已經習得且熟悉的，學生書寫的意願增大，才能有更多機會探索學生對於「邏輯連接詞」的使用。因此最後發展出 4 題不等式的問卷題目，解題的數學技能都是學生在國中階段已經習得的完全平方公式與因式分解。另外，問卷中沿用兩題 Mokh 等人原有問卷題目，都是二次方程式，而且解題所需的數學技能與前述相同。此兩題運用平方的數學性質，分別搭配運算符號「+」與「×」的使用，可分別檢測「且」與「或」的使用。下表 1 為本研究手寫問卷題目與出處。對於邏輯連接詞的檢測，將於下節詳細描述與介紹。

表 1
本研究的手寫問卷題目與出處

手寫問卷題目	解題的數學技能		題目出處
	完全平方公式	因式分解	
$x^2 - 10x + 25 \leq 0$	✓	✓	由研究者自行發展
$x^2 - 8x + 16 > 0$	✓	✓	
$x^2 - 11x + 30 < 0$		✓	
$x^2 - 2x - 63 > 0$		✓	
$(x^2 - 6x + 5)^2 + (x^2 - 3x + 2)^2 = 0$		✓	由 Mokh、Othman 與 Shahbari (2019) 發展
$(x^2 - 6x + 5)^2 \times (x^2 - 3x + 2)^2 = 0$		✓	

三、資料處理與分析

本研究參考錯誤分析的文獻 (e.g., Borasi, 1987, 1994; Movshovitz-Hadar, Zaslavsky, & Inbar, 1987; Peng & Luo, 2009; Radatz, 1979, 1980) 的建議，透過研究者對於學生手寫問卷的解題歷程進行數學分析，以區分學生解題類別。在歸類的過程中，研究者不斷地比對學生手寫問卷的解

題歷程，不僅針對同一題的解題歷程進行分類，並且也針對不同題目的解題歷程進行比較與比對，以確認出學生手寫問卷的解題類別。亦初步區分出四個解題類別，包含正確解答、正確代數運算過程但是答案有缺失、有缺失的代數運算過程導致導致錯誤解答以及未解。為了提升研究信度，由研究者與二位高中數學老師進行解題類別歸類的評分者信度（inter-rater reliability）分析，由於解題類別歸類資料屬於名義變項性質，而對於解題類別係由三位評分者進行歸類，因此採用 Fleiss（1971）所提出的 Kappa 評分者信度分析，其信度係數之計算公式為 $K = (P_0 - P_c) / (1 - P_c)$ ，其中 P_0 是指三位評分者任二位評分者一致性之觀察值，而 P_c 則是三位評分者任二位評分者一致性之期望值。研究者依據前述信度係數公式進行二次評分者信度計算，分別得到 Kappa 值為 0.89 及 0.92，顯示三位評分者在解題類別歸類上具有高度一致性水準（Landis & Koch, 1977），對於不一致之處。研究者與二位評分者對於學生手寫問卷解題歷程的歧異之處進行討論以取得最後的歸類共識。下表 2 與下表 3 分別為不等式與方程式的解題歸類示例。

表 2
不等式的歸類示例

問卷題目	$x^2 - 10x + 25 \leq 0$	$x^2 - 8x + 16 > 0$	$x^2 - 11x + 30 < 0$	$x^2 - 2x - 63 > 0$
解題類別				
正確解答	$x^2 - 10x + 25 \leq 0$ $\Rightarrow 0 \leq (x-5)^2 \leq 0$ $\Rightarrow x-5=0$ $\Rightarrow x=5$	$x^2 - 8x + 16 > 0$ $\Rightarrow (x-4)^2 > 0$ $\Rightarrow x \neq 4$	$x^2 - 11x + 30 < 0$ $\Rightarrow (x-5)(x-6) < 0$ $\Rightarrow 5 < x < 6$	$x^2 - 2x - 63 > 0$ $\Rightarrow (x-9)(x+7) > 0$ $\Rightarrow x < -7$ 或 $x > 9$
正確代數運算 但過程或答案 有缺失	$x^2 - 10x + 25 \leq 0$ $\Rightarrow (x-5)^2 \leq 0$ $\Rightarrow x-5 \leq 0$ $\Rightarrow x \leq 5$	$x^2 - 8x + 16 > 0$ $\Rightarrow (x-4)^2 > 0$ $\Rightarrow x-4 > 0$ $\Rightarrow x > 4$	$x^2 - 11x + 30 < 0$ $\Rightarrow (x-5)(x-6) < 0$ $\Rightarrow x < 5$ 或 $x > 6$	$x^2 - 2x - 63 > 0$ $\Rightarrow (x-9)(x+7) > 0$ $\Rightarrow x < -7$ 且 $x > 9$
有缺失的代數 運算過程導致 錯誤解答	$x^2 - 10x + 25 \leq 0$ $\Rightarrow 0 \leq (x+5)^2 \leq 0$ $\Rightarrow x = -5$	$x^2 - 8x + 16 > 0$ $\Rightarrow (x+4)^2 > 0$ $\Rightarrow x > -4$	$x^2 - 11x + 30 < 0$ $\Rightarrow (x+5)(x+6) < 0$ $\Rightarrow -6 < x < -5$	$x^2 - 2x - 63 > 0$ $\Rightarrow (x+9)(x-7) > 0$ $\Rightarrow x < -9$ 或 $x > 7$
檢測目的	由於 $(x-5)^2$ 帶有平方的數學性質，「 $0 \leq (x-5)^2 \leq 0$ 」可檢測「且」的使用。	由於 $x \neq 4$ 在數線上同時也可以書寫成「 $x < 4$ 或 $x > 4$ 」，可檢測「或」的使用。	由於 $5 < x < 6$ 也可書寫成「 $x > 5$ 且 $x < 6$ 」，可檢測「且」的使用。	由於此題答案為「 $x < -7$ 或 $x > 9$ 」，可檢測「或」的使用。

表 3
方程式的歸類示例

問卷題目	$(x^2 - 6x + 5)^2 + (x^2 - 3x + 2)^2 = 0$	$(x^2 - 6x + 5)^2 \times (x^2 - 3x + 2)^2 = 0$
解題類別		
正確解答	$(x^2 - 6x + 5)^2 + (x^2 - 3x + 2)^2 = 0$ $\Rightarrow [(x-1)(x-5)]^2 + [(x-1)(x-2)]^2 = 0$ $\Rightarrow (x-1)(x-5) = 0$ 且 $(x-1)(x-2) = 0$ $\Rightarrow x = 1$	$(x^2 - 6x + 5)^2 \times (x^2 - 3x + 2)^2 = 0$ $\Rightarrow (x-1)^4 (x-2)^2 (x-5)^2 = 0$ $\Rightarrow x-1 = 0$ 或 $x-2 = 0$ 或 $x-5 = 0$ $\Rightarrow x = 1$ 或 $x = 2$ 或 $x = 5$
正確代數運算 但過程或答案 有缺失	$(x^2 - 6x + 5)^2 + (x^2 - 3x + 2)^2 = 0$ $\Rightarrow [(x-1)(x-5)]^2 + [(x-1)(x-2)]^2 = 0$ $\Rightarrow (x-1)(x-5) = 0$ 、 $(x-1)(x-2) = 0$ $\Rightarrow x = 1$ 或 $x = 5$ 、 $x = 1$ 或 $x = 2$ $\Rightarrow x = 1$ 、 2 、 5	$(x^2 - 6x + 5)^2 \times (x^2 - 3x + 2)^2 = 0$ $\Rightarrow (x-1)^4 (x-2)^2 (x-5)^2 = 0$ $\Rightarrow x-1 = 0$ ， $x-2 = 0$ ， $x-5 = 0$ $\Rightarrow x = 1$ ， $x = 2$ ， $x = 5$
有缺失的代數 運算過程導致 錯誤解答	$(x^2 - 6x + 5)^2 + (x^2 - 3x + 2)^2 = 0$ $\Rightarrow [(x+1)(x+5)]^2 + [(x+1)(x+2)]^2 = 0$ $\Rightarrow (x+1)(x+5) = 0$ 且 $(x+1)(x+2) = 0$ $\Rightarrow x = -1$	$(x^2 - 6x + 5)^2 \times (x^2 - 3x + 2)^2 = 0$ $\Rightarrow (x+1)^4 (x+2)^2 (x+5)^2 = 0$ $\Rightarrow x = -1$ 或 $x = -2$ 或 $x = -5$
檢測目的	可檢測「且」的使用。	可檢測「或」的使用。

接著，研究者聚焦在第二個類別，並且使用持續比較法 (Glaser & Strauss, 1967)，歸納出使用邏輯連結詞的六個錯誤類別：(1) 忽略邏輯連接詞；(2) 忽略邏輯連結詞並且以逗號 (,) 取代；(3) 忽略邏輯連結詞並且以頓號 (、) 取代；(4) 以「且」取代「或」；(5) 以「或」取代「且」；(6) 不正確地詮釋邏輯連結詞。其中，研究者透過訪談方式，一一確認學生的手寫問卷是頓號，還是逗號，並且一一標記下來，請見下圖 1。

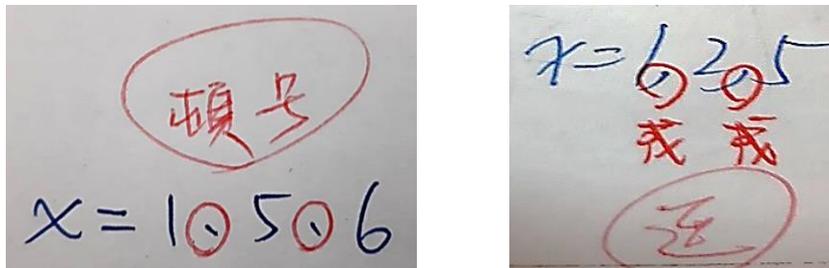


圖 1 頓號與逗號的標記

肆、研究結果與討論

一、臺灣高中生對於解方程式與不等式答題情形

學生手寫問卷題目的答題類別包含正確解答、正確代數運算但是過程或答案有缺失、有缺失的代數運算過程導致錯誤解答以及未解等四個類別。由於本研究目的為探討高中一年級學生邏輯連結詞的使用，因此，將分為檢測「且」和檢測「或」兩個部分來呈現與描述學生答題情形，並且與相關文獻進行對話和討論。

(一) 學生在檢測「且」問題上的答題情形

表 4 為學生在檢測「且」的問題上各項答題類別的比率。在 $x^2 - 10x + 25 \leq 0$ 這個題目上，88% 的學生會利用完全平方公式或因式分解題目寫為 $(x-5)^2 \leq 0$ ，其中 45% 的學生會透過正確的推導程序得到正確答案，但是，43% 的學生代數運算正確但是過程或答案有缺失。能夠得到正確答案的學生，他（她）們熟悉平方的數學性質：「任何實數的平方是大於或等於 0」，部分學生會書寫成 $0 \leq (x-5)^2 \leq 0$ ，並且推論得到 $(x-5)^2 = 0 \Rightarrow x = 5$ ；部分學生能夠書寫為 $(x-5)^2 \geq 0$ 且 $(x-5)^2 \leq 0$ ，推論得到 $x = 5$ ；有些學生則能夠透過二次函數的幾何作圖，得到正確答案（請見圖 2）。但是，如果學生不熟悉上述數學性質，絕大多數的學生會直接兩邊開根號，他（她）們就會書寫為 $(x-5)^2 \geq 0$ ，並且直接推論出 $x-5 \geq 0 \Rightarrow x \geq 5$ 。其次，有 5% 的學生的代數運算過程有缺失而導致錯誤解答，主要的錯誤解題歷程是，學生將 $x^2 - 10x + 25$ 書寫成 $(x+5)^2$ 。最後，有 7% 的學生完全未作答。

表 4
學生在檢測「且」的手寫問卷的答題類別比率

手寫問卷題目	答題類別	正確解答	正確代數運算 但過程或答案 有缺失	代數運算過程 有缺失，導致 錯誤解答	未解
$x^2 - 10x + 25 \leq 0$		66 (45%)	63 (43%)	7 (5%)	10 (7%)
$x^2 - 11x + 30 < 0$		87 (60%)	28 (19%)	4 (3%)	27 (18%)
$(x^2 - 6x + 5)^2 + (x^2 - 3x + 2)^2 = 0$		68 (47%)	21 (14%)	26 (18%)	31 (21%)
答題類別的比率平均		50%	26%	8%	16%

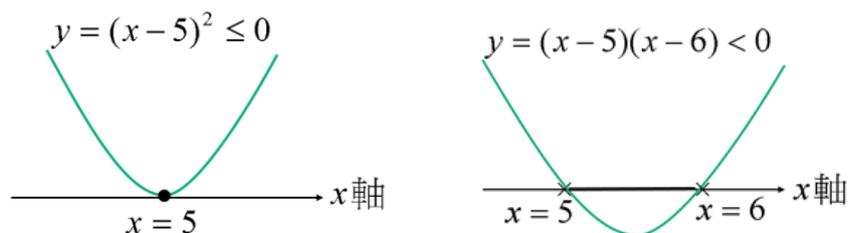


圖 2 學生在檢測「且」的問卷答題上的幾何作圖

在 $x^2 - 11x + 30 < 0$ 這個題目上，79%的學生會利用因式分解將 $x^2 - 11x + 30 < 0$ 寫為 $(x-5)(x-6) < 0$ ，其中 60%的學生會得到正確答案，但是，其中 19%的學生代數運算正確但是過程或答案有缺失。能夠得到正確答案的學生，他（她）們熟悉以下的數學性質：「兩實數 a 與 b ，滿足 $a \cdot b < 0$ ，若且唯若（if and only if） a 與 b 異號（其中一數為正，另一數為負）」，部分學生會直接將 $(x-5)(x-6) < 0$ 推論為 $5 < x < 6$ ，或者寫成 $x > 5$ 且 $x < 6$ ；部分學生則是透過二次函數的幾何作圖，得到正確答案（請見圖 2）。缺失型態主要是將 $(x-5)(x-6) < 0$ ，直接推論成「 $x-5 < 0 \Rightarrow x < 5$ 」或是「 $x-6 < 0 \Rightarrow x < 6$ 」。但是，如果學生不熟悉上述數學性質，絕大多數的學生只考慮「 $x-5 > 0$ 且 $x-6 < 0$ 」以及「 $x-5 < 0$ 且 $x-6 > 0$ 」其中一種情形。其次，有 3%的學生代數運算過程有缺失而導致錯誤解答，主要是學生將 $x^2 - 11x + 30$ 因式分解成 $(x-5)(x+6)$ 、 $(x+5)(x-6)$ 、 $(x+5)(x+6)$ 等三種錯誤的數學型式。最後，有 18%的學生完全未作答。

在 $(x^2 - 6x + 5)^2 + (x^2 - 3x + 2)^2 = 0$ 這個題目上，61%的學生會將 $x^2 - 6x + 5$ 與 $x^2 - 3x + 2$ 分別透過因式分解為 $(x-1)(x-5)$ 以及 $(x-1)(x-2)$ ，其中 47%的學生會得到正確答案，但是其中 14%的學生代數運算正確但是過程或答案有缺失。能夠得到答案的學生，他（她）們熟悉以下的數學性質：「兩實數 a 與 b ，滿足 $a^2 + b^2 = 0$ ，若且唯若 $a = 0$ 與 $b = 0$ 」，部分學生會透過上述數學性質，將原方程式推論成 $(x-1)(x-5) = 0$ 且 $(x-1)(x-2) = 0$ ，再推論為 $x-1 = 0 \Rightarrow x = 1$ ；部分學生則透過因式分解，將公因式 $(x-1)^2$ 提出，整理後得到 $(x-1)^2(2x^2 - 14x + 29) = 0$ 並且計算出 $x = 1$ 或 $x = \frac{7 \pm 3i}{2}$ ，最後得到 $x = 1$ 。其次，有 18%的學生代數運算過程有缺失而導致錯誤解答，主要缺失型態與前面不等式相同，都是因式分解上出現錯誤。最後，有 21%的學生完全未作答。

（二）學生在檢測「或」問題上的答題情形

表 5 為學生在檢測「或」的問題上各項答題類別的比率。在 $x^2 - 8x + 16 > 0$ 這個題目上，90%的學生會利用完全平方公式或因式分解將 $x^2 - 8x + 16 > 0$ 寫為 $(x-4)^2 > 0$ ，其中 47%的學生會得到正確答案，但是，其中 43%的學生代數運算正確但是過程或答案有缺失。能夠得到正確答案的學生，他（她）們熟悉以下的數學性質：「不等於 0 的實數的平方是大於 0」，部分學生能夠直接推論且書寫為「 $x \neq 4$ 」；部分學生則是寫為「 $x-4 < 0$ 或 $x-4 > 0$ 」，再推論為「 $x < 4$ 或 $x > 4$ 」；有些學生則是透過二次函數的幾何作圖，得到正確答案（請見圖 3）。但是，如果學生不熟悉上述的數學性質，絕大多數的學生會直接兩邊開根號，他（她）們會書寫為 $(x-4)^2 > 0$ ，並且直接推論出 $x-4 > 0 \Rightarrow x > 4$ 。因此， $(x-4)^2 > 0$ 可以推論成 $x \neq 4$ ，當然，亦可以寫成 $x < 4$ 或 $x > 4$ 。其次，有 6%的學生的代數運算過程有缺失而導致錯誤解答，主要的解題歷程是，學生將 $x^2 - 8x + 16$ 書寫成 $(x+4)^2$ 。最後，有 4%的學生完全未作答。

表 5
學生在檢測「或」的手寫問卷的答題類別比率

手寫問卷題目	答題類別	正確解答	正確代數運算 但過程或答案 有缺失	代數運算過程 有缺失，導致 錯誤解答	未解
$x^2 - 8x + 16 > 0$		69 (47%)	63 (43%)	9 (6%)	5 (4%)
$x^2 - 2x - 63 > 0$		61 (42%)	55 (38%)	9 (6%)	21 (14%)
$(x^2 - 6x + 5)^2 \times (x^2 - 3x + 2)^2 = 0$		40 (27%)	51 (35%)	5 (4%)	50 (34%)
答題類別的比率平均		39%	39%	5%	17%

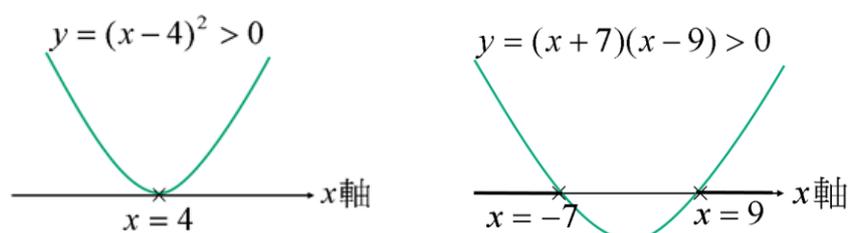


圖 3 學生在檢測「或」的問卷答題上的幾何作圖

在 $x^2 - 2x - 63 > 0$ 這個題目上，80%的學生會利用因式分解將 $x^2 - 2x - 63 > 0$ 寫為 $(x - 9)(x + 7) > 0$ ，其中 42%的學生會得到正確答案，但是，其中 38%的學生代數運算正確但是過程或答案有缺失。能夠得到正確答案的學生，他（她）們熟悉以下的數學性質：「兩實數 a 與 b ，滿足 $a \cdot b > 0$ ，若且唯若 a 與 b 同號（兩數同時為正，或兩數同時為負）」，部分學生會直接將 $(x - 9)(x + 7) > 0$ 推論為 $x < -7$ 或 $x > 9$ ；部分學生則是透過二次函數的幾何作圖，得到正確答案（請見圖 3）。缺失型態主要是將 $(x - 9)(x + 7) > 0$ ，直接推論成「 $x - 9 > 0 \Rightarrow x > 9$ 」或是「 $x + 7 > 0 \Rightarrow x > -7$ 」。其次，有 6%的學生代數運算過程有缺失而導致錯誤解答，主要是學生將 $x^2 - 2x - 63$ 因式分解成 $(x - 9)(x - 7)$ 、 $(x + 9)(x + 7)$ 、 $(x + 9)(x - 7)$ 等三種錯誤的數學型式。最後，有 14%的學生完全未作答。

在 $(x^2 - 6x + 5)^2 \times (x^2 - 3x + 2)^2 = 0$ 這個題目上，62%的學生跟上題一樣，會將透過因式分解成 $(x - 1)(x - 5)$ 以及 $(x - 1)(x - 2)$ ，其中 27%的學生會得到正確答案，但是，其中 35%的學生正確代數運算但是過程或答案有缺失。能夠得到正確答案的學生，他（她）們熟悉以下的數學性質：「兩實數 a 與 b ，滿足 $a^2 \times b^2 = 0$ ，若且唯若 $a = 0$ 或 $b = 0$ 」，部分學生會透過上述數學性質，將方程式書寫為 $(x - 1)(x - 5) = 0$ 或 $(x - 1)(x - 2) = 0$ ，再推論為 $x - 1 = 0$ 或 $x - 2 = 0$ 或 $x - 5 = 0$ ，最後得到正確答案 $x = 1$ 或 $x = 2$ 或 $x = 5$ 。其次，有 35%的學生代數運算過程有缺失而導致錯誤解答，主要缺失型態與前面的不等式和方程式相同，都是在因式分解上出現錯誤。最後，有 34%的學生完全未作答。

(三) 小結

從表 4 與表 5 中各答題類別的比率平均顯示，在正確解答這個類別，檢測「且」的比率比檢測「或」高（50% > 39%）；但是，在正確代數運算但是過程或解答有缺失這個類別中，檢測「或」的比率比檢測「且」高（39% > 26%）。另外，將上述兩個類別比率相加則顯示，學生不管在檢測「且」或者是檢測「或」都至少 76% 的學生對於檢測題目的代數運算無誤。此外，將「有缺失的代數運算過程導致錯誤解答」以及「未解」兩個類別比率相加則顯示，學生不管在檢測「且」或者是檢測「或」都至少 22% 的學生對於檢測題目的代數運算產生困難。

二、臺灣高中生在解方程式與不等式的歷程使邏輯連結詞的錯誤情形

研究者將從「正確代數運算但是過程或答案有缺失」這個類別，並且依循使用持續比較法（Glaser & Strauss, 1967），分別得到邏輯連結詞「且」和「或」的使用類別，研究者將分兩小節來討論。

(一) 解不等式與方程式的歷程中，邏輯連接詞「且」的使用情形

使用邏輯連接詞「且」可以分為三個錯誤類別：(1) 忽略邏輯連結詞「且」並且以逗號（，）取代；(2) 以「或」取代「且」；(3) 不正確地詮釋邏輯連結詞「且」。表 6 是研究者呈現出學生使用邏輯連接詞「且」三個類別的發生比率。在 $x^2 - 10x + 25 \leq 0$ 的解題歷程中，二次式 $x^2 - 10x + 25$ 可以推論為 $(x-5)^2$ 。因為平方的數學性質，不等式可以推論為 $0 \leq (x-5)^2 \leq 0$ ，亦可寫成「 $(x-5)^2 \geq 0$ 且 $(x-5)^2 \leq 0$ 」。但是，有 40% 的學生只考慮 $(x-5)^2 \leq 0$ ，並且推論為 $x-5 \leq 0 \Rightarrow x \leq 5$ ，因此，研究者將此解題歷程歸類為不正確地詮釋邏輯連結。其次，有 2% 的學生忽略邏輯連結「且」並且以逗號（，）取代，他（她）們在解題歷程中書寫「 $(x-5)^2 \leq 0$ ， $(x-5)^2 \geq 0$ 」，而且答案書寫為「 $x \leq 5$ ， $x \geq 5$ 」。最後，有 2% 的學生會以「或」取代「且」，他（她）們在解題歷程中書寫為「 $(x-5)^2 \leq 0$ 或 $(x-5)^2 \geq 0$ 」，並且達到答案為「 $x \leq 5$ 或 $x \geq 5$ 」。

表 6
邏輯連接詞「且」的使用情形

	$x^2 - 10x + 25 \leq 0$	$x^2 - 11x + 30 < 0$	$(x^2 - 6x + 5)^2 + (x^2 - 3x + 2)^2 = 0$
忽略邏輯連結「且」並且以逗號「，」取代	3 (2%)	0 (0%)	2 (1%)
以「或」取代「且」	2 (1%)	5 (3%)	13 (9%)
不正確地詮釋邏輯連結詞「且」	58 (40%)	23 (16%)	6 (4%)

在 $x^2 - 11x + 30 < 0$ 的解題歷程中，二次式 $x^2 - 11x + 30$ 可以因式分解為 $(x-5)(x-6)$ 。因為解此不等式必須同時考量「 $x-5 < 0$ 且 $x-6 > 0$ 」、「 $x-5 > 0$ 且 $x-6 < 0$ 」等兩種情形。然而，有 16% 的學生在解題時，卻只考慮其中 1 種情形，因而推論成「 $x < 6$ 、 $x < 5$ 、 $x > 6$ 、 $x > 5$ 」等四種情形。因此，將他（她）們歸類為不正確地詮釋邏輯連結詞。此外，有 3% 的學生推論為「 $x > 5$ 或 $x < 6$ 」，因此，將他（她）們歸類為以「或」取代「且」。

在 $(x^2 - 6x + 5)^2 + (x^2 - 3x + 2)^2 = 0$ 這個題目的解題歷程中，因為加號「+」與平方的數學性質，必須同時考量「 $x^2 - 6x + 5 = 0$ 且 $x^2 - 3x + 2 = 0$ 」兩種情形，才能推論出「 $(x-1)(x-5) = 0$ 且 $(x-1)(x-2) = 0$ 」，最後得到 $x-1 = 0 \Rightarrow x = 1$ 。然而，有 1% 的學生雖然最後推導出正確答案，但是，在解題歷程中，他（她）們卻忽略邏輯連結詞「且」並且以逗號「，」取代，書寫為「 $(x-1)(x-5) = 0$ ， $(x-1)(x-2) = 0$ 」。另外，有 9% 的學生則在解題歷程書寫為「 $(x-1)(x-5) = 0$ 且 $(x-1)(x-2) = 0$ 」，並且推論出錯誤答案「 $x = 1$ 或 $x = 2$ 或 $x = 5$ 」，將他（她）們歸類為以「或」取代「且」。最後，有 4% 的學生解題歷程書寫正確，但是答案卻得到「 $x = 2$ 」以及「 $x = 5$ 」等兩種錯誤情況，因此，將他（她）們歸類為不正確地詮釋邏輯連結。

（二）解不等式與方程式的歷程中，邏輯連結詞「或」的使用情形

邏輯連結詞「或」的使用可以分為五個類別：（1）忽略邏輯連結詞「或」；（2）忽略邏輯連結詞「或」並且以逗號（，）取代；（3）忽略邏輯連結詞「或」並且以頓號（、）取代；（4）以「且」取代「或」；（5）不正確地詮釋邏輯連結詞「或」。表 7 是研究者呈現出學生使用邏輯連結詞「或」三個類別的發生比率。在 $x^2 - 8x + 16 > 0$ 的解題歷程中，二次式 $x^2 - 8x + 16$ 可以推論為 $(x-4)^2$ 。因為平方的數學性質，不等式可以推論為「 $x-4 < 0$ 或 $x-4 > 0$ 」，並且得到「 $x < 4$ 或 $x > 4$ 」，亦可寫成「 $x-4 \neq 0 \Rightarrow x \neq 4$ 」。但是，有 40% 的學生只考慮 $x-4 > 0$ ，並且推論為 $x > 4$ ，因此，研究者將他（她）們的解題歷程歸類為不正確地詮釋邏輯連結。其次，有 3% 的學生忽略邏輯連結「或」並且以逗號（，）取代，他（她）們在解題歷程中書寫「 $x-4 < 0$ ， $x-4 > 0$ 」，而且答案書寫為「 $x < 4$ ， $x > 4$ 」。

表 7
邏輯連結詞「或」的使用情形

	$x^2 - 8x + 16 > 0$	$x^2 - 2x - 63 > 0$	$(x^2 - 6x + 5)^2 \times (x^2 - 3x + 2)^2 = 0$
忽略邏輯連結「或」	0 (0%)	6 (4%)	0 (0%)
忽略邏輯連結「或」並且以逗號「，」取代	4 (3%)	13 (9%)	22 (15%)
忽略邏輯連結「或」並且以頓號「、」取代	0 (0%)	4 (3%)	16 (11%)
以「且」取代「或」	0 (0%)	7 (5%)	11 (8%)
不正確地詮釋邏輯連結詞「或」	59 (40%)	25 (17%)	2 (1%)

在 $x^2 - 2x - 63 > 0$ 的解題歷程中，二次式 $x^2 - 2x - 63$ 可以因式分解為 $(x+7)(x-9)$ 。因為解此不等式必須同時考量「 $x+7 > 0$ 且 $x-9 > 0$ 」、「 $x+7 < 0$ 且 $x-9 < 0$ 」等兩種情形。然而，有 17% 的學生在解題時，卻只考慮其中 1 種情形，因而推論成「 $x < -7$ 、 $x < 9$ 、 $x > -7$ 、 $x > 9$ 」等四種子類別，因此，將他（她）們歸類為不正確地詮釋邏輯連結。此外，有 4% 的學生在書寫答案時忽略了邏輯連結詞「或」，書寫成「 $x < -7$ $x > 9$ 」。有 9% 的學生在書寫答案時，忽略邏輯連結詞「或」並且以逗號（，）取代，書寫為「 $x < -7$ ， $x > 9$ 」。有 3% 的學生在書寫答案時，忽略了邏輯連結詞「或」並且以頓號（、）取代，書寫為「 $x < -7$ 、 $x > 9$ 」。最後，有 5% 的學生將邏輯連結詞「且」取代「或」，將答案寫成「 $x < -7$ 且 $x > 9$ 」。

在 $(x^2 - 6x + 5)^2 \times (x^2 - 3x + 2)^2 = 0$ 這個題目的解題歷程中，因為乘號「 \times 」的數學性質，必須考量為「 $x^2 - 6x + 5 = 0$ 或 $x^2 - 3x + 2 = 0$ 」，接著，推論出「 $(x-1)(x-5) = 0$ 或 $(x-1)(x-2) = 0$ 」，並且得到「 $x = 1$ 或 $x = 2$ 或 $x = 5$ 」。然而，有 15% 的學生雖然最後推導出正確答案，但是在解題歷程中，他（她）們卻忽略邏輯連結詞「或」並且以逗號（，）取代，書寫為「 $(x-1)(x-5) = 0$ ， $(x-1)(x-2) = 0$ 」，有些學生將答案書寫成「 $x = 1$ ， $x = 2$ ， $x = 5$ 」。此外，有 11% 的學生與前述類似，他（她）們雖然最後推導出正確答案，但是，在解題歷程中，卻忽略邏輯連結「或」並且以頓號（、）取代，書寫為「 $(x-1)(x-5) = 0$ 、 $(x-1)(x-2) = 0$ 」，有些學生將答案書寫成「 $x = 1$ 、 $x = 2$ 、 $x = 5$ 」。另外，有 8% 的學生則在解題歷程書寫為「 $(x-1)(x-5) = 0$ 且 $(x-1)(x-2) = 0$ 」，並且推論出錯誤答案 $x = 1$ ，因此，將他（她）們歸類為以邏輯連結詞「且」取代「或」。最後，有 1% 的學生，解題歷程書寫正確，但是答案卻得到「 $x = 2$ 、 $x = 5$ 」等兩種錯誤類型，因此歸類為不正確地詮釋邏輯連結。

（三）小結

從表 6 與表 7 中使用邏輯連結詞的各類別顯示，使用「或」的錯誤情形比「且」的錯誤情形還多 2 個類別，而且各錯誤類別的分布更廣。在忽略邏輯連接詞這個類別，應該使用「或」時，學生卻忽略；然而，在使用「且」時，學生卻沒有發生「忽略」的情形。在忽略邏輯連結詞並且以逗號（，）取代這個類別，兩種連結詞「且」和「或」都有發生，而且應該使用邏輯連結詞「或」時卻被逗號（，）取代的情形比「且」高出許多。在忽略邏輯連結詞並且以頓號（、）取代這個類別，只有應該使用邏輯連結詞「或」時有發生。在「且」和「或」相互誤用的情形，兩者發生的比率相近。

三、討論

本研究探討臺灣高中學生在解方程式或不等式時使用邏輯連接詞的錯誤情形。此研究結果不同於 Mokh 等人 (2019) 得到的結果，臺灣高中學生增加了以下兩個類別：以「或」取代「且」、忽略邏輯連結詞「或」並且以頓號（、）取代（見表 6 與表 7）。這個研究結果顯示，在不是使

用英語語言系統之下，邏輯連結詞的誤用類別會有所不同。首先，關於兩個邏輯連結詞「且」與「或」相互誤用的情形。鄒哲承（2000）說明「且」與「或」相互誤用的可能原因，從選言命題 $P \vee Q$ 的兼容義來看，至少一項選言因子為真，此選言命題為真。當兩命題 P 與 Q 同時為真時， $P \vee Q$ 與連言命題 $P \wedge Q$ 的邏輯語義關係重合，此時的「且」與「或」可以互換。然而，當選言命題 $P \vee Q$ 為排斥義時，則不會出現與義重合，此時的「且」與「或」不可以互換。另外，Hertwig 等人（2008）從另一個觀點討論「且」、「或」互換的現象，他們指出「且（and）」有機會出現連言謬誤（conjunction fallacy），因為在自然語言的使用時，「且（and）」總是會被思考為兩個集合的交集。然而，根據上下文，「且（and）」有時反而應該是交集。因此，自然語言的「且（and）」表示出「或」的兼容義。此外，在蔣佳玲（2016）的研究中，她發現在不同語言系統中，邏輯連結詞會有不同的語意詮釋差異，例如，「或」在漢語中表達兼有義，英語則是用「且」，可見「或」這個詞彙在不同語言系統中所蘊含的語意其實遠比想像複雜。

Mokh 等人（2019）的研究發現，學生會忽略邏輯連結詞並且以逗號（，）取代，但是，他們卻沒有區分，學生忽略的邏輯連結詞是「且」，還是「或」。本研究不僅發現學生兩個都有可能忽略，而且忽略邏輯連結詞「或」的比率明顯地比忽略「且」的比率高，甚至，學生還會忽略邏輯連結詞「或」，並且空下一格的情形。在臺灣，常用的中文標點符號除了逗號（，）之外，還有頓號（、），本研究也發現，高中學生還會忽略邏輯連結詞「或」並且以頓號（、）取代。在中文系統下，這兩種標點符號的使用條件不同，因此，這個研究結果更加強化蔣佳玲（2016）的研究，「或」這個詞彙在中文系統中不僅蘊含語意複雜，而且還可能影響到學生在標點符號上的使用。

伍、結論與建議

一、結論

本研究探討臺灣高中學生在解方程式或不等式時使用邏輯連接詞的錯誤情形。從檢測「且」與檢測「或」兩類題目答題情形的平均比率可知，檢測「且」的比率比檢測「或」高，但是，在正確代數運算但是過程或解答有缺失這個類別中，檢測「或」的比率比檢測「且」高（39% > 26%）。在兩類檢測題目的代數運算歷程中，都至少 76% 的學生代數運算無誤的情況下，學生在書寫解題歷程以及答題時，使用邏輯連結詞「或」的錯誤類別比使用「且」的錯誤類別多。有些錯誤來自於檢測題目涉及的數學知識的理解，有些錯誤來自於「且」與「或」兩個連結詞意涵的混淆，有些錯誤來自於學生原有的中文語言經驗。不同語言經驗造成邏輯連結詞誤用的證據，來自於本研究結果與 Mokh 等人（2019）的研究結果的比對，因為臺灣高中生的中文語言經驗中有逗號（，）與頓號（、）兩種標點符號，而且，臺灣高中生不僅會忽略邏輯連結詞「或」並且以頓號（、）取代，亦會忽略邏輯連結詞「或」並且以逗號（，）取代。雖然在 Mokh

等人(2019)的研究中，他們沒有區分學生會忽略邏輯連結詞並且以逗號(,)取代時到底是忽略「且」還是「或」，但是，這都顯示出，不同語言經驗對學生使用邏輯連結詞的影響。

二、建議

Wellington 與 Osborne (2001) 認為所有科學知識都離不開語言的體現，對學生而言，每一堂科學課都是語言課，他們在學習科學知識的同時，也在學習理解科學語言所表達的意義。當然，在數學課堂也是。在數學領域中，對語言的使用要求嚴謹，不像日常生活中那樣地彈性，而且數學推論與邏輯關係的表示受到極大的規範 (Scheleppegrell, 2004)。根據本研究的發現與結論，在數學教學中，教師需要幫助學生釐清使用邏輯連接詞的時機與規範，老師與學生在溝通時，特別是在涉及邏輯推論的言語表達時，必須審慎使用它們，因為學生可能對於「且」與「或」存在誤解。甚至，如果老師使用教科書教學，學生可能在閱讀時發生邏輯語義的辨識錯誤。「且」與「或」是我們日常生活中，最經常使用的兩個邏輯連結詞 (Halliday & Hasan, 1976)，但是，它們蘊含的邏輯語義是複雜又多元。因此，教師應該在課堂中要示範這兩個邏輯連接詞的使用，使得學生能夠明白它們的使用原則。研究者建議，教師在課堂中可以輔以文氏圖或函數圖形(請見圖 2、圖 3)，幫助學生理解與使用邏輯連接詞。

在邏輯連接詞的研究部分，有的研究是以句子為單位，有的以篇章為單位。本研究是以學生書寫的解題歷程，進行句子中使用邏輯連接詞的錯誤分析。如果以句子或篇章為單位，是否可以運用填空的方式，測試學生邏輯連接詞的使用。在過去，學者 Gardner (1975) 讓學生完成句子來檢測學生連接詞的理解；Ainsworth 與 Burchan (2007) 則採用放聲思考法；Garnier (1992) 則搭配交集、聯集、數線等圖像，請學生依據敘述，選出表達的涵義，被理解為何種邏輯關係。上述的方法，都可做為未來研究設計的參考。

三、研究限制

本研究探討臺灣高中學生解一元二次方程式與不等式的歷程中邏輯連接詞的使用情形。手寫問卷題目部分由研究者自行研發，部分則參考相關文獻。每個題目的檢測目的以及可能的解題過程如何呼應本研究目的，研究者都與兩位專家仔細討論。解題類別歸類經過兩輪的一致性檢測，以提高類別的可靠性。研究參與者並非隨機選取，是經由研究者一一詢問並且取得同意才進行集體施測，因此，研究結果無法直接推論。

誌謝

感謝提供施測機會的班級導師以及任課教師們，並且，感謝這些願意配合集體施測而且付出時間與腦力的同學們。最後，感謝審查委員及編輯委員提供寶貴的修訂建議，讓本文能夠更加完整。

參考文獻

- 吳昭容、曾建銘、鄭鈴華、陳柏熹、吳宜玲 (2018)。領域特定詞彙知識的測量：三至八年級 學生數學詞彙能力。*教育研究與發展期刊*, 14(4), 1–40。doi: 10.3966/181665042018121404001
【Wu, Chao-Jung, Cheng, Chien-Ming, Cheng, Chien-Hua, Chen, Po-Hsi, & Wu, Yi-Ling (2018). The measurement of domain-specific vocabulary knowledge: The mathematical vocabulary ability of third to eighth grade students. *Journal of Educational Research and Development*, 14(4), 1–40. doi: 10.3966/181665042018121404001 (in Chinese)】
- 陳英貴 (2005)。國中三年級學生一次不等式解題策略與錯誤類型之研究 (未出版之碩士論文)。國立中山大學，高雄市。【Chen Ying-Kuei (2005). *A study of problem-solving strategies and errors in inequalities for junior high school students* (Unpublished master's thesis). National Sun Yat-sen University, Kaohsiung. (in Chinese)】
- 陳勝雄 (2005)。高一學生解一元二次不等式的主要錯誤類型及其補救教學之研究 (未出版之碩士論文)。國立臺灣師範大學，臺北市。【Chen, Sheng-Hsiung (2005). *A study of the major errors and remedial teaching when the first-grade high-school students' solving quadratic inequalities* (Unpublished master's thesis). National Normal University, Taipei. (in Chinese)】
- 陳瑞麟 (2005)。邏輯與思考。臺北市：學富文化。【Chen, Jui-Lin (2005). *Logic and thinking*. Taipei: Hsuen-Fu. (in Chinese)】
- 傅皓政 (2006)。思考的秘密。臺北市：三民書局。【Fu, Hao-Cheng (2006). *The Secret of thinking*. Taipei: San-Min. (in Chinese)】
- 黃仲義、陳世文、沈彥宏、楊文金 (2020)。臺灣學生與僑生對邏輯連接詞「或」在日常與科學情境中的語意理解。*臺東大學教育學報*, 31(1), 1–22。doi: 10.3966/102711202020063101001
【Huang, Chung-Yi, Chen, Shih-Wen, Shen, Yen-Hung, & Yang, Wen-gin (2020). Taiwanese and overseas Chinese students' semantic understanding of the logic conjunction "OR" between daily-life and scientific contexts. *NTTU Educational Research Journal*, 31(1), 1–22. doi: 10.3966/102711202020063101001 (in Chinese)】
- 鄒哲承 (2000)。關於「和」「或」互換現象的解釋。*荊州師範學院學報*, 1, 115–117。【Tsou, Che-Cheng (2000). The interpretation of interchangeable phenomenon between AND and Or. *Bulletin of Jingzhou Normal College*, 1, 115–117. (in Chinese)】
- 廖斌吟 (2017)。中小學科學教科書中「或」邏輯語義分析與生師對其語義理解的比較 (未出版之博士論文)。國立臺灣師範大學，臺北市。【Liao, Pin-Yin (2017). *A study of exploring the logical semantic meanings of "or" and students' and teachers semantic comprehension of "or" in secondary and elementary science textbooks* (Unpublished doctoral dissertation). National Normal University, Taipei. (in Chinese)】
- 蔣佳玲 (2016)。科學文本中英語「or」與漢語「或」的語意類型之比較—以《觀念物理》為例。*教育實踐與研究*, 29(2), 33–64。【Chiang, Chia-Ling (2016). A comparative analysis of the semantic meaning patterns of 'OR' in physics texts in English and Mandarin Chinese. *Journal of Educational Practice and Research*, 29(2), 33–64. (in Chinese)】
- 蔣佳玲、楊文金、廖斌吟、史偉郁 (2014)。國小科學文本「或」的邏輯語意分析。*教科書研究*, 7(1), 1–30。doi: 10.6481/JTR.201404_7(1).01
【Chiang, Chia-Ling, Yang, Wen-Gin, Liao, Pin-Yin, & Shih, Wei-Yu (2014). An analysis of the logical semantic meanings of 'or' in elementary science texts. *Journal of Textbook Research*, 7(1), 1–30. doi: 10.6481/JTR.201404_7(1).01 (in Chinese)】

- Ainsworth, S., & Burchan, S. (2007). The impact of text coherence on learning by self-explanation. *Learning and Instruction, 17*(3), 286–303. doi: 10.1016/j.learninstruc.2007.02.004
- Barker-Plummer, D., Cox, R., Dale, R., & Etchemendy, J. (2008). An empirical study of errors in translating natural language into logic. In V. Sloutsky, B. Love, & K. McRae (Eds.), *Proceedings of the 30th Annual Cognitive Science Society Conference* (pp. 505–510). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Borasi, R. (1987). Exploring mathematics through the analysis of errors. *For the learning of mathematics, 7*(3), 2–8.
- Borasi, R. (1994). Capitalizing on errors as “springboards for inquiry”: A teaching experiment. *Journal for Research in Mathematics Education, 25*(2), 166–208. doi: 10.2307/749507
- Cai, J., & Moyer, J. (2008). Developing Algebraic Thinking in Earlier Grades: Some insights from International Comparative Studies. In C. Greenes & R. Rubenstein (Eds.), *Algebra and Algebraic Thinking in School Mathematics* (70th Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics, pp.169–180). Reston, VA: NCTM.
- Crystal, D. (2006). *How language works: How babies babble, words change meaning, and languages live or die*. London, UK: Penguin Press.
- Darian, S. G. (2003). *Understanding the language of science*. Austin, TX: University of Texas Press.
- El-khateeb, M. M. A. (2016). Errors analysis of solving linear inequalities among the preparatory year students at King Saud University. *Journal of Education and Practice, 7*(12), 124–133.
- Fleiss, J. L. (1971). Measuring nominal scale agreement among many raters. *Psychological Bulletin, 76*(5), 378–382. doi: 10.1037/h0031619
- Gardner, P. L. (1975). Logical connectives in science: A preliminary report. *Research in Science Education, 5*(1), 161–175. doi: 10.1007/BF02558621
- Gardner, P. L. (1980). The identification of specific difficulties with logical connectives in science among secondary school students. *Journal of Research in Science teaching, 17*(3), 223–229. doi: 10.1002/tea.3660170306
- Gardner, P. L., Schafe, L., Thein, U. M., & Watterson, R. (1976). Logical connectives in science: Some preliminary findings. *Research in Science Education, 6*(1), 97–108. doi: 10.1007/BF02558654
- Garnier, R. P. (1992). *Understanding logical connectives: A comparative study of language influence* (Unpublished Doctoral Dissertation). Institute of Education, University of London, England.
- Glaser, B., & Strauss, A. (1967). *The discovery of grounded theory: Strategies of qualitative research*. London, UK: Weidenfeld and Nicholson.
- Halliday, M. A. K., & Hasan, R. (1976). *Cohesion in English*. London, UK: Longman.
- Halliday, M. A. K., & Martin, J. R. (1993). *Writing science: Literacy and discursive power*. London, UK: The Falmer Press. doi: 10.4324/9780203209936
- Hertwig, R., Benz, B., & Krauss, S. (2008). The conjunction fallacy and the many meanings of and. *Cognition, 108*(3), 740–753. doi: 10.1016/j.cognition.2008.06.008
- Knuth, E. J., Stephens, A. C., McNeil, N. M., & Alibali, M. W. (2006). Does understanding the equal sign matter? Evidence from solving equations. *Journal for Research in Mathematics Education, 37*(4), 297–312. doi: 10.2307/30034852
- Landis, J. R., & Koch, G. G. (1977). The measurement of observer agreement for categorical data. *Biometrics, 33*(1), 159–174. doi: 10.2307/2529310

- Li, X. (2007). *An investigation of secondary school algebra teachers' mathematical knowledge for teaching algebraic equation solving* (Unpublished Doctoral Dissertation). The University of Texas at Austin.
- Maskill, R. (1988). Logical image, natural strategies and the teaching of science. *International Journal of Science Education*, 10(5), 485–495. doi: 10.1080/0950069880100502
- Mokh, R. A., Othman, A., & Shahbari, J. A. (2019). Mistakes made by students with logical connectives when solving equations and inequalities, and how teachers assess these mistakes. *International Journal of Research in Education and Science*, 5(2), 421–428.
- Movshovitz-Hadar, N., Zaslavsky, O., & Inbar, S. (1987). An empirical classification model for errors in high school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education* 18(1), 3–14. doi: 10.2307/749532
- Murray, J.D. (1995). Logical connectives and local coherence. In R. F. Lorch & E. J. O'Brien (Eds.), *Sources of coherence in reading* (pp. 107–126). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Peng, A., & Luo, Z. (2009). A framework for examining mathematics teacher knowledge as used in error analysis. *For the Learning of Mathematics*, 29(3), 22–25.
- Poon, K. K., & Leung, C. K. (2010). Pilot study on algebra learning among junior secondary students. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 41(1), 49–62. doi: 10.1080/00207390903236434
- Radatz, H. (1979). Error analysis in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education*, 10(3), 163–172. doi: 10.2307/748804
- Radatz, H. (1980). Students' errors in the mathematical learning: A survey. *For the learning of mathematics*, 1(1), 16–20.
- Samuel, K., Mulenga, H. M., & Angel, M. (2016). An investigation into challenges faced by secondary school teachers and pupils in algebraic linear equations: A case of Mufulira District, Zambia. *Journal of Education and Practice*, 7(26), 99–106.
- Sanders, T. J., & Noordman, L.G. (2000). The role of coherence relations and their linguistic markers in text processing. *Discourse Processes* 29(1): 37–60. doi: 10.1207/S15326950dp2901_3
- Schleppegrell, M. J. (2004). *The language of schooling: A functional linguistics perspective*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum. doi: 10.4324/9781410610317
- Tidman, P., & Kahane, H. (2003). *Logic and philosophy: A modern introduction* (9th). Belmont, CA: Thomson/Wadsworth.
- Tsamir, P. & Almog, N. (2001). Students' strategies and difficulties: The case of algebraic inequalities. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 32(4), 513–524. doi: 10.1080/00207390110038277
- Wellington, J. J., & Osborne, J. F. (2001). *Language and literacy in science education*. Buckingham, UK: Open University Press.

《臺灣數學教育期刊》稿約

2013.04.03 編審委員會會議通過
2013.09.27 編審委員會會議修訂通過
2014.09.04 編審委員會會議修訂通過
2017.03.17 編審委員會會議修訂通過
2021.04.09 編審委員會會議修訂通過

壹、《臺灣數學教育期刊》(*Taiwan Journal of Mathematics Education*) (以下簡稱本刊) 是國立臺灣師範大學數學系及台灣數學教育學會共同發行之期刊，內容以出版數學教育領域相關議題的原創性論文為宗旨。

貳、本刊歡迎符合宗旨的多元型態學術論文，類型如下：

- 一、實徵論文 (research report)：透過資料收集與分析來探究理論或檢驗假設。
- 二、回顧性論文 (review article)：整合相關之實徵研究，並提出批判性或創發思考的評析。
- 三、學術瞭望 (academy observatory)：針對國內外數學教育理論、議題、新知、研究成果、實務發展、改革趨勢，進行說明、分析、評論、反思或建議。
- 四、書評 (book review)：以導讀、討論、分析、闡釋，或比較，來介紹並評論數學教育領域新出版的重要書籍。

參、撰寫文別及字數如下：

- 一、實徵性論文與回顧性論文：可以中文或英文撰寫，中文稿件字數以20,000字、英文10,000字為上限（包含論文全文、中英文摘要、圖表、附註、參考文獻、附錄等），並需經正式審查流程（請參見第捌項之說明）。
- 二、學術瞭望與書評：以中文5,000字為原則，由編輯室邀稿。不經正式審查，但需通過編輯委員會議。

肆、本刊每年發行兩期，分別於四月、十月出刊，並採電子和紙本方式發行。全年徵稿，隨到隨審。

伍、本刊所刊之文稿須為原創性的學術論文之文稿，即未曾投遞或以全論文形式刊登於其他期刊、研討會彙編或書籍。若文稿在送審後自行撤稿，或出現一稿多投、修正稿回覆逾期、侵犯著作權等違反學術倫理等情況，將依下列規則處理：

- 一、來稿一經送審，不得撤稿。因特殊理由而提出撤稿申請者，案送主編決定；非特殊理由而自行撤稿者，一年內將不再接受該作者的投稿。
- 二、若文稿被發現一稿多投、侵犯著作權或違反學術倫理等情況，除文稿隨即被拒絕刊登外，一切責任由作者自負，且本刊於三年內不接受該作者來稿，並視情節嚴重程度求償。

三、作者應於發出文稿修正通知的三週內回傳修正稿及修正回覆說明書，逾期視同撤稿。若有特殊情況請先與本刊聯絡。

陸、未經本刊同意，已發表之文章不得再於他處發表。投遞本刊之學術論文須經編審委員會送請專家學者審查通過後予以刊登，被刊登文章之著作財產權歸國立臺灣師範大學數學系及台灣數學教育學會共同擁有，文責由作者自負。投稿至《臺灣數學教育期刊》之文章，若經編輯委員推薦且經作者同意，可轉稿至《臺灣數學教師》。

柒、中文文稿格式請參考本期刊論文撰寫體例的說明或已發行之文稿，若為英文撰寫之文稿、引用英文文獻以及數學符號、公式等請參考APA第六版出版手冊。投稿時應注意下列事項：

一、填寫投稿資料

(一) 文稿基本資料。

(二) 通訊作者之姓名、服務單位、職稱、通訊地址、聯絡電話和電子郵件地址。

一位以上作者時，非通訊作者只需填寫姓名、服務單位和職稱。

(三) 任職機構及單位：請寫正式名稱，分別就每位作者寫明所屬系所或單位。

(四) 頁首短題 (running head)：中文以不超過15個字、英文以不超過40個字元為原則。

(五) 作者註 (author note)：說明與本篇研究相關的資訊。

二、除文稿正文外，還需包含中英文摘要，相關規定如下：

(一) 中文文稿的中文摘要在前，英文文稿則英文摘要在前。

(二) 中文文稿之中文摘要頁內容包括論文題目 (粗體20級字、置中)、摘要 (不分段，限500字以內) 及關鍵詞 (以五個為上限，並依筆畫順序由少到多排列)；英文摘要頁內容包括 Title (bold, 20 pt, central)、Abstract (不分段，限300字以內) 及 Keywords (字詞及順序須與中文關鍵詞相對應)。

(三) 英文文稿之英文摘要頁內容包括 Title (bold, 20 pt, central)，Abstract (不分段，限300字以內) 及 Keywords (以五個為上限，並依字母順序排列)；中文摘要頁內容包括論文題目 (粗體20級字、置中)、中文摘要 (不分段，限500字以內) 及中文關鍵詞 (字詞及順序須與英文關鍵詞相對應)。

(四) 內文格式詳見《臺灣數學教育期刊》論文撰寫體例。

三、若為修正稿，遞交修正的文稿 (上述第三點之資料) 上請以色字標示修改處，並需依審查意見逐項說明修改內容或提出答辯。

捌、本刊審查流程分為預審與正式審查兩個階段：

一、預審：不符合本刊宗旨、品質要求，或撰寫體例者，逕行退稿或退回請作者修改後再上傳。

二、正式審查：為雙向匿名審查，除基本資料表外，不得出現作者姓名或任何足以辨識作者身份之資料，包括請先省略誌謝。匿名的參考格式為：

- (一) 若本文引用作者已發表之文章，須以「(作者, 西元年)」或“(Author, Year)”；若引用作者已發表之文章不只一篇，則以「(作者, 西元年a)、(作者, 西元年b)、……」或“(Author, Year a)、(Author, Year b)、……”的中文作者姓氏筆畫順序以及外文作者姓氏字母順序排列。
- (二) 若在參考文獻中則以「作者(西元年), 期刊刊名。」或「作者(西元年), 書名。」、「作者(西元年). 編者, 書名。」或“Author (Year). *Title of Periodical.*”表示。

引用文獻中包含一位以上的投稿文章作者，其所有著作皆須遵守上述規範。

範例1：「林妙鞠、楊德清(2011)。故事融入小一弱勢學生之補救教學研究。*台灣數學教師(電子)期刊*, 25, 1-16。doi: 10.6610/ETJMT.20110301.01」一文的作者欲引用該文，文中應以「(作者, 西元年)」表示，參考文獻則以「作者(西元年)。台灣數學教師(電子)期刊。」表示。

範例2：「李源順(2009)。三階段輔導模式 - 以數學學習領域為例。收錄於鍾靜和楊志強(主編)，*優質實習輔導教師的增知賦能*(pp.141-157)。臺北市：國立臺北教育大學。」一文的作者欲引用該文，文中應以「(作者, 西元年)」表示，參考文獻則以「作者(西元年)。收錄於鍾靜和楊志強(主編)，*優質實習輔導教師的增知賦能*。」

範例3：“Chang S. L., & Lin, F. L. (2006). Investigations into an elementary school teacher's strategies of advancing children's mathematical thinking. *Taiwan Journal of Mathematics Teachers*. 5, 21-34. doi: 10.6610/ETJMT.20060301.04”的作者應以“(Author, Year)”引用該文，參考文獻則以“Author (Year). *Taiwan Journal of Mathematics Teachers.*”表示。

玖、文稿透過線上投稿系統(<http://tjme.math.ntnu.edu.tw>)方式投遞。當文稿被接受，作者需在本刊提供的著作財產權讓與同意書上簽名，以掃描檔或紙本方式寄回。作者應負論文排版完成後的校對之責。被接受刊登之文稿，作者需提供文獻之doi，以及中文參考文獻之英譯資料。被接受刊登的英文文稿，作者需自行負責檢查文稿中的用詞、語法、拼寫、含意和邏輯的正確性，編輯委員僅負責格式上之校對。

壹拾、期刊助理聯絡郵箱：TJME.taiwan@gmail.com

《臺灣數學教育期刊》研究論文撰寫體例

2013.04.03 編審委員會會議通過

2013.09.27 編審委員會會議修訂通過

2014.09.04 編審委員會會議修訂通過

2017.03.17 編審委員會會議修訂通過

本期刊原則上依循美國心理學會(American Psychological Association)的撰寫格式，中文文稿請參考下面的說明或本刊已發表的文稿，若為英文撰寫之文稿、引用英文文獻以及數學符號、公式等請參考 APA 第六版出版手冊。文稿請使用 Microsoft Word 98 以上之繁體中文文書軟體處理。除另有規定外，中文字型一律採用新細明體，英文字型一律為 Times New Roman。

壹、撰稿格式

- 一、投稿除需要附上作者基本資料表檔案外，中文稿件內容依序為中文摘要頁（含關鍵字）、英文摘要頁（含關鍵字）、正文（包括圖、表、附註、誌謝、參考文獻）以及附錄（若無必要可省略）；英文稿件之撰寫順序相同，唯中英文摘要頁位置對調。
- 二、稿件版面以單欄版面橫向印列的A4規格紙張，上下左右各留2.5公分空白，除基本資料表頁外每頁需加註頁碼。文稿字數（包含摘要、正文、圖表、附註、參考文獻、附錄等）中文以20,000字為上限，英文以10,000字為上限。
- 三、中文摘要頁內容包括論文題目（粗體20級字、置中）、摘要（不分段，限500字以內）、與關鍵字（以五個為上限，並依筆畫順序由少到多排列）。
- 四、英文摘要頁內容包括論文題目（bold, 20 pt, central），並附英文摘要（不分段，限300字以內）及英文關鍵字（字詞及順序須與中文關鍵字相對應）。
- 五、除各項標題、表之註記與另起一段之引文外，內文不分中英文均為12級字，單行行距。
- 六、除另有規定外，中文字型一律採用新細明體，標點符號及空白字為全形字；英文字型一律為Times New Roman。
 - 一、本期刊為雙向匿名審查，除基本資料表外，不得出現作者姓名或任何足以辨識作者身份之資料。匿名的參考格式為：
 - (一) 若本文引用作者已發表之文章，須以「(作者, 西元年)」或“(Author, Year)”；若引用作者已發表之文章不只一篇，則以「(作者, 西元年a)、(作者, 西元年b)、……」或“(Author, Year a)、(Author, Year b)、……”的中文作者姓氏筆畫順序以及外文作者姓氏字母順序排列。
 - (二) 若在參考文獻中則以「作者(西元年), 期刊刊名。」或「作者(西元年), 書名。」、「作者(西元年)。編者, 書名。」或“Author (Year). Title of Periodical.”

表示。

引用文獻中包含一位以上的投稿文章作者，其所有著作皆須遵守上述規範。

範例1：「林妙鞠、楊德清（2011）。故事融入小一弱勢學生之補救教學研究。

台灣數學教師(電子)期刊，25，1-16。」一文的作者欲引用該文，文中應以「（作者，西元年）」表示，參考文獻則以「作者（西元年）。台灣數學教師(電子)期刊。」表示。

範例2：「李源順（2009）。三階段輔導模式 - 以數學學習領域為例。收錄於鍾靜和楊志強（主編），優質實習輔導教師的增知賦能（pp.141-157）。臺北市：國立臺北教育大學。」一文的作者欲引用該文，文中應以「（作者，西元年）」表示，參考文獻則以「作者（西元年）。收錄於鍾靜和楊志強（主編），優質實習輔導教師的增知賦能。」

範例3：“Chang S. L., & Lin, F. L. (2006). Investigations into an elementary school teacher's strategies of advancing children's mathematical thinking. *Taiwan Journal of Mathematics Teachers*. 5, 21-34.”的作者應以“(Author, Year)”引用該文，參考文獻則以“Author (Year). *Taiwan Journal of Mathematics Teachers*.”表示。

貳、正文

一、正文原則上包括「緒論」、「文獻探討」、「方法」、「結果」、「討論」與「參考文獻」等六部分，「緒論」含研究動機與目的、假設或研究問題等內容。前述格式為原則性規定，作者可依論文性質斟酌改變。

二、標題的層次、選用次序與字體為：

壹、16級字、粗體、置中

一、14級字、粗體、靠左對齊

(一)12級字、粗體、靠左對齊

1. 12級字、粗體、靠左對齊

(1)內縮1.5字元、12級字、粗體、靠左對齊

A.內縮1.5字元、12級字、底線、靠左對齊

1. 第一級標題為「緒論」、「文獻探討」、「方法」、「結果」、「討論」與「參考文獻」等，各層次標題選用次序為：壹、一、(一)、1、(1)、A 最多以六個層次為原則。
2. 第一、二、三、四、五層次標題請使用粗體。
3. 第一層次標題使用 16 級字，第二層次標題使用 14 級字，其餘 12 級字。
4. 第一層次標題置中，其餘靠左對齊。
5. 第一、二、三層次標題為單行間距，並與前後段距離均為 1 行；第四、五、六層次標題為 12 點最小行高，並與前後段距離均為 0.5 行。
6. 第五、六層次標題內縮 1.5 字元，而第六層次標題加上底線。
7. 標題請用字簡明，勿用句號或冒號。若逢頁尾最後一行，應移至次頁首行。

三、英文統計符號須用斜體字，例如 $F(1, 53) = 10.03$, t , F , M , SD , N , r , p 等。希臘字母則不要斜體，例如： α , β , ϵ , η 。

四、資料分析結果的有效位數須全文一致。恆小於「1」的數值，例如 $KR20$, α , p 等統計數值的個位數字「0」請省略。

五、文獻資料的引用一律採取文內註釋。引用文獻時，必須有作者姓名（中文作者姓名全列，英文作者僅列姓氏）及論文年份（中文文獻及英文文獻均使用西元年份）。相同作者在同一段中重複被引用時，第一次須寫出年代，第二次以後，在不造成混淆的情況下年代可省略。若在不同段落中重複引用時，則仍須完整註明。本文中引用之文獻必須在參考文獻中列出。文獻引用格式於下：

1. 當作者為一人時，格式為作者（年代）或（作者，年代）、Author (Year)或(Author, Year)。
2. 當作者為二人時，每次引用均須列出全部作者，在行文中，以「與」連接；在括號和參考文獻中，中文以頓號「、」，西文以“&”連接。格式為作者 1 與作者 2（年代）或（作者 1、作者 2，年代）、Author 1 與 Author 2 (Year)或(Author 1 & Author 2, Year)。
3. 當作者為三至五人時，第一次引用時所有作者均須列出，第二次以後僅需寫出第一位作者並加「等」字或“et al.”。在同一段落中重複引用時，第一次須完整註明，第二次以後僅需寫出第一位作者再加「等」字或“et al.”，可省略年代。若在不同段落中重複引用，則僅需寫出第一位作者再加「等」字或“et al.”，但仍需註明年代。
4. 當作者為六人以上時，每次引用都只列第一位作者並加「等」字或“et al.”。
5. 當作者或作者之一為機構時，第一次引用應寫出機構全名，並以中括號註明慣用之簡稱，第二次之後即可使用簡稱替代，並依上述一至四點處理。例如：行政院國家科學委員會(國科會, 2011)或(行政院國家科學委員會[國科會], 2011)、National Science Council (NSC, 2011)或(National Science Council [NSC], 2011)。

6. 當文獻為翻譯作品時，以原作者為主要作者，中文翻譯的文獻須註明原著出版年代，接續註明譯者姓名與譯本出版年代，作者與譯者之人數及其引用格式的規範與一般作者相同。英文翻譯文獻則僅須註明原著出版年代和譯本之出版年代，中間以斜線區隔，不須註明譯者姓名，作者人數及其引用格式的規範與一般作者相同。例如：Skemp (1987/1995)。
7. 當西文作者同姓時，須引用全名，且採「名在前姓在後」方式書寫。例如：A. J. Bishop (1985)和 E. Bishop (1970) 都認為……。
8. 在同一括號內同時引用多位作者的文獻時，依作者姓名筆畫（英文用字母）排序；若同時有中英文作者，則先列中文作者。不同作者之間用分號分開，相同作者不同年代之文獻用逗號隔開年代。
9. 在文章中引用同一作者在同一年多的多篇著作時，應在年代後加註 a, b, c……以茲區別。
10. 當引用文獻需標出頁數時，西文單頁為“p.”、兩頁以上為“pp.”，中文則以「頁」表示。例如：（洪萬生，2006，頁 167）、(Dubinsky, 1991, p. 102)、(Heath, 1956, pp. 251-252)。
11. 當引用之觀念或陳述，來自第二手資料時，應將原始資料和第二手資料同時註明。在括號中首先列出原始作者與年代，接續中文以「引自」，西文以“as cited in”註明第二手資料之作者與年代，並說明出處頁碼。例如：（Garner, 1988，引自蘇宜芬、林清山，1992，頁 246）、Peirce (1968, as cited in Sáenz-Ludlow, 2002, p. 289)
12. 引文超過中文 80 字（西文 40 字），則須另起一段，並改為標楷體 10 級字，左右縮排 2 字元，與正文間前後空一行，且在引文前後無需用引號。例如：

Schoendfeld (1992, p.335) 有一段話可以用來討論：

數學從其創生之始就是一種社會活動，在此活動中一群訓練有素的實踐者（數學科學家）從事組型的科學——基於觀察、研究和實驗，有系統地試圖要決定一個公理化或理論化之系統中的規律的性質和原理（此為純數學），或者從實在世界物體中抽象出來之系統的模式（此為應用數學）。數學的工具是抽象、符號表徵、和符號操作。然而學會運用這些工具，其意義乃謂一個人以數學方式思考而非如一個工匠使用工具。以數學的方式思考就是：（1）形成數學觀點——珍視數學與抽象的歷程，並偏愛其應用，（2）發展此學科的工具的能力，並應用這些工具以協助我們理解結構——數學的建構意義（mathematical sense-making）。

六、圖與表格：

1. 圖下方應置中書明圖序及圖之標題；表格上方應置中書明表序及表名，圖表序號均使用阿拉伯數字，且圖表序與圖名之間空一個中文字（或 2 個英文字母）。各圖表之標題及說明宜精簡，但不宜精簡至看正文才能知此圖的訊息。
2. 表格之製作以簡明清楚、方便閱讀為原則，頂端與底端採用粗線(1.5pt)繪製，中間與兩邊不必畫線。表序須配合正文以阿拉伯數字加以編號，並書明表之標題。
3. 每一個圖表的大小以不超過一頁為原則，如超過時，須在續表之表序後加上(續)/(continued)，但無須重現標題，如：表 1 (續) 或 Table 1 (continued)。
4. 圖與表格應配合正文出現，與前後段空一行間距。圖及表格內容若有解釋的必要，可作註記。註記與圖表之左邊界切齊，列在圖、表之下方，每註另起一行，按編號順序排列。

七、誌謝與附註：

1. 誌謝應力求簡短扼要，置於正文之後。誌謝二字為 16 級字、粗體、置中。誌謝文另行起、第一行內縮 2 字元、12 級字。
2. 附註應置於參考文獻之前，每項附註均另起一行，並以阿拉伯數字編號，依順序排列。

參、參考文獻

- 一、正文中引用過之文獻，必須全部列舉在參考文獻內，且不得列出未引用之文獻，接受刊登之論文，作者應另提供中文參考文獻之英譯資料。
- 二、每個作者第一行由第一格開始寫，第二行中文內縮三個字；英文內縮六個字母。中文參考文獻先寫作者姓名（年代），再用「。」接續「篇名」，「。」後再寫「期刊名稱」或「書名」以及「頁碼」。中文參考文獻「書名」或「期刊名及卷數」以粗體表示，其餘（含期數）維持標準樣式。英文參考文獻先寫作者姓名（年代），再用「.»接續「篇名」，「.»後再寫「期刊名稱」或「書名」以及「頁碼」。英文參考文獻「書名」或「期刊名及卷數」以斜體表示，其餘（含期數）維持標準樣式。即：

作者（年代）。文章篇名。期刊刊名^{粗體}，卷^{粗體}（期^{若無則可省略}），xxx-xxx。

Author, A. A. (Year). Title of article. *Title of Periodical*^{斜體}, *volume*^{斜體} (issue^{若無則可省略}),
xxx-xxx.

- 三、各種不同形式的中英文參考文獻的格式如下：

1. 期刊

中文格式：作者（年代）。文章篇名。期刊刊名，卷（期），xxx-xxx。

英文格式：Author, A. A. (Year). Title of article. *Title of Periodical*, volume(issue),

xxx-xxx.

2. 書籍

中文格式：作者（年代）。書名（版次若有須註記）。出版地：出版者。

英文格式：Author, A. A. (Year). *Title of book* (Edition). Location: Publisher.

3. 編輯著作：中文編輯著作以編者之姓名起始，其後以「編」、「編著」等標示其著作方式，以資區別。英文編輯著作以編者之姓氏起始，其後則為編者名字的縮寫，再加上“Ed.”、“Eds.”、或“Comp.”，以資區別其著作方式。

中文格式：編者編（年代）。書名（冊次若無則可省略）。出版地：出版者。

英文格式：Editor, A. A. (Ed.). (Year). *Title* (Volume若無則可省略). Location: Publisher.

4. 翻譯作品

中文格式：原作者（譯本出版年）。翻譯書名（譯者譯）。出版地：出版者。
（原作出版於xxxx年）

英文格式：Author, A. A. (Year). *Title* (B. B. Translator, Trans.). Location: Publisher.
(Original work published Year).

5. 書中的文章

中文格式：作者（年代）。文章名稱。收錄於編著姓名（編著），書名（冊次若無則可省略，頁xx-xx）。出版地：出版者。

英文格式：Author, A. A. (Year). Title of article. In B. B. Editor (Ed.), *Title of Book* (Edition若無則可省略, pp. xx-xx). Location: Publisher.

6. 研究計畫報告：若引述的報告是取自 ERIC (the Educational Resources Information Center)或 NTIS (the National Technical Information Service)，則在最後須以括號註明 ERIC 或 NTIS 的編號。

中文格式：作者（年代）。報告名稱（報告編號若無則可省略）。出版地：出版者。

英文格式：Author, A. A. (Year). *Title of report* (Report No.若無則可省略). Location: Publisher.

7. 研討會發表之論文（未出版）

中文格式：作者（年，月）。論文標題。發表於會議名稱。會議地點：舉辦單位若無則可省略。

英文格式：Author, A. A. (Year, month). *Title of paper*. Paper presented at the Title of the Symposium. Location, Country.

8. 未出版之學位論文

中文格式：作者（年代）。論文名稱。未出版之博／碩士論文，學校暨研究所名稱，大學所在地。

英文格式：Author, A. A. (Year). *Title of doctoral dissertation/master thesis*. Unpublished doctoral dissertation/master thesis, Name of

University, Location.

9. 網路資源

中文格式：作者若無則可省略（年月日若無則可省略）。網頁標題。檢自URL。

英文格式：Author, A. A. (Year, month day若無則可省略). *Title of webpage*. Retrieved from URL.

《臺灣數學教育期刊》投稿基本資料表

篇名	(中文)		
	(英文)		
總字數	稿件全文 (含中英文摘要、正文、參考文獻、附錄等) 共_____字。		
關鍵詞 <small>(最多五個)</small>	(中文)		
	(英文)		
頁首短題 <small>(running head)</small>	(請以不超過15個中文字或40個英文字元為原則。)		
通訊作者資料	姓名	(中文)	(英文)
	職稱		
	服務單位 <small>(或就讀校系)</small>	(中文)	(英文)
	E-mail		
	通訊地址		
	電話	辦公室：()	分機
		行動電話：	
<small>如為共同著作，請詳填以下共同著作人欄位，非共同著作則不需填寫。(以下欄位不敷填寫時請自行增加)</small>			
共同著作人	姓名	服務單位 <small>(或就讀校系)</small>	職稱
第一作者 <small>(<input type="checkbox"/>通訊作者)</small>	(中文)	(中文)	
	(英文)	(英文)	
第二作者 <small>(<input type="checkbox"/>通訊作者)</small>	(中文)	(中文)	
	(英文)	(英文)	
第三作者 <small>(<input type="checkbox"/>通訊作者)</small>	(中文)	(中文)	
	(英文)	(英文)	
作者註 <small>(可複選)</small>	<input type="checkbox"/> 本篇論文為碩、博士論文改寫，指導教授為_____。 <input type="checkbox"/> 本篇論文曾於_____發表。 <input type="checkbox"/> 本篇論文獲國科會補助，計劃編號：_____。		
1.茲保證本論文符合研究倫理。 2.茲保證所填基本資料正確，文稿未曾以任何方式出版或發行，且無一稿多投、違反學術倫理，或違反著作權相關法令等事情。 3.茲瞭解並同意貴刊著作權授權規範，並保證有權依此規範進行相關授權。 4.茲保證文稿已經所有作者同意投稿至《臺灣數學教育期刊》。			
填表人：_____		填表日期：_____年_____月_____日	

《臺灣數學教育期刊》著作財產權讓與同意書

茲同意投稿至國立臺灣師範大學數學系與台灣數學教育學會共同發行的《臺灣數學教育期刊》之一文，名稱為：

立書人聲明及保證本著作為從未出版之原創性著作，所引用之文字、圖表及照片均符合著作權法及相關學術倫理規範，如果本著作之內容有使用他人以具有著作權之資料，皆已獲得著作權所有者之（書面）同意，並於本著作中註明其來源出處。著作人並擔保本著作未含有毀謗或不法之內容，且絕未侵害他人之智慧財產權，並同意無償授權國立臺灣師範大學數學系與台灣數學教育學會於本著作通過審查後，以論文集、期刊、網路電子資料庫等各種不同方法形式，不限地域、時間、次數及內容利用本著作，並得進行格式之變更，且得將本著作透過各種公開傳輸方式供公眾檢索、瀏覽、下載、傳輸及列印等各項服務。國立臺灣師範大學數學系與台灣數學教育學會並得再授權他人行使上述發行之權利。惟著作人保有下列之權利：

- 1.本著作相關之商標權及專利權。
- 2.本著作之全部或部份著作人教學用之重製權。
- 3.出版後，本著作之全部或部份用於著作人之書中或論文集中之使用權。
- 4.本著作用於著作人受僱機關內部分送之重製權或推銷用之使用權。
- 5.本著作及其所含資料之公開口述權。

著作人同意上述任何情形下之重製品應註明著作財產權所屬，以及引自《臺灣數學教育期刊》。

如果本著作為二人以上之共同著作，下列簽署之著作人已通知其他共同著作人本同意書之條款，並經各共同著作人全體同意，且獲得授權代為簽署本同意書。如果本著作係著作人於受僱期間為雇用機構所作，而著作權為讓機構所有，則該機構亦同意上述條款，並在下面簽署。

本著作之著作財產權係屬（請勾選一項）

- 著作人所有
 著作人之僱用機構所有

立同意書人（著作人或僱用機構代表人）簽章：_____

著作人姓名或僱用機構名稱：_____

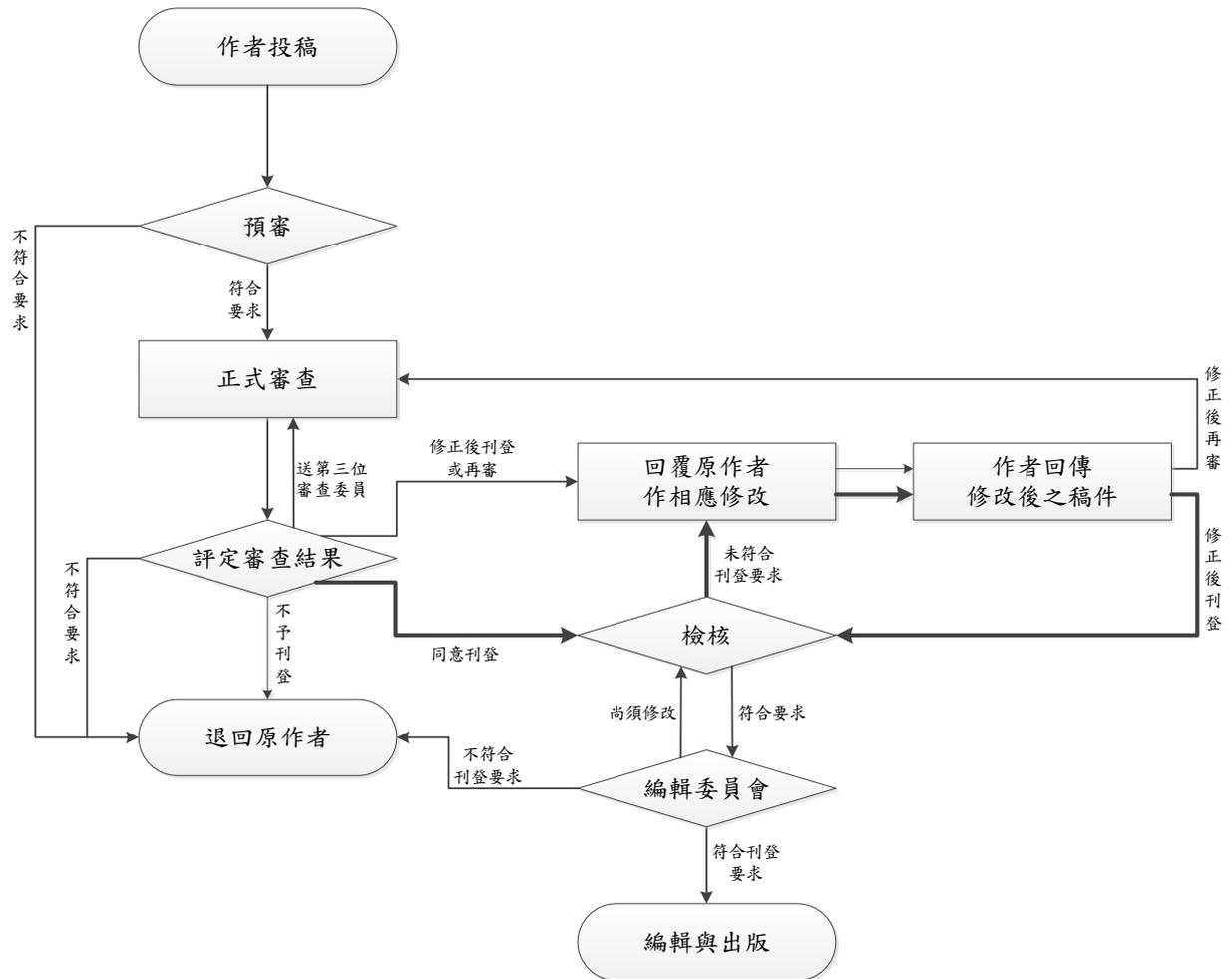
（正楷書寫）

中華民國 年 月 日

《臺灣數學教育期刊》編審辦法

2013.04.03 編審委員會會議通過

- 壹、《臺灣數學教育期刊》（以下簡稱本刊）之審查包括預審、正式審查兩個階段：
- 一、預審：檢視來稿是否符合本刊稿約之宗旨、論文品質以及進行論文格式之審查；
 - 二、正式審查：審查委員與投稿者採雙向匿名方式進行。主編就審查委員的回覆意見及論文品質決定接受或拒絕文稿，或是需要作者修改後再進行審查或檢核。需要「修正後再審」之稿件，交原審查委員或委由主編委任進行再審。所有文稿最後須經編輯委員會審查通過後，方能刊出。
稿件之最終審查決定以投稿後六個月內完成並通知作者。
- 貳、審查委員針對稿件之學術原創性、正確性及價值等條件從嚴審查，以確保所刊文稿的品質。審查委員可提供作者具建設性的修改建議，以利文稿的修正及品質提昇，並以下列其中一種的刊登建議回覆：
- 一、「同意刊登」：論文不需要修改可作原稿刊登。
 - 二、「修正後刊登」：通知作者依審查意見修改或答辯後刊登。
 - 三、「修正後再審」：要求作者依審查意見修改或答辯，修正稿由編輯委員會送原審查委員或委由主編委任進行再審。
 - 四、「不宜刊登」：通知作者退稿。
- 稿件審查的時間以三週為限，若超過期限，編輯委員會將去函提醒審查委員儘速審查，若逾六週審查者仍未寄回審查意見，則編輯委員會得再聘請另一位審查者取代之。每位審查者皆為無償審查，但會在每年第二期期刊中列名致謝。
- 參、本刊主編、副主編或編輯委員如投稿本刊，該委員應迴避推薦審查委員名單、參與審查結果決定之討論或經手處理與個人稿件有關的資料(包括審稿者資料、推薦審查委員名單、審稿意見等)。
- 肆、本刊預計每年四月和十月出版，稿件刊登順序由主編原則上依文稿性質與投稿時間之先後次序決定之，而第一作者的文稿以一篇為限，超過篇數之稿件留至下期刊登。
- 伍、本刊稿件之編審流程如下圖所示：



Publisher | Department of Mathematics, National Taiwan Normal University
Taiwan Association for Mathematics Education

Editorial Board

Chief Editor	Wu, Chao-Jung	Department of Educational Psychology and Counseling, National Taiwan Normal University
Vice Chief Editor	Liu, Po-Hung	Fundamental Education Center, National Chin-Yi University of Technology
	Yang, Kai-Lin	Department of Mathematics, National Taiwan Normal University
Editorial Panel	Chen, Jhih-Cheng	Department of Applied Mathematics, National University of Tainan
	Hsieh, Feng-Jui	Department of Mathematics, National Taiwan Normal University
	Hsu, Hui-Yu	Graduate Institute of Mathematics and Science Education, National Tsing Hua University
	Huang, Hsin-Mei	Department of Learning and Materials Design, University of Taipei
	Lee, Yuan-Shun	Department of Mathematics, University of Taipei
	Liu, Man-Li	Department of Science Communication, National Pingtung University of Education
	Liu, Yuan-Chen	Department of Computer Science, National Taipei University of Education
	Tam, Hak-Ping	Graduate Institute of Science Education, National Taiwan Normal University
	Yang, Chih-Chien	Graduate Institute of Educational Information and Measurement, National Taichung University of Education
	Yang, Der-Ching	Graduate Institute of Mathematics and Science Education, National Chiayi University
	Yuan, Yuan	Department of Mathematics Education, National Taichung University of Education
International Editorial Panel	Lo, Jane-Jane	Department of Mathematics, Western Michigan University
	Seah, Wee-Tiong	Mathematics Education, Melbourne Graduate School of Education, University of Melbourne
	Toh, Tin-Lam	Mathematics & Mathematics Education Academic Group, National Institute of Education, Singapore

Address | No.88 Sec. 4, Ting-Chou Rd., Taipei City, Taiwan, R.O.C.
Department of Mathematics, National Taiwan Normal University
"Taiwan Journal of Mathematics Education"

TEL | 886-2-7749-3678

FAX | 886-2-2933-2342

E-mail | TJME.taiwan@gmail.com

Website | <http://tjme.math.ntnu.edu.tw/contents/contents/contents.asp?id=21>

1 三歲幼兒基本幾何圖形的辨識發展
／賴孟龍、張晉璋、黃依苓、簡琬融、洪愷翎

Three-Year-Old Children's Development of Basic Geometric Shape Recognition
／ Meng-Lung Lai, Chin-Wei Chang, Yi-Ling Huang, Wan-Jung Chien, Kai-Ling Hung

27 探討臺灣高中生使用邏輯連接詞的錯誤：以解一元二次方程式與不等式為例
／卓益安、陳世文、楊文金、廖斌吟

Taiwanese High-School Students' Mistakes in the Use of Logical Connectives when Solving Quadratic Equations and Inequalities
／ Yi-An Cho, Shih-Wen Chen, Wen-Jin Yang, Pin-Yin Liao

