

ISSN: 2312-5810
DOI: 10.6278/tjme

第 10 卷 第 1 期
二〇二三年四月
VOL. 10 NO. 1
April 2023

臺灣數學教育期刊

Taiwan Journal of Mathematics Education



國立臺灣師範大學數學系
Department of Mathematics,
National Taiwan Normal University



台灣數學教育學會
Taiwan Association
for Mathematics Education

發行單位 | 國立臺灣師範大學數學系
台灣數學教育學會

編輯委員會

主編	吳昭容	國立臺灣師範大學教育心理與輔導學系
副主編	楊凱琳	國立臺灣師範大學數學系
	劉柏宏	國立勤益科技大學基礎通識教育中心
編輯委員	李源順	臺北市立大學數學系
(依姓氏筆劃排序)	袁媛	國立臺中教育大學數學教育學系
	許慧玉	國立清華大學數理教育研究所
	陳致澄	國立臺南大學應用數學系
	黃幸美	臺北市立大學學習與媒材設計學系
	楊志堅	國立臺中教育大學教育資訊與測驗統計研究所
	楊德清	國立嘉義大學教育學系數理教育碩士班
	熊同鑫	國立臺東大學幼兒教育學系
	劉曼麗	國立屏東大學科學傳播學系
	劉遠楨	國立臺北教育大學資訊科學系
	謝豐瑞	國立臺灣師範大學數學系
	譚克平	國立臺灣師範大學科學教育研究所
國際編輯委員	余偉忠	澳洲墨爾本大學墨爾本教育研究院
	卓鎮南	新加坡南洋理工大學國立教育學院
	羅珍珍	美國西密西根大學數學系

地址	臺北市汀州路四段 88 號國立臺灣師範大學數學系 《臺灣數學教育期刊》
電話	886-2-7749-3678
傳真	886-2-2933-2342
電子郵件	TJME.taiwan@gmail.com
網址	http://tjme.math.ntnu.edu.tw/contents/contents/contents.asp?id=21

主編的話

《臺灣數學教育期刊》已邁入第十年。這十年來，承蒙學者們提供大作，也感謝很多專家願意無償審查，協助本刊朝向為臺灣數學教育社群創建具指標性的發表平台前進。為了扶植一個好的數學教育本土期刊，國科會數教學門召集人劉柏宏教授不僅於 2022 年學門成果發表會上推薦本刊，其後更以 email 鼓勵數教學門計畫申請者投稿本刊。期望有更多的學者能分享您的研究心血，促進數教學界的交流與成長。

本刊第 10 卷第 1 期刊登三篇文章，依序為蘇意雯教授的國中數學史數位閱讀文本之開發研究、曾敏與陳國龍教授探討學障國中生運用繪圖計算機學習二次函數的成效，以及吳珮蓁與謝豐瑞教授分析大學經濟學課本的圖形表徵與高中數學呈現方式的落差。三篇論文不只主題不同，研究方法也各異，提供了數學教育研究法的豐富面貌。

第一篇採用行動研究法。研究團隊依據 ADDIE 教學設計模式開發數位化的數學史閱讀文本，以使學生能感受數學的文化魅力和人文價值。研究結果呈現了分析、設計、發展、實施、評鑑五階段的歷程與結果，提供頗具參考價值的歷程性報導。尤其實施與評鑑階段進行三個循環的實驗教學與實徵資料的收集，透過學生與教師的反饋加以改良，增進教材與教學設計能落實教學現場的可能性。

第二篇採用單一受試研究法。基於繪圖計算機能提供函數圖、促進學生對函數的概念理解，研究者選用版面簡潔的線上繪圖計算機 Desmos 融入二次函數單元。兩名學習障礙的八年級學生在經歷此一融入 Desmos 的二次函數課程前後有顯著的學習成效，且具保留效果，同時學生也對 Desmos 表達正向的態度。

第三篇採用內容分析法。本文的發想非常有趣——函數圖表徵的中學數學學習經驗能否銜接大學經濟學的學習？此一提問可以衍生出各種類似的跨學習階段或跨學科之間表徵學習的連貫性問題，是深具啟發性的研究問題。要回應這個研究問題其實可以有各種研究方法，而本文採用教科書圖形表徵的內容分析；且難得地，本文提出了四種表徵類型的分析架構，讓內容分析可以不落範例的零碎描述，而能有一個較上層之理論框架。

《臺灣數學教育期刊》主編

吳昭晨 謹誌

臺灣數學教育期刊

第 10 卷 第 1 期

2014 年 4 月創刊

2023 年 4 月出刊

目錄

- | | |
|---|----|
| 國中數學史數位閱讀文本之開發初探
／蘇意雯 | 1 |
| 線上繪圖計算機 Desmos 融入國中學習障礙學生二次函數教學
之成效研究
／曾敏、陳國龍 | 29 |
| 高中數學與大學經濟學課本之間的供需落差—以圖形表徵為例
／吳珮蓁、謝豐瑞 | 57 |

Taiwan Journal of Mathematics Education

Vol. 10 No. 1

First Issue: April 2014

Current Issue: April 2023

CONTENTS

- Initial Investigation into Developing Digital Reading Texts on the History of Mathematics for Junior High Schools 1
/ Yi-Wen Su
- Use of Online Desmos Graphing Calculator to Improving the Quadratic Function Learning Outcomes Among Junior High School Students With Learning Disabilities 29
/ Min Tseng, Kuo-Long Chen
- The Gap Between the Demand for Understanding Introductory Economics Textbooks and the Supply of High School Mathematics— Use Graph Representations as Examples 57
/ Pei-Chen Wu, Feng-Jui Hsieh

蘇意雯 (2023)。
國中數學史數位閱讀文本之開發初探。
臺灣數學教育期刊，10 (1)，1-28。
doi: 10.6278/tjme.202304_10(1).001

國中數學史數位閱讀文本之開發初探

蘇意雯

臺北市立大學數學系

本研究主要探討如何開發國中數學史數位閱讀文本，以行動研究法執行。研究者藉由行動反思，調整數學史數位閱讀文本內容，並延請專家逐次諮詢，開發出國中數學史數位閱讀文本－《詩情中的數學》。研究發現，依循 ADDIE 模式，歷經分析、設計、發展、實施及評鑑各階段，以本研究成果為例，考量敘事方式布置數學詩，經過內容的編修、互動功能的補強，以及情境的增添等行動循環，讓數學與文學連結，此種取向可以做為開發國中數學史數位閱讀文本的可行進路。網路順暢度、硬體方面的書寫配備、閱讀活動與課程進度的符應及學生填寫匿名問卷的配合度等問題，是研究者日後應思考改進之處。

關鍵字：ADDIE 模式、數位閱讀、數學史、數學詩

通訊作者：蘇意雯，e-mail：yiwen@uTaipei.edu.tw
收稿：2021 年 11 月 8 日；
接受刊登：2022 年 10 月 3 日。

Su, Y. W. (2023).

An initial investigation into developing digital reading texts on the history of mathematics for junior high schools.

Taiwan Journal of Mathematics Education, 10(1), 1–28.

doi: 10.6278/tjme.202304_10(1).001

An Initial Investigation into Developing Digital Reading Texts on the History of Mathematics for Junior High Schools

Yi-Wen Su

Department of Mathematics, University of Taipei

This action research aimed to develop a digital reading text of the history of mathematics for junior high schools. The researcher adjusted the content of the digital reading text of the history of mathematics through action reflection and invited experts to consult successively to develop the digital reading text of the history of mathematics for the junior high school course, "Mathematics in Poetry." The results indicated that, following the ADDIE model—going through the stages of analysis, design, development, implementation, and evaluation—and taking the results of this research as an example, the narrative method can be employed to arrange mathematical poems and link mathematics with literature. After three action cycles are completed, i.e., the revision of the content, reinforcing the interactive function, and adding the situation, this approach can be used as a possible method to develop the digital reading text for the history of mathematics for the junior high school level. Future researchers should consider and improve the quality of the internet connection, the availability of hardware-writing equipment, the alignment of reading activities with course progress, and the degree of cooperation of students in filling out anonymous questionnaires.

Keyword: ADDIE model, digital reading, history of mathematics, mathematical poems

Corresponding author : Yi-Wen Su · e-mail : yiwen@uTaipei.edu.tw

Received : 8 November 2021;

Accepted : 3 October 2022.

壹、前言

國際教育成就評鑑學會(International Association for the Evaluation of Educational Achievement [IEA])自2001年起,每五年舉辦一次促進國際閱讀素養研究(Progress in International Reading Literacy Study [PIRLS]),評量四年級學生的閱讀能力。PIRLS 2016的評量,除了維持紙本閱讀素養測驗,首次加進數位閱讀素養(extension of PIRLS [ePIRLS])評量,臺灣在全球50個國家地區中排名第8名、ePIRLS則在全球14個國家地區中排名第7名,從中可看出,臺灣孩子的紙本閱讀成績位居前段班,但數位閱讀成績則在中段,而且臺灣學生紙本和數位閱讀成績落差相當大,經由上述臺灣參與國際閱讀評量的結果,可得知數位閱讀的推動已是當務之急(柯華葳等人,2017)。針對15歲學生所舉辦的國際學生能力評量計畫(Programme for International Student Assessment [PISA]),臺灣在PISA 2018所有79個國家/經濟體中,數位閱讀素養評量排名第17名。由於科技的快速發展及其影響力的日益提升,閱讀的性質產生顯著變化,閱讀不僅止於印刷紙本,還涉及大量的數位閱讀型態。教育部也決定將積極透過「提升國民中小學學生閱讀素養實施計畫」,發展自主閱讀學習的課程教學模式、提升教師閱讀素養教學專業、設置自主閱讀空間,並強化偏遠地區閱讀資源及增加閱讀教師,以增進國中小學生閱讀素養(洪碧霞,2021;教育部,2019)。

數位閱讀是學生學習閱讀的重要管道之一,英國、芬蘭、香港、俄羅斯、新加坡、美國等國家都重視發展線上閱讀能力的課程,臺灣教師至少一週一次在閱讀課堂使用電腦進行各種教學活動的比例偏低也是影響數位閱讀成績的相關因素(柯華葳等人,2017)。網際網路的興起帶來了通信變化,極大地改變人們相互聯繫的方式,行動科技的發展也為數學教學帶來了新的可能性。使用網際網路的行動設備具有便攜性、可用性以及被年輕人廣泛接受等特點,使得行動設備成為能夠將數學教學和學習領域擴展到課堂之外的新興媒介。可大量存儲數位資訊的數位典藏庫的出現,也使得與傳統印刷素材不同的組織學習內容的方式應運而生(Borba et al., 2016)。與傳統教科書相比,數位數學教科書最普遍的特點之一是對於學生的解決方案提供自動化回饋(Rezat, 2021),數位閱讀文本也可讓教師從系統後臺看到更多學生的學習歷程(蘇意雯,2020),因此數位化的閱讀方式,正有其必要性。

九年一貫數學課綱提到「教師教學裡,引進與主題相關的數學史題材,對學童的學習會有很正面的意義,尤其能協助學童將抽象觀念具體化。」(教育部,2008),十二年國教數學課綱的基本理念也提及數學是一種人文素養,宜培養學生的文化美感:「適時地在數學教學之中融入適當的數學史內容,可以提升數學教學品質與學生的學習成效。」(教育部,2018)。研究者藉由教學實作,發現閱讀融入數學史素材的幾何文本,能幫助學生對於數學主題之理解(蘇意雯等人,2015)。在強調終身學習的時代中,學校閱讀推廣策略可包含數位閱讀的應用與學習(林珊如,2010)。針對國小數學史電子繪本的開發,除了故事的陳述,還需要及時地與閱讀者互動,以及

關注資訊量的提供及學生的認知負荷，讓國小學生覺得有趣易懂（蘇意雯，2020），國中學生的數學數位閱讀文本的開發亦是同樣重要。為了讓閱讀素材更為多樣性，也呼應教育部積極提升學子數位閱讀素養的要求，本研究嘗試開發《詩情中的數學》數學史數位閱讀文本，希望能豐富國中生的數學數位閱讀素材，體驗數學與文學的連結，以培養其欣賞數學知識美感的涵養。

Baki 與 Çakıroğlu（2010）在高中數學課堂上使用改進的 ADDIE（Analysis, Design, Development, Implement, Evaluation）模式開發了與高中數學課程相關的數位典藏庫，從參與研究的教師和學生處所獲得的定性和定量數據分析表明，學生的態度和活動參與普遍是正向的，而教師也有正向的看法。應用 ADDIE 於教學設計，可以藉由對於脈絡內以及脈絡間等多重情境的系統化回應，紓緩學習環境的複雜性（Branch, 2009）。此教學設計模式可以運用於線上教學課程的設計（Summerville, 2002），也是本研究採用的模式。

承上所述，本研究之目的為「探究如何開發適合國中生使用之數學史數位閱讀文本」，而研究問題為：

- 一、如何透過 ADDIE 開發數學史數位閱讀文本？
- 二、數學史數位閱讀文本閱讀實施時應著重之面向為何？

貳、文獻探討

以下的篇幅，將分別從數學史與數學教學、數學敘事與閱讀，以及數位閱讀等相關研究做文獻探討。

一、數學史與數學教學

數學史對於數學學習的重要性歷年來已引起諸多不同觀點的討論。自 1970 年代以來，數學教育學界就開始關注如何在數學教學上輔以歷史取向，數學史與數學教學的關聯之國際研究群（International Study Group on the Relations between the History and Pedagogy of Mathematics [HPM]），每四年固定召開一次全球性的會議，致力於推動數學史與數學教學之關聯。HPM 是數學史學對數學教育的一種應用，目的是利用數學史的研究成果，以及藉由數學史與數學教育的互動，進而提升數學教師的教學品質與學生的學習成效（洪萬生，1998）。數學史反思與課程單元知識連結的意義，一直都是 HPM 實踐者應所關注的議題（洪萬生，2022）。對於中小學學習，把歷史維度融入數學課程的原因很多，例如激發學生在數學上的興趣、讓我們對於概念和理論有更好的瞭解、多元文化的珍視、幫助數學學習等（洪萬生，1984；蕭文強，1992；Barbin et al., 2002; Fauvel, 1991; Furinghetti & Paola, 2003; Gulikers & Blom, 2001; Tzanakis & Arcavi, 2000）。在提升學生國民素養的方式上，也應給予學生機會嘗試感受數學的創造歷程。在教學中融入數學文化素材的方法，可以提升學生的學習興趣，豐富學生對數學的認識，感受數學在人類歷史

上的貢獻，及其文化魅力和人文價值（李國偉等人，2013）。數學史可以被考慮為設計更高認知層次課程的有效工具，讓教師能夠說明與例程序相關的基本概念之發展。藉由歷史脈絡的呈現，教師創造了展示在行動中的數學的可能性。當一項數學任務不僅止於複製活動，而是更多地作為一種創造性過程和有意義的活動來處理時，需求的認知層次就更高了，在這方面，數學史可以被視為數學教師的靈感來源，使他們的課程對學生更有意義以及更高的認知要求（Agterberg et al., 2022）。

Lim 與 Chapman（2015）使用準實驗研究法，探究使用歷史作為數學教學工具對新加坡 11 年級學生數學成績，以及三個情感領域（態度，焦慮和動機）的影響。實驗組有 51 位學生，對照組有 52 位學生。研究結果顯示，在數學教室中融入數學史對學生的學習成就有顯著的短期和長期影響，而在情感領域具有短期的正面影響。至於有關幾何文本閱讀理解的研究（蘇意雯等人，2015），針對國民中學八年級實驗組學生 33 人和控制組學生 28 人，藉由主題為「平行與截線性質」之幾何文本教學實作，發現閱讀融入數學史素材的幾何文本，能幫助學生對於數學主題之理解，在統整與解釋面向，實驗組學生與控制組學生有顯著差異。至於在小學部份，也有師資培育者與國小教師共同從事面積主題數學史敘事文本的撰寫，及相關教學活動的設計，研發適合低學習成就學生之數學史敘事文本。教學實作的結果表明，面積主題的數學史敘事文本的閱讀，可以改善低學習成就學生對數學的看法並提升他們對於圖形面積的掌握（蘇意雯、林美媛，2016）。

有關教學現場如何將數學史融入數學教學，在中學階段多使用學習工作單的形式，但是小學現場的實施就比較多元。例如可以用說故事口語講述方式實施，以及用學習工作單方式實施，或者是用數學史動畫輔以學習工作單方式實施。所融入之主題也包括了「體積與容積」、「圖形的面積」、「分數乘除法」、「時間的應用」、「擴分與約分」、「通分與分數的加減」、「位值概念」、「測量」、「比例」、「容量」、「長度」、「命數系統」、「圓」、「因數與倍數」等等單元（蘇意雯，2011）。舉例來說，設計「因數與倍數」數學史動畫及相關學習工作單，於課堂進行實作。實驗組 26 人接受數學史融入的數學教學，控制組 26 人接受無數學史融入的教學。研究資料經過統計分析後，就顯示出數學史融入數學教學的實施能有效提升學生的學習態度（沈志龍、蘇意雯，2009）。

承上所述，我們發現數學史融入數學教學，可以豐富學生的數學學習，如此，妥適整理組織數學史教學素材就相當重要。接下來的篇幅，研究者將對數學敘事與閱讀相關文獻做一討論。

二、數學敘事與閱讀

要如何愛上數學呢？D'Agostino（2018）參考心理學家 Arthur Aron 所提出讓參與者墜入愛河的 36 個問題，提供此 36 個問題的數學版本，讓讀者突破個人的數學敘事經驗並促進與數學的親密關係。其中第五個問題是「考慮歷史上與數學相關的人物，您會想邀誰共進晚餐？」，接

著列舉了 8 個人物的簡短介紹做為參考選項，例如享負盛名的 Archimedes、英年早逝的 Evariste Galois、傑出女數學家 Emmy Noether、印度天才數學家 Srinivasa Ramanujan 等，讓閱聽人藉由閱讀，認識數學家並發表自己的想法。在現代的教育文化脈絡中，數學故事的讀、說、寫，無論其活動順序如何調整，都離不開數學普及敘事（洪萬生，2022）。如何利用有趣的文本設計，讓閱聽人跟著作者所安排的脈絡進入數學的世界，這正是研究者在數學史閱讀文本的開發中應多所關注之處。

美國敘事學家查特曼認為語文、音樂、畫面等用於交流的各種媒介，都是敘事的實質表達（Chatman, 1975）。好的數學概念，可用之證明某些論證，一則好的故事，則具有不同方式的啟發力量（Thomas, 2002）。如果能連結兩者，應該能對數學普及的推廣有所幫助。有些學者關注到數學與敘事的關係（林芳玫、洪萬生，2009；Gerofsky, 1996; Solomon & O'Neill, 1998），他們認為如何解題或推理可以類比於小說中的如何敘事，並認為數學思維和故事之間可以有很重要的連結，也希望能以故事方式呈現數學思維的發展。數學學習與語文閱讀若可以連成一氣，數學思維也就可以成為一般思維中的精華（洪萬生，2013）。對比於「課程優先」進路，「敘事優先」進路包含了豐富的敘事文本，並藉由受歡迎的故事布置解題任務，最後再回顧與課程的連繫，「敘事優先」進路可以增加國小學生及教師的參與，以及提昇數學的深度與廣度（Russo & Russo, 2018）。數學與敘事的特性，也是臺灣 HPM 實踐進路的最新轉變（蘇惠玉，2019）。

數學小說可以用作一種資源，以一種在傳統數學課程中難以複製的方式教育人們認識數學，以小說作品為主要文本，可讓學生欣賞數學的美麗、力量和意義（Kasman, 2003）。數學小說（含電影、舞台劇、漫畫及繪本等）所蘊含的（文學）敘事，能引發學生的數學學習興趣，這是一個新興的文類，它既是一種文學範疇中的小說，也可歸屬於數學普及書寫。在數學教學中融入數學史，固然是 HPM 的一種典型進路，不過，如果充分利用數學小說的數學敘事甚至是文學敘事的特色，其潛在的教學或主動學習成效，也可視為 HPM 的一種延伸（洪萬生，2018）。

那麼要如何串連數學與敘事呢？探討數學與敘事的結合方式，可以使用原始典籍（Pengelley, 2011），或是利用歷史圖像讓學生敘事，幫助了解數學（Demattè & Furinghetti, 2011）。至於對於認知面向的重視，也是數學與敘事連結的一個必要提醒。本研究所關注的正是如何透過數學史的融入，開發數位閱讀文本，增益學生數學學習。雖然在課堂中數學史閱讀素材尚未廣泛受到重視，但是歷年來的升學考試也出現了一些以數學史為範疇的相關試題。例如 90 年大學聯考社會組數學多重選擇題羅列了數學兼哲學家伽利略的生平，讓學生閱讀後選出正確選項。同一份試卷的非選擇題也以三國時期孔明喜歡吃的白羅包子店為鋪陳，布置聯立方程組的相關試題。在 96 年的數學指定考科中，也直接引用古代數學文本的語句，讓學生閱讀理解文中的「等數」指的就是兩數之最大公因數。而在技職體系 98 學年度四技與二專的統一入學測驗試題中，也以探討文藝復興時期皇室貴族對科學家或數學家的贊助等數學史的題材（英家銘、蘇意雯，2009），放入國文科的篇章閱讀能力測驗中，讓學生經由閱讀數學文本，回答之後的問題。

數學閱讀是指閱讀含有數學內容的文字、符號、圖示等表徵，而數學閱讀的文本類型非常多元，包括繪本、漫畫、教科書、科普文章等(陳怡如等人, 2017)。針對一般的學科閱讀，McKenna 與 Robinson (2002) 認為所有的學科閱讀必須包含三種主要的技能，分別是一般讀寫技能、學科的先備知識與學科特殊的閱讀技巧。關於閱讀的策略，Palinscar 與 Brown(1984)根據 Vygotsky 認知理論所提出的交互教學法，用來幫助學生主動進行有意義的閱讀，利用教導學生提出問題、摘錄重點、澄清，以及預測下段文章內容等認知策略，讓學生從文本中獲得有意義的學習。Borasi 等人 (1998) 利用交易閱讀理論 (transactional reading theory) 探究在中學數學教學中的四個閱讀策略，也就是讓學生對於文本說出、寫下、畫出以及扮演，提供他們以具體的方式建構以及協商解釋所閱讀到的資訊。在本研究中，受限於數位閱讀的模式，研究者將關注於前三項的閱讀策略。

隨著科技的進展，我們越來越需要了解從靜態印刷轉換到動態數位課程資源的互動擴展空間 (Pepin et al., 2017)。數位技術正在解構「課堂」的概念，大量針對特定數學內容設計的在線資源應運而生，這些資源改變了內容的呈現方式，也允許學生解決數學任務並分享他們的數學探索 (Engelbrecht et al., 2020)，經由前面之文獻探討，考量數學史料的擷取和數學故事的有趣性，以及編製成閱讀素材的適切性，研究者以敘事的方式開發《詩情中的數學》國中數學史數位閱讀文本。

三、數位閱讀與 ADDIE 教學設計

隨著數位時代的推進與轉變，新的數位媒介及數位內容影響人們的閱讀行為，傳統的紙本閱讀習慣已經逐漸在改變中 (張嵐婷、顏容欣, 2011)。閱讀媒材日新月異，文本除了紙本書之外更增加了數位文本，閱讀載具也不再侷限於紙本，這讓閱讀更多元且更具互動性，也讓閱讀行為更趨多樣化 (黃禎貞、羅明都, 2017)。很多研究者對此議題進行相關教學實驗，例如陳梅芬等人 (2017) 以學習者為中心，以分組合作學習的方式，將文本閱讀、體驗式學習、數位學習及 5C (溝通協調、團隊合作、複雜問題解決能力、獨立思辨能力、創造力) 融入到數學教學課程中。讓學生透過平板電腦進行教材閱讀，並完成摘要、澄清、反思及分析後，結合摺紙的體驗式學習，最後透過課本概念的理解與摺紙體驗的結合，由學生將此數學的定義找出來。接下來藉由 Quizizz 平臺做單元即時反饋，輔助國中學生在數學科三角形的外心單元達到良好學習成效。

電子書的相關使用也擴及諸多面向，並獲致成效。例如黃武元等人 (2012) 將電子書應用於情境學習為基礎，結合雲端技術的多媒體註記與辨識情境工具，設計出利於學習者在真實情境中的建構學習，將其應用於國小生學習英語字彙及國小生植物觀察之學習活動。賴慶三 (2015) 研究發現，國小學童確實由電子書的閱讀活動建立相關的科學概念，也反應出電子書內容確實提昇國小學童的科學學習理解。楊淑蘭 (2017) 探討電子繪本教學對國小智能障礙兒童語言能

力之影響，以 3 篇電子繪本故事為教材，對 5 位智能障礙兒童以直接教學法進行 12 週，每週 2 節的臨床教學。研究結果發現電子繪本教學對國小智能障礙兒童語言能力有正向影響。陳彥廷（2017）設計原住民文化融入國小四年級數學課程，將此學習課程轉化為電子繪本。透過行動研究「診斷問題→反思→形成並實踐新行動方案」的循環歷程，解決了「文化鮮少」、「不易從文化中找到對應數學概念」、「繪本繪製」、「電子書須具備動畫、音效」等困難，逐步形成具「動畫、聲效、互動」等多重功能電子繪本。研究結果發現此文化融入數學概念的電子書能提升學生的學習動機，讓學生感覺數學問題情境的「親和性」。前述研究都是針對國小學生，以國中學生為對象的研究並不多，而這正是本研究的重點。

數位閱讀文本的設計，可以考量利用 ADDIE 模式。例如林佳蓉等人（2011）應用 ADDIE 模式發展「多媒體繪本融入故事臉教學」輔助教材，研究結果發現結合故事臉教學策略所發展的多媒體繪本能夠增進輕度智障學童之閱讀理解，也能夠讓學童的學習呈現正向的學習態度。ADDIE 教學設計模式是教學設計的主要組織原則（Gustafson & Branch, 2002），也可運用於線上教學課程的設計（Summerville, 2002），以下我們將對這五個階段做簡要介紹。

ADDIE 是一個通用和精簡的教學設計模式，此模式約於 80 年代末期出現，當時 ADDIE 模式僅是一個口語的用詞，用來描述教學發展的系統性進路（Molenda, 2003）。此模式的起源是模糊的，但其概念可追溯到更早的 70 年代中期，佛羅里達州立大學和軍方發展了一個跨軍種的教學系統開發模式，依序為分析、設計、發展、實施以及控制（Control）五個階段，在此處的控制意謂教學的評鑑和修訂（Branson et al., 1975）。之後在學術文獻中明確描述 ADDIE 模式的論文為數並不多，1996 年 Molenda 和 Pershing 以及 Reigeluth 的作品 *Designing instructional systems* 是其中一篇，作者群選擇了術語 ADDIE 作為教學系統開發模式的總稱（Molenda, 2003）。

使用 ADDIE 模式時，在分析階段，必須澄清教學問題，確認需要，也要制定目標，確定學習環境和學習的特性。也就是說，要確定學習者的特性，教學的目標以及所用以傳遞訊息的媒介，並分析可以利用的時間以及在這段時間內可以實現多少目的（Gagné et al., 2005/2007）。設計是針對過程中的研究、計畫、發展、評鑑和管理提出一個系統性的方法。Gagné 等人（1992）認為所有教學的設計模式都有定義教學的結果、發展教學以及評鑑教學效能的共通之處。Branch（2009）認為設計階段之目的是查核所需的表現以及適當的測試方法。發展階段關注用以創造教學素材的工具和過程，包括了故事藍圖、編碼、圖形使用者介面以及創建所有的多媒體元素。也就是確定學習活動與材料的類型之後，創作和製造符合目標素材的過程，所有需要的聲音，影像以及文本等素材，都會在此階段收集、準備或創製，並開發教師培訓或附加材料。實施階段包括原型測試（與目標受眾），將產品全面投產，並培訓學生和教師就如何使用該產品。評鑑階段包括兩個部分：形成性和總結性。形成性評鑑是在各個階段。總結性評鑑包括測試標準相關的參考項目，並提供機會讓來自用戶的反饋（Gagné et al., 2005/2007）。

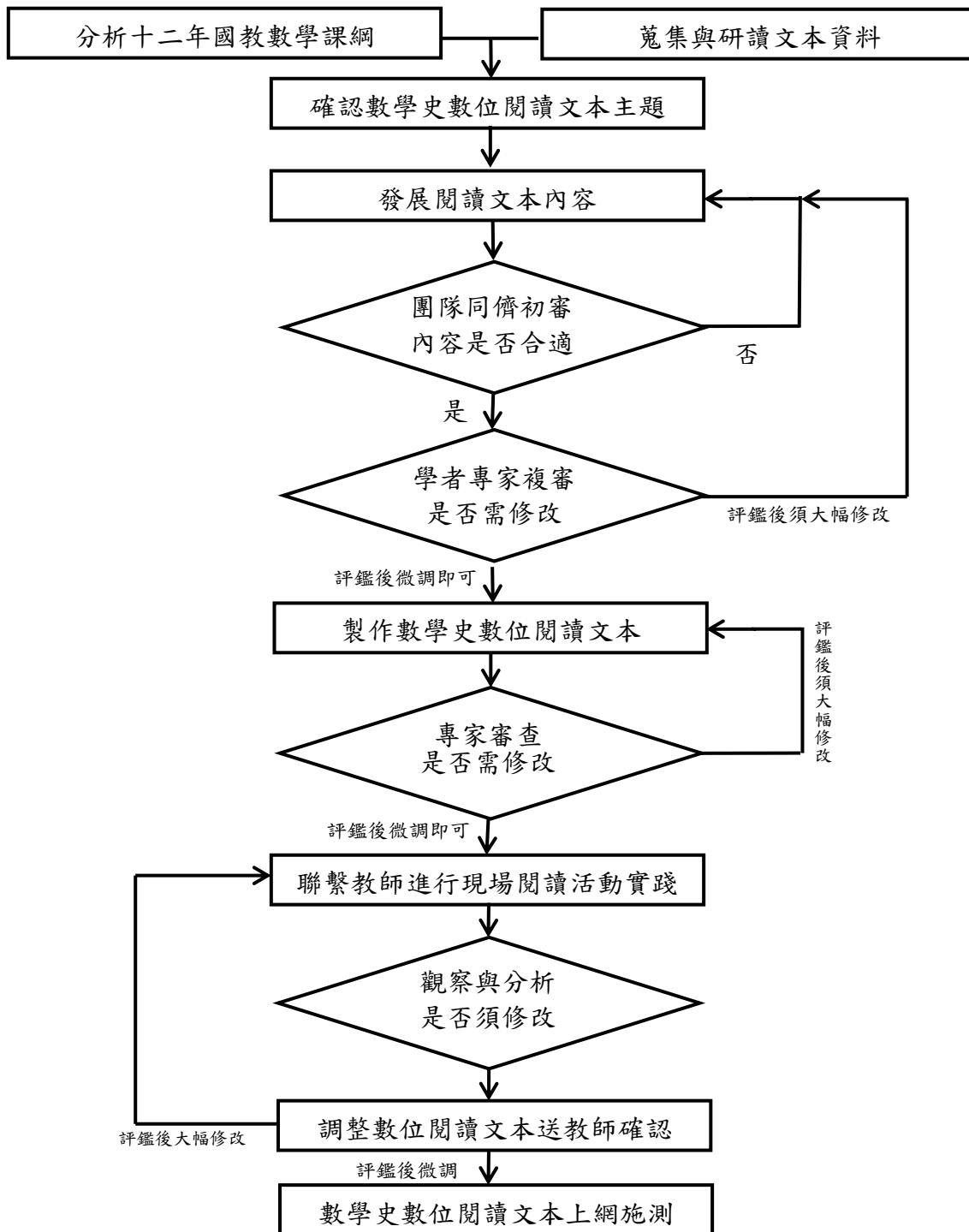
從上述文獻探討，我們可以知道數學史、數學敘事與數位閱讀，均能裨益學生的學習。本研究依照 ADDIE 模式，希望能恰當整合這三者，開發出適用的數學史數位閱讀文本。

參、研究方法

本研究屬於質性研究，採行動研究法實施。文學、藝術、建築與宗教都是人類重要的文化，數學本身也是人類發展過程中所伴隨產生的一種智識文化（劉柏宏，2021）。針對數學史數位閱讀文本的開發，研究者首先蒐集相關文本，研究團隊並共同分析與研讀十二年國教數學課綱內的理念，設定國中學生為閱讀對象，考量符合國中階段的數學學習重點。例如「a-IV-1 理解並應用符號及文字敘述表達概念、運算、推理及證明」，以及「a-IV-2 理解一元一次方程式及其解的意義，能以等量公理與移項法則求解和驗算，並能運用到日常生活的情境解決問題等學習表現。」，經過共同研討檢視，進行數學史數位閱讀文本的發展製作。在發展階段中，研究團隊經過討論，擬定腳本、插圖製作成數位閱讀文本，接著延請專家諮詢，經過反思再針對問題修改數位閱讀文本，展開另一個循環。在本研究中，經由研究團隊討論反思和專家們諮詢建議，數學史數位閱讀文本的開發，經過內容的編修、互動功能的補強，以及情境的增添等行動循環。研究者藉由不斷的行動反思，調整數位閱讀文本的呈現，完成適用於國中階段的《詩情中的數學》數位閱讀文本。本研究之數學史數位閱讀文本發展流程圖如圖 1 所示。

本研究之參與者，分為參與開發文本的人員以及參與閱讀活動的師生兩部分。首先由師資培育者及美術設計團隊、資訊團隊共同討論、研發適用於十二年國教之國中數學史數位閱讀文本。除了研究團隊的自我檢視之外，也延請專家們進行諮詢，據以修改數學史數位閱讀文本內容，使之更契合國中教育現場。之後研究者將此經過三輪行動研究回饋修改，最終開發完成的數學史數位閱讀文本，同步邀請三位教師幫忙進行閱讀活動實驗。三個地區的參與實驗學生總計有 94 人，分別為桃園地區國三學生 14 人、臺中地區國一學生 62 人，以及臺北市資優國三學生 18 人。目前國中教務處多備有平板電腦可供授課教師借用，在數學課堂上進行閱讀實驗是可行之道，研究團隊利用教師回饋單及學生閱讀問卷以及訪談等資料，再對此數學史數位閱讀文本的開發及實作進行反思。

圖 1
數學史數位閱讀文本發展流程圖



本研究的研究工具有：研究團隊所開發出之《詩情中的數學》數學史數位閱讀文本，以及學生閱讀感受問卷和教師回饋單。本份閱讀感受問卷主要參考國立臺灣師範大學左台益教授之數學學習感受問卷（左台益，2021），研究團隊加以調整後，並經數位專家們諮詢意見修改。本

份學習感受問卷共有 15 題（如文後表 1 所示），以五分量表方式勾選，探討學生的學習價值、認知負荷、持續閱讀的意圖，並於每題其後請學生質性說明理由以符應本研究所需。另外研究團隊也設計教師回饋單，包含數位閱讀文本內容在主題選擇、編排順序、內容難易度、素材呈現方式、閱讀文本功能等面向的五分量表選項，以及質性的實施意見表，希望能了解參與教師對於此數位閱讀文本實作的想法。資料收集方式，主要以「專家諮詢會議資料」、「教師回饋單」、「學生閱讀問卷」等文本收集及「訪談」等方式取得。藉由資料來源與蒐集方法的多元性，探討所開發之中小學數學史數位閱讀文本之適切性，以提高研究資料的可信度。「文本收集」包含書面文本及數位文本，所謂的書面文本，包含數學史數位閱讀文本開發過程中審查委員所給予之書面意見，以及團隊會議記錄、教師所填寫的回饋單。數位文本包括線上的評量紀錄，以及學生閱讀感受問卷。從這些文本資料中，我們可以更清楚得知所開發出數學史數位閱讀文本之適切性，並藉由數據的呈現分析，解讀學生之學習感受。「訪談」是針對現場實施的教師及學生們的訪談資料，以開放方式進行，更深一層掌握教師和學生對於數學史數位閱讀文本的看法。

本研究收集之專家諮詢、教師回饋、訪談等質性資料皆以三角校正的方式進行分析。針對數學史數位閱讀文本閱讀感受評量，所收集到的量化資料進行統計的分析，研究團隊藉由數據呈現的資料，解讀學生之學習感受。經由「專家諮詢會議資料」、「教師回饋單」、「學生閱讀問卷」等文本收集、訪談及團隊討論反思，研究者希望可以探究出如何開發適於十二年國教數學課程之國中數學史數位閱讀文本，豐富數位閱讀資料庫。

肆、研究結果

如前所述，本研究在數學史數位閱讀文本開發以及閱讀活動實踐過程，是依照 ADDIE 教學設計模式，分析階段包含學習內容、學習者及學習目標等分析，設計階段包含教學策略設計等，發展階段包含腳本設計及腳本繪製產出，實施階段則是教學活動正式實施的時間，評鑑階段工作則是從學習者的學習成效確認課程的實施成效（徐新逸，2003）。以下研究者將就各階段內容，再分別加以詳述如下。

一、分析階段—布置數學詩讓國中學生體會數學與文學之連結

在分析階段，研究者與研究團隊進行文本分析，探討思索所佈置之文本如何被「閱讀」。因應數位時代的要求，再加上各級學校都有電腦教室，教務處也多備有平板電腦可供授課教師借用，研究團隊決定發展數位閱讀文本，並依照穩定性及更新速度和業界經常使用等考量，使用 Bootstrap 做出網頁版型。研究團隊期望所發展的閱讀文本除了傳達數學思維發展的歷史脈絡，也能與課程數學知識內容結合，也就是讓學生知曉數學文化面向的同時，也能在數學知識內容上有所增進。

研究團隊以敘事形式介紹明代數學家程大位，並在文本中佈置其 1592 年的著作《算法統宗》中的數學詩。關於數學詩的選擇，承續國小階段的學習表現「r-III-3 觀察情境或模式中的數量關係，並用文字或符號正確表述，協助推理與解題。」，研究團隊決定挑選可以用算術方式或代數方式解題的題型，讓學生閱讀文本，進行數學解題，體驗數學與文學的跨領域連結。

二、設計階段—以敘事方式安排數位文本讓學生體驗閱讀理解歷程

Fink (2003, 2005) 提出在課程規劃之前，必須考慮三大情境因素，那就是學習目標：「我要讓學生學習什麼？」、教學和學習活動設計：「為了達成學習目標師生應該如何做？」，以及回饋及評量：「師生如何知道達成了學習目標？」。這三大要素應形成一個設計迴圈，彼此支持及增強。本研究的目標是開發數學史數位閱讀文本，讓學生在數位閱讀的進行中，了解數學的文化面向，並學習到相關之數學知識內容。研究者根據 PISA 的閱讀理解歷程：擷取與檢索、統整與解釋、省思與評鑑 (Organisation for Economic Cooperation and Development [OECD], 2010)，也就是能夠尋找、選擇和收集文本的資訊；能進行文本內部的統整，以及對於文本以外知識、想法和價值的連結應用等面向，設計評量題目。《詩情中的數學》閱讀文本讓學生除了在閱讀中針對數學詩解題，閱讀後也請學生填答問卷，檢視學生的閱讀感受。此份數學史數位閱讀文本規劃由國中階段學生自行閱讀解題，實施時間為一節課完成。

三、發展階段—經過內容的編修、互動功能的補強，以及情境的增添三行動循環

本研究在此階段整合所編製之數學史閱讀素材，提供腳本、評量試題及美術設計圖樣給資訊團隊。資訊團隊收到文字和繪圖後，以 Bootstrap 先將整個網頁的版型做出，確認網頁的風格，包括整個閱讀介面，之後開始內容製作，使用 jQuery 和 TweenMax 動畫套件製作動態的部分，最後使用 PHP 和 MySQL 將學生的測驗結果存入伺服端的資料庫中。

(一) 數位閱讀文本內容的編製

在編製《詩情中的數學》閱讀文本第一版本時，於文本閱讀的擷取與檢索階段，研究者一開始就先問學生有沒有聽過數學詩？引起學生的動機。接著研究者告訴學生，明代數學家程大位的數學著作《算法統宗》就有很多首數學詩，於是開始介紹程大位的生平。「程大位 (1533-1606) 是中國明代有名的珠算家，他的生平非常的好記，因為程大位一生的重要階段可以用三個 20 年作為分際。他 20 歲起便在長江中、下游一帶經商。明代商業很發達，因為商業計算的需要，程大位隨時留意數學，遍訪名師，也蒐集很多數學書籍，刻苦鑽研，時有心得。他在約 40 歲的時候返家，專心研究，開始著手寫書。程大位參考了各家學說，再加上自己的見解，終於在 60 歲時完成了《算法統宗》這本書。」。

接著研究者再簡介《算法統宗》此書。「《算法統宗》全書共有 17 卷，裡面列舉了很多的算題，滿足當時民間日用之需，農商經營之用。程大位在自序中稱他是『參會諸家之說，附以一得之愚，纂集成編。』也就是說，這本書並不是他本身獨有的創見，而是他參考了很多學者的學說，加上自己的見解，編輯成書。在中國古代數學的發展過程中，《算法統宗》是一部十分重要的著作，書中集珠算之大成，改善了之前籌算佔用面積大、運算較慢的不便，流傳極為廣泛和長久，對中國在民間普及珠算有很大的影響。」

之後於文本閱讀的統整與解釋階段，研究者開始介紹數學詩，由於本份數學史閱讀文本主要是想讓學生體會數學和文學的連結，因此所布置的數學詩知識內容並不會太艱難，如圖 2 所示。例如「一百饅頭一百僧，大和三個更無爭，小和三人分一個，大小和尚得幾丁。」這一首僧分饅頭歌，主要是探討大小和尚如何分配饅頭。這個題目的意思是，一共有一百個饅頭和一百個和尚。大和尚一人拿三個饅頭，小和尚三人分一個饅頭。要問的是大和尚及小和尚各有幾人，每群各拿幾個饅頭。這個題目可以運用代數解法，設小和尚有 x 人，那麼大和尚就有 $(100-x)$ 人，然後依照題意列出 $\frac{x}{3} + 3(100-x) = 100$ ，得出 $x = 75$ ，從而知道答案為「大和尚 25 人，分得饅頭 75 個。小和尚 75 人，分得饅頭 25 個。」。

本題也可以仿照中國的古算家運用算術思維，因為一位大和尚吃三個饅頭，三位小和尚合吃一顆饅頭，所以四位和尚吃了四顆饅頭。我們將此當成一組，100 顆饅頭共可分成 25 組，一組有一位大和尚，三位小和尚， $100 \div 4 = 25$ ， $1 \times 25 = 25$ ， $3 \times 25 = 75$ ，就可以算出上述的答案。

再例如另一首老人問甲歌，原文是「有一公公不記年，手持竹杖在門前，借問公公年幾歲，家中數目記分明。一兩八銖泥彈子，每歲盤中放一九。日久歲深經雨濕，總然化作一泥團，秤重八斤零八兩，加減方知得幾年。」。這個題目是要求一位長者的年歲。題意是老公公的年紀大了，記不清自己多少歲，但是每一年都會在盤中放一個重為一兩八銖的泥丸子作為記錄，因為時日久遠，泥丸子受潮變成了泥團。已知泥團總重八斤八兩，請問老公公年紀多大。這個題目其實只需要單位換算，小朋友常常會說半斤八兩，卻往往不知道一斤是十六兩，斤、兩和銖都是古代中國常用的重量單位，一斤等於 16 兩，一兩等於 24 銖。所以這個題目只要先把八斤八兩換算成 136 兩，也就是 3264 銖。另外一兩八銖是 32 銖， $3264 \div 32 = 102$ ，就可以知道老公公是 102 歲了。

第一版本佈置了 9 首數學詩，內容涵蓋四則運算問題、一元一次方程式問題，也包含等比數列的問題，例如浮屠增級歌：「遠望巍巍塔七層，紅燈點點倍加增，共燈三百八十一，請問尖頭幾盞燈？」，從詩中的情境描述，讓學生想像在燈火輝煌的寶塔上，如何求出塔頂的燈數。只要依照題意列出 $x + 2x + 4x + 8x + 16x + 32x + 64x = 381$ ，就可以求得答案為 3 盞。雖然等比數列是八年級的學習內容，但是學生仍可依照題意，用算術方式 $381 \div (1+2+4+8+16+32+64) = 3$ 求出答案。

上述這些數學詩內容皆不會太過艱深，都可用算術或代數方式求解，閱聽人在欣賞詩的趣味的同時，也可以探索古人算術解法的思維。研究團隊希望學生經由閱讀數位文本與數學詩解

題的過程中，能領略數學與文學的連結樂趣，並於其後的閱讀感受問卷填寫中展現省思與評鑑的閱讀歷程。

圖 2

第一版本所選錄之數學詩舉隅



(二) 數位閱讀文本功能的補強

為了使開發成品能真正合用，讓學生真有所得。研究者進行第一階段的專家諮詢，專家們在此建議**數學詩必須加上白話文翻譯**，例如「這些詩句對中小學生來說仍過於艱深，每個詩句應該都附上翻譯解說。」(1090805 諮詢 A)、「讀者閱讀古代數學詩最大的障礙可能是不瞭解詩中文字之意涵，建議除了做白話清楚解釋外，也可做相關的解說示意圖，協助讀者瞭解數學詩。」(1090805 諮詢 B)。研究者參酌專家建議，經過團隊討論修改，附上題意的選項，讓學生可以參酌翻譯，瞭解題意，如圖 3 所示。

圖 3

第二版本增加數學詩題意解說舉隅



此外諮詢專家也建議**加強閱讀互動**「建議未來文本頁面多開發互動效果，藉由互動增加讀者閱讀與學習興趣。」(1090805 諮詢 B)。此外對於閱讀感受問卷，專家也給予修正建議，例如「在學習完這個閱讀活動後，我更喜歡數學了。」建議改為「我覺得數學更有趣了。」因為喜不

喜歡數學不是一天兩天的事。」(1090805 諮詢 A)、「建議可在每一或某些題項之後再增加心得或說明欄位」,也就是「讓學生以簡要文字表述感受,應該更能評估學生藉由閱讀文本學習之成效。」(1090805 諮詢 C)。也因此《詩情中的數學》第二本版本增加學生解題互動機制,除了提供解題欄位,對於解題成功之學生也給予鼓勵,至於解題有困難之學生文本也給予參考答案,適時解除學生的疑惑,如圖 4 所示。

圖 4
第二版本增加學生閱讀互動舉隅



(三) 數位閱讀文本情境的增添

接著進行第二階段的專家諮詢。在諮詢會議中,專家對於此版本給與肯定「文字簡要清晰交代內容十分可取」(1100115 諮詢 D),不過也提出了關於**閱讀文本情境**的相關建議,例如「中間圖的桌上檯燈及文具太現代化需要修訂」(1100115 諮詢 D)、「情境、角色儘量能符合古人時代」(1100115 諮詢 E)、「能以情境方式,提出各個問題有連貫提出」(1100115 諮詢 F)、「要有說故事人的角色帶動故事的進展」(1100115 諮詢 G)。參酌了諮詢專家的意見,《詩情中的數學》數位閱讀文本改以《西遊記》故事人物呈現。之所以做此選擇,主要是《算法統宗》所收錄的古詩其中一首是行程問日歌:「三藏西天去取經,一去十萬八千程。每日常行七十五,問公幾日得回程。」,因此研究團隊想到可以利用《西遊記》裡面的人物作為主角,並以《西遊記》書中角色的個性與說話語氣撰寫腳本,讓書中角色穿越到明代,與程大位相遇,並藉此介紹程大位的背景,讓讀者可以用更輕鬆的方式認識程大位的生平。此外為了把不同內容的數學詩串接成一個故事,研究團隊發想讓這些詩的內容因一場意外被召喚出來,幻化成真,藉著解開每首詩的答案便能收服詩作,讓讀者能夠跟著故事中的角色一起解題,就像在闖關一樣。整個故事浸淫於奇幻的氛圍,在最後讓一切虛實難辨,唐僧一行人彷彿作了南柯大夢,夢醒後重新踏上西行的路途,繼續往自己的目標前進,如圖 5 所示。

圖 5

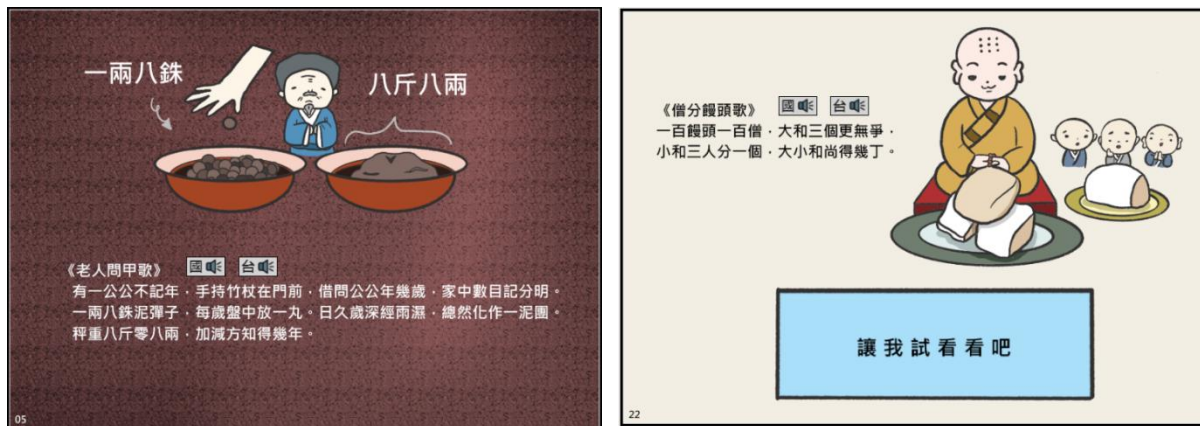
第三版本增加敘事情境舉隅



在此專家諮詢會議中，與會學者也提出了**閱讀文本增加讀音**的建議：「文本的文言文可增加『讀』呈現，如用吟唱或用台語唸出來很好聽，會更有價值」(1100115 諮詢 F)。由於古詩需要白話文翻譯，為避免增加學生負擔，研究團隊將數學詩題減少為六題，並增加國語和台語的古詩吟讀，如圖 6 所示。

圖 6

第三版本增加國語和台語雙讀音舉隅



在發展階段，經由研究團隊討論反思和專家們諮詢建議，數位閱讀文本經過內容的編修、互動功能的補強，以及情境的增添等行動循環，研究團隊所開發完成的《詩情中的數學》閱讀文本，就安排於教學現場進行實施。

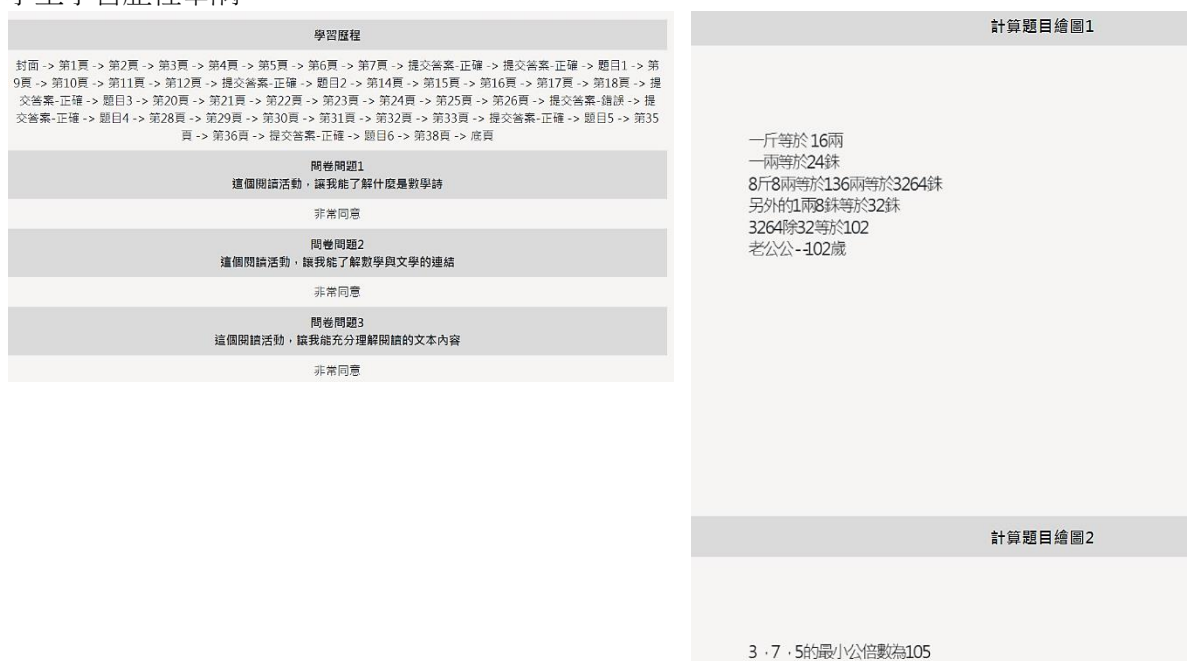
四、實施階段一於三地區進行《詩情中的數學》數位文本閱讀活動

研究團隊所製作之數學史數位閱讀文本經過團隊討論、專家諮詢及重複修改後，就進入學校場域讓現場教師進行閱讀活動實施階段。在教學實驗之前研究者與教師進行充分溝通，以幫助教師了解本研究之理念與目標，並請家長填寫參與者同意書，以利施測。本研究共在桃園、

臺中、臺北三個地區進行此數位閱讀活動，以下分別加以說明。針對桃園地區國三學生，參與教師使用 **ipad** 進行教學實驗，所用時間為一節課 45 分鐘，但受限於學校網路問題，該次課堂實施網路並不流暢，以至於除了少數幾位同學上傳成功，很多同學無法上傳。也因此參與教師拜託電腦老師讓學生在電腦課利用電腦完成施測。參與教師 J 表示「登入時，不太順暢，登入同學幾乎都嘗試多次才登入，不確定是否是國中端網路有問題。登入後的同學有些可以流暢閱讀，有些同學反應電子書卡卡的。但順利閱讀的同學反應很有趣，可以利用生動另類的方式學習數學。」。J 師也反應「做完後儲存時，每部 **ipad** 幾乎都當機跑不動，只有少數堅持到下課的同學在最後才順利完成問卷的填寫。令人欣慰的是，有些數學成就十分低落的學生，在實驗完後提到很喜歡這樣的數學課，覺得很有收穫。」(1100911 回饋 J)。

在《詩情中的數學》數位文本的閱讀進行時，學生必須利用電腦解題，為了掌握他們的閱讀理解情形，在系統後臺中，研究團隊可以觀測到學生的閱讀學習歷程及答題狀況，如圖 7 所示。不過由於學生是自行閱讀，他們或許習慣用心算或是直接取用身旁的計算工具、紙張，真正去利用文本頁面工具欄位的學生並不多。其中原因也有可能是因為電腦操控不易，讓學生不願意使用，研究者將於之後篇幅說明。

圖 7
學生學習歷程舉隅



桃園地區學生實作之後，研究者也延請臺中地區教師對於七年級學生進行閱讀活動。此次實施並沒有學校網路的問題，但是參與教師 K 認為「數學的運算歷程與解題歷程，往往需要動手透過紙筆運算得到解答」，他建議「在施測時可多透過平板搭配手寫筆的形式施測，否則學生大部分無法透過鍵盤回答問題，會減少答題意願。」。但是教師 K 也提及「大部分學校無手寫筆

的配備，較難搭配。」(1101224 回饋 K)，這也回應了本研究參與學生較少於作答區填答的狀況，可見硬體設備的配合正是數位閱讀活動能順利實施的重要條件。

另外在實施過程中，參與教師 K 經由觀察學生作答情形，表示「能感覺到由於數學問題有些概念是未習得過的知識，故學生較難透過自己的能力去嘗試錯誤解決問題。」。雖然本份數位閱讀文本附有參考答案，但是參與教師 K 認為「由於有些算式對於七年級的學生較難理解，即使閱讀解答也無法回答相對應的問題。」，事實上文本所佈置的這些問題都可用算術方式解決，只是學生可能一時無法想到用此方式解題。由於新冠肺炎疫情嚴峻，2021 年 5 月 18 日全國進入三級警戒後，各級學校採用線上教學，此次數學史數位閱讀文本之實施延後於 110 學年度第一學期進行，可見閱讀活動施測時間與課程進度的配合也是研究者所要關注的議題。

除了對於校園內一般學生施測規劃，研究者也延請臺北地區參與教師 T 利用區域資優國三學生線上授課時間進行此閱讀活動。教師在線上會議室中給予學生閱讀文本網址，讓學生自行閱讀電子書，並完成閱讀問卷。

五、評鑑階段—各階段的反思以及進行師生評鑑，檢驗研究成果

(一) 教師端評鑑

如前所述，在文本發展階段中，研究者都會藉由團隊成員內部初審以及專家諮詢，修正所開發之數學史數位閱讀文本。經過閱讀實作活動後，研究者委請教師填寫教師回饋單，包含數位閱讀文本內容在主題選擇、編排順序、內容難易度、素材呈現方式、閱讀文本功能等面向的五分量表選項，以及質性的實施意見表。研究者並與教師進行訪談，以進一步了解《詩情中的數學》數位閱讀文本內容在閱讀實施、估計時間、學生反應等方面是否有應改進事項。

關於《詩情中的數學》文本的量化意見，得分較高的分別是第二題「覺得文本編排順序合理」、第五題「覺得文本內容能提高學生學習數學的興趣」，以及第七題「覺得文本內容有助於學生了解數學的文化面向」，兩位教師給 5 分，一位教師給 4 分。三位教師較持保留看法的是第四題「覺得文本內容能引發學生思考與分析的能力」，分別給了 3 分、4 分以及 5 分。至於第一題「覺得文本內容與國中課程相關」、第三題「覺得文本內容難易度適當」、第六題「覺得文本內容有助於學生對數學概念的理解」皆是兩位教師給 4 分，一位教師給 5 分。

有關《詩情中的數學》文本的質性意見，在文本內容編排順序以及與課程的對應上，J 師認為「運用國中學到的數學知識，就可以順利解題。」、「大多數學生可以順利完成。」、「內容流暢有趣。」，以及「藉由解題，可更熟悉數學概念。」(1100911 回饋 J)。K 師認為「全文與國中大部分課程都相關，不過內涵貫穿全國中內容，篇幅較為廣闊。」以及「內容合理且完整，但若更符合故事起承轉合會更清楚。」(1101224 回饋 K)。T 師則認為「七層塔共幾盞燈那道題可與 108 課綱等比數列呼應，年齡問題（公公以泥丸計歲 102 歲那題）可與國中第 1 冊第 3 章一元

一次方程式常出現的年齡應用問題呼應。」、「電子書方式安排很好」、「7~9 年級均適合」，以及「促進學生使用數學工具來解題」(1100816 回饋 T)。

至於文本內容對於學生思考與分析的能力培養，J 師認為「分析思考題意，再運用學到的數學能力解題。」(1100911 回饋 J)。K 師如前述表明「由於數學問題有些概念是未習得過的知識，故學生較難透過自己的能力去嘗試錯誤解決問題，有些算式對於七年級的學生較難理解，即使閱讀解答也無法回答相對應的問題。」(1101224 回饋 K)。T 師則表示「使用方程式很適合國中生，但仍需注意實施時間點，例如需要 7 年級上學期 3 段之後，3 段才會學到一元一次方程式。」(1100816 回饋 T)。

對於文本內容提高學生學習興趣的情意部分，J 師認為「內容生動有趣，可提高引起學生學習的興趣。」、「有些數學成就十分低落的學生，在實驗完後提到很喜歡這樣的數學課，覺得很有收穫。」(1100911 回饋 J)。T 師表示「穿插故事，國台語發音，很吸引學生。」(1100816 回饋 T)。關於數學文化的體驗部分，T 師建議「學生想了解數學文化面向的意願深受實施時間點的影響，一般而言，假期比平日教學（有進度壓力）好，值得教師注意。」，J 師則認為「能看到不一樣的數學。」(1100911 回饋 J)。之後經訪談，J 師也表示「我個人還滿喜歡這次的繪本，覺得很有趣，又不需要很高深的數學。」(1101026 師訪 J)。

從三位教師的評鑑，可看出教師們對本份數學史數位閱讀文本持正向肯定態度，但是文本中安排的數學詩所涵蓋的數學知識面向較廣，實施的時機及適當年段是研究者日後應該注意的問題。

(二) 學生端評鑑

由於學生才是學習的主體，除了數學史數位閱讀文本之閱讀理解歷程評量外，研究團隊也設計學生閱讀感受問卷以了解學生參與數學史文本的數位閱讀活動後的感想與收穫。本問卷採五分量表，問卷題目共 15 題（第 6 題及第 11 題為反向題，反向計分），問卷題目及三地區學生回應狀況如表 1 所示。

表 1
數學史數位閱讀文本閱讀感受問卷及學生回應

地區學生(<i>n</i> 為人數)	臺北 國三 資優生 (<i>n</i> =18)	桃園 國三 學生 (<i>n</i> =14)	臺中 國一 學生 (<i>n</i> =62)
題項			
1. 這個閱讀活動，讓我能了解什麼是數學詩。	4.22	3.86	3.81
2. 這個閱讀活動，讓我能了解數學與文學的連結。	4.22	3.64	3.92
3. 這個閱讀活動，讓我能充分理解閱讀的文本內容。	3.56	3.93	3.73
4. 這個閱讀活動，讓我喜歡動腦想。	4.00	3.71	3.52
5. 這個內容複雜的閱讀活動，讓我投入非常多心力學習。	3.44	3.64	3.81
6. 這個閱讀活動，讓我花費很高的心力在沒有效率的學習過程上。 (反向題)	3.83	2.93	2.63
7. 這個閱讀活動的設計，能增強我對這個主題內容的理解。	3.89	3.64	3.87
8. 這個閱讀活動，讓我樂意主動學習數學。	3.50	3.71	3.6
9. 這個閱讀活動的設計，能讓我發現自己懂什麼和不懂什麼。	3.33	3.57	3.85
10. 我喜歡這個閱讀活動裡的數學。	3.78	3.71	3.77
11. 我覺得這個閱讀活動的內容非常困難。(反向題)	4.11	2.64	2.69
12. 我覺得這個閱讀活動很有趣。	4.11	3.79	3.97
13. 學習完這個閱讀活動後，我對數學的自信心增強了。	3.44	3.5	3.52
14. 在學習完這個閱讀活動後，我覺得數學更有趣了。	3.67	3.5	3.69
15. 未來我仍會想閱讀數學史數位閱讀文本。	3.50	3.57	3.47
全部題目平均數	3.77	3.56	3.59

關於 18 位臺北地區區域資優國三學生回應狀況，其中第 1 題「這個閱讀活動，讓我能了解什麼是數學詩」以及第 2 題「這個閱讀活動，讓我能了解數學與文學的連結」同意度高達 4.22。關於第 2 題，學生的理由諸如「有數學也有文言文」、「文中數學題目皆是以詩呈現」、「跨科國文的文言文和故事結合數學題目」等。次高分為第 12 題「我覺得這個閱讀活動很有趣」，由第 11 題的回應，顯示出大部分學生均不認為這個閱讀活動的內容非常困難。經訪談，資優生也表示「有趣，學過的數學都用得上，有些題目以前看過」(1100816 生訪 W)、「文言文講數學有些單位看不懂，還好有翻譯，不會太難」(1100816 生訪 L)。

關於桃園地區 14 位國三學生回應狀況，可從表 1 看出，同意度較高的同樣也是第 1 題「這個閱讀活動，讓我能了解什麼是數學詩」和第 12 題「我覺得這個閱讀活動很有趣」，此外還有第 3 題「這個閱讀活動，讓我能充分理解閱讀的文本內容」。參與教師也簡短的詢問學生反應，一位數學程度優等的學生表示「還不錯，可以接受。」(1101026 生訪 C)，另一位數學程度佳的學生表示「內容很吸引人，學習起來比較有趣，很有收穫。」(1101026 生訪 L)，至於另一位數學程度較不理想的同學表示「內容很有趣，有學到一些概念，對學習有幫助。」(1101026 生訪 M)。

關於臺中地區 62 位國一學生回應狀況，與前面兩地區學生類似，第 12 題「我覺得這個閱讀活動很有趣」是同意度最高的，次高為第 2 題「這個閱讀活動，讓我能了解數學與文學的連結」，其次是第 7 題「這個閱讀活動的設計，能增強我對這個主題內容的理解」。以三區學生共同比較，臺北地區的國三學生除了全部題目的平均數最高以外，在兩題反向題「這個閱讀活動，讓我花費很高的心力在沒有效率的學習過程上。」以及「我覺得這個閱讀活動的內容非常困難。」的回應上也與其餘兩區學生有明顯的差距，這或許與資優學生的學習經驗和發展有關（郭靜姿等人，2020）。這份數學史數位閱讀文本是否對於資優學生更能發揮效益，正有待於日後更進一步研究。

從學生的問卷回答，我們發現三地區的學生都認為本次閱讀活動很有趣，也能從文本的呈現中，了解數學詩。顯示《詩情中的數學》閱讀文本可以符合學生需求，能恰當展現數學內容，以及吸引閱聽人閱讀，初步達到研究團隊讓學生體會數學的跨領域連結，佈置數學詩的挑戰題，讓學生領略數學與文學連結的設計目標。

伍、結論與反思

本研究開發《詩情中的數學》數學史數位閱讀文本，透過古代數學詩詞的賞析，在一幕幕的詩情中，讓學生尋找數學的線索，進而解決問題，讓數學增添人文風貌。研究發現數學史數位閱讀文本開發可依循 ADDIE 模式進行，於研究歷程中研究者所引發之反思，也將於以下篇幅詳述。

一、透過 ADDIE 開發數學史數位閱讀文本之各階段說明

本研究團隊依循 ADDIE 模式，歷經分析、設計、發展、實施及評鑑階段，完成《詩情中的數學》數學史數位閱讀文本開發。有關數學史素材的搜尋，可以先經由普及讀物著手，對主題發展脈絡先有通盤概略的認識，接著再進一步搜尋原典資料，增添數學史文本，讓素材更為精緻豐富（蘇意雯，2021）。在分析階段尋找適合素材方面，研究者先經由數學史普及文章參考，接著搜尋相關數學史網站。由於近年來研究者於國語日報教育 13 版上陸續發表了幾篇數學史文章，教育版的讀者對象是教師和家長，用字遣詞都必須適合社會大眾的閱讀習慣，適合做為編寫國中階段閱讀文本的參考。於是研究團隊選擇「數學元素入詩 文學連結算術思維」（蘇意雯，2019）一文，接著再參考《算法統宗》原典，找出適合學生程度之數學史史料，考量改寫編製成數位閱讀文本的素材，讓學生明瞭數學的多元面向，體驗數學與文學之結合；設計階段決定以布置數學詩解題方式探查學生閱讀歷程，並以閱讀感受問卷了解閱讀者對於此份文本的看法；發展階段需要內容設計、美術設計以及資訊設計三方對於文本所訴求對象的數學背景程度的了解、對於數學知識的掌握及呈現方式等議題，充分溝通與配合。研究團隊由腳本繪製圖片並編

集成數學史數位閱讀文本，此文本歷經專家諮詢及團隊討論，增加白話文翻譯及國台語吟讀，以敘事方式帶入數學詩情境。也就是經過內容的編修、互動功能的補強，以及情境的增添等行動循環，最後終於加以定稿，進入教學現場實施。評鑑階段經由教師和學生問卷以及訪談，我們發現學生對於《詩情中的數學》數學史數位閱讀文本有正向之感受，教師也對此文本加以肯定。研究顯示依循分析、設計、發展、實施及評鑑各階段的 ADDIE 模式，可以做為開發國中數學史數位閱讀文本的可行進路。

二、數學史數位閱讀文本閱讀實施時應著重之面向說明

（一）網路順暢度的考量

實施階段由國中教師在課堂上讓學生閱讀文本，在桃園地區由於網路問題造成學生無法順利上傳問卷，以至於必須利用電腦課重新上傳。本研究為了確實瞭解學生真實感受，問卷採匿名方式，也因此，教師無法得知已上傳學生姓名，造成桃園地區 24 位施測學生最後只收集到 14 位學生的資料。數位文本的閱讀實施與網路順暢度息息相關，如果不在學校實施，之後是否可請學生於家中自行閱讀？如此學生之配合度為何？是日後研究者可再思考之問題。

（二）硬體書寫設備的搭配

行動學習不僅涉及使用便攜式設備，還涉及通過在不同脈絡與人、內容和設備所交織的互動下進行學習的能力 (Borba et al., 2016)。在本研究中，參與學生或許是由於硬體書寫設備的不熟悉和手寫筆的缺乏，大多是直接選擇答案，較少利用作答區填答，使得研究者較無法得知學生的解題歷程，再加上學生對於質性回應的空白，使得研究者也無法充分掌握數位閱讀文本對於學生單元概念的認知理解狀況，也因此，硬體書寫設備的搭配讓數位閱讀活動能順利實施，也是必須考量的重要條件。

（三）閱讀活動與課程進度的符應

數位融入學科之目的是引起學生學習之興趣與動機，藉此提升學習能力，以各單元導入或總結評量時融入為宜 (劉儷琪等人, 2017)。閱讀活動與課程進度的符應也是研究者所要關注的議題，以本份《詩情中的數學》數學史數位閱讀文本為例，若在國一施行，應以國一下學期較為適合。或是將六首數學詩拆開，配合單一課程主題讓學生欣賞、探索、解題，也是日後可以嘗試的閱讀方式。

（四）學生問卷填答的配合

本研究問卷除了量化勾選以外，每題下方還附有質性說明欄位，希望學生寫下理由。但是本次受測學生卻大部份都忽略不填，以至於研究團隊無法獲知更詳盡資料，這也是在實施階段必須請教師協助加強呼籲的重點。

本研究依循 ADDIE 模式，考量敘事方式布置數學詩，研究結果發現《詩情中的數學》國中數學史數位閱讀文本能初步達成研究目標，至於有關數位閱讀文本的閱讀活動實施須注意之事項及細節，則有待研究者日後思索改進。

誌謝

本文之得以完成，主要來自科技部的專題研究計畫(計畫編號：MOST 109-2511-H-845-002-)之部分研究成果，在此感謝科技部之補助，也謝謝期刊審查委員給予的寶貴意見。

參考文獻

- Gagné, R. M., Wager, W. W., Golas, K. C., & Keller, J. M. (2007)。教學設計原理(第5版)(王小明、龐維國、陳保華、汪亞利，譯)。華東師範大學。(原作出版於2005年)[Gagné, R. M., Wager, W. W., Golas, K. C., & Keller, J. M. (2007). *Principles of instructional design*, 5th edition. (Wang, H.-M., Pang, W.-K., Chen, P.-H., & Wang, Y.-L., Trans.). East China Normal University. (Original work Published 2005) (in Chinese)]
- 左台益(2021)。中學代數數位學習系統之開發(計畫編號：MOST 106-2511-S-003-025-MY3)。國家科學與技術委員會。[Tso, T.-Y. (2021). *The development of e-learning system for school algebra* (Report No. MOST 106-2511-S-003-025-MY3). National Science and Technology Council. (in Chinese)]
- 李國偉、黃文璋、楊德清、劉柏宏(2013)。教育部提升國民素養實施方案—數學素養研究計劃結案報告。教育部。[Lee, K.-W., Huang, W.-C., Yang, T.-C., & Liu, P.-H. (2013). *Final report for educating citizen literacy in mathematics*. Ministry of Education. (in Chinese)]
- 沈志龍、蘇意雯(2009)。當動畫與學習工作單相遇-數學史融入國小數學教學之實作研究。教師天地，163，70-77。[Shen, J.-L., & Su, Y.-W. (2009). Integrating history of mathematics into elementary teaching. *New Horizon Bimonthly For Teachers In Taipei*, 163, 70-77. (in Chinese)]
- 林佳蓉、陳莉莉、林曉薇(2011)。應用多媒體繪本與故事臉教學於國小輕度智能障礙學童閱讀理解之個案研究。教學科技與媒體，98，58-77。[Lin, C.-J., Chen, L.-L., & Lin, H.-W. (2011). A case study of using multimedia picture books and story face strategy to improve reading comprehension for elementary school students with mild mental retardation. *Instructional Technology & Media*, 98, 58-77. (in Chinese)]
- 林芳玫、洪萬生(2009)。數學小說初探：以結構主義敘事分析比較兩本小說。科學教育學刊，17(6)，531-549。[Lin, F.-M., & Horng, W.-S. (2009). A preliminary study of math fiction: Comparisons of two novels through perspectives of structuralism and narrative analysis. *Chinese Journal of Science Education*, 17(6), 531-549. (in Chinese)] <https://doi.org/10.6173/CJSE.2009.1706.04>
- 林珊如(2010)。數位時代的閱讀：青少年網路閱讀的爭議與未來。圖書資訊學刊，8(2)，29-53。[Lin, S. -J. (2010). Reading in a digital age: Issues and future of reading on the web among young people. *Journal of Library and Information Studies*, 8(2), 29-53. (in Chinese)] [https://doi.org/10.6182/jlis.2010.8\(2\).029](https://doi.org/10.6182/jlis.2010.8(2).029)

- 柯華葳、張郁雯、詹益綾、丘嘉慧 (2017)。PIRLS 2016 臺灣四年級學生閱讀素養國家報告。國立中央大學。[Ko, H.-W., Chang, Y.-W., Chan, Y.-L., & Chiu, C.-H. (2017). *Taiwan PIRLS 2016 national report*. National Central University. (in Chinese)]
- 洪萬生 (1984)。數學史與數學教育。科學月刊, 15 (5), 371-375。[Horng, W.-S. (1984). History of mathematics and mathematics education. *Science Monthly*, 15(5), 371-375. (in Chinese)]
- 洪萬生 (1998)。HPM 隨筆 (一)。HPM 通訊, 1 (2), 1-3。[Horng, W.-S. (1998). HPM Essay (I). *HPM TongXun*, 1(2), 1-3. (in Chinese)]
- 洪萬生 (2013)。萃取之必要：數學思維 vs. 寫作技術。HPM 通訊, 16 (2/3), 1-4。[Horng, W.-S. (2013). The need for extraction: Mathematical thinking vs. writing techniques. *HPM TongXun*, 16(2/3), 1-4. (in Chinese)]
- 洪萬生 (2018)。異軍突起的數學小說。HPM 通訊, 21 (6), 1-5。[Horng, W.-S. (2018). The sudden emergence of mathematics novels. *HPM TongXun*, 21(6), 1-5. (in Chinese)]
- 洪萬生 (2022)。數學故事讀說寫—敘事·閱讀·寫作。三民。[Horng, W.-S. (2022). *Read, tell, and write math stories*. SanMin. (in Chinese)]
- 洪碧霞 (主編) (2021)。PISA 2018 臺灣學生的表現。心理出版社。[Hung, P.-H. (Ed.). (2021). *Performance of Taiwanese students in PISA 2018*. Psychological Publishing. (in Chinese)]
- 英家銘、蘇意雯 (2009)。數學與「禮物交換」。載於洪萬生、英家銘、蘇意雯、蘇惠玉、楊瓊茹、劉柏宏 (主編), 當數學遇見文化 (頁 23-40)。三民。[Ying, J.-M., & Su, Y.-W. (2009). Mathematics and the "Gift Exchange". In W.-S. Horng, J.-M. Ying, Y.-W. Su, H.-Y. Su, Q.-R. Yang, & P.-H. Liu (Eds.), *When mathematics meets culture* (pp. 23-40). SanMin. (in Chinese)]
- 徐新逸 (2003)。數位學習課程發展模式初探。教育研究月刊, 116, 15-30。[Shyu, H.-Y. (2003). A preliminary study on the development model of digital learning curriculum. *Journal of Education Research*, 116, 15-30. (in Chinese)]
- 張嵐婷、顏容欣 (2011)。從電子書格式談政府出版品數位出版之規劃與準備。研考雙月刊, 35 (1), 107-112。[Chang, L.-T., & Yen, J.-H. (2011). On the planning and preparation of digital publishing of government publications from the perspective of e-book format. *Research, Development and Evaluation Bimonthly*, 35(1), 107-112. (in Chinese)]
<https://doi.org/10.6978/YKSYK.201102.0107>
- 教育部 (2008)。國民中小學九年一貫課程綱要數學學習領域。作者。[Taiwan Ministry of Education (2008). *Grade 1-9 curriculum guidelines (Mathematics)*. Author. (in Chinese)]
- 教育部 (2018)。十二年國民基本教育數學領域課程綱要。作者。[Taiwan Ministry of Education (2018). *Curriculum guidelines of 12-year basic education: Elementary and junior high school and general senior high school (Mathematics)*. Author. (in Chinese)]
- 教育部 (2019 年 12 月 3 日)。臺灣 PISA 2018 成果發表記者會。教育部全球資訊網。
[Taiwan Ministry of Education (2019, December 3). Press Conference on the Announcement of Taiwan PISA 2018 Results. (in Chinese)]
https://www.edu.tw/News_Content.aspx?n=9E7AC85F1954DDA8&s=7859A319DB24C59C
- 郭靜姿、張書豪、廖釗君、陳錦雪、林燁虹、于曉平、蔡明富 (2020)。臺灣中小學資優教育銜接與資優學生學習適應研究。教育心理學報, 51 (3), 415-442。[Kuo, C.-C., Jang, S.-H., Liao, C.-C., Chen, C.-H., Lin, Y.-H., Yu, H.-P., & Tsai, M.-F. (2020). The connection of gifted education services and learning adaptation of gifted students at primary and secondary schools. *Bulletin of Educational Psychology*, 51(3), 415-442. (in Chinese)]
[https://doi.org/10.6251/BEP.202003_51\(3\).0004](https://doi.org/10.6251/BEP.202003_51(3).0004)

- 陳怡如、林原宏、楊晉民 (2017)。高年級學生數學閱讀表現之分群特徵探討。**臺灣數學教師**，**38** (2)，42–63。[Chen, Y.-R., Lin, Y.-H., & Yang, J.-M. (2017). A study of the clustering characteristics on mathematics reading performance of sixth graders. *Taiwan Journal of Mathematics Teachers*, 38(2), 42–63. (in Chinese)] <https://doi.org/10.6610/TJMT.20171031.01>
- 陳彥廷 (2017)。原住民文化融入國小四年級數學課程繪本電子書製作之行動研究：以賽德克族為例。**教育與多元文化研究**，**15**，83–122。[Chen, Y.-T. (2017). The action research of electronic book production from Sediq culture and mathematical course of fourth-grade in elementary school. *Journal of Educational and Multicultural Research*, 15, 83–122. (in Chinese)]
- 陳梅芬、許庭嘉、陳舒棻、賴宏銓 (2017)。數位輔助體驗式學習活動－以數學科三角形的外心單元為例。**中等教育**，**68** (3)，79–92。[Chen, M.-F., Hsu, T.-C., Chen, S.-F., & Lai, H.-C. (2017). The integration of e-learning and experiential learning activities: Taking the unit of circumcenter of a triangle in mathematics for example. *Secondary Education*, 68(3), 79–92. (in Chinese)] <https://doi.org/10.6249/SE.2017.68.3.06>
- 黃武元、潘淑靜、劉奕帆、劉馨韓 (2012)。電子書在學習上的研究與應用趨勢之初探。**教學科技與媒體**，**100**，49–58。[Hwang, W.-Y., Pan, S.-C., Liu, Y.-F., & Liu, H.-H. (2012). Preliminary study of investigating potential applications and research with E-Readerse. *Instructional Technology & Media*, 100, 49–58. (in Chinese)]
- 黃禎貞、羅明都 (2017)。數位閱讀，許孩子一個幸福。**中等教育**，**68** (4)，174–182。[Huang, J.-J., & Lo, M.-T. (2017). Digital reading: Giving children a promising future. *Secondary Education*, 68(4), 174–182. (in Chinese)] <https://doi.org/10.6249/SE.2017.68.4.16>
- 楊淑蘭 (2017)。電子繪本臨床教學對智能障礙兒童能力影響之研究。**特殊教育與輔助科技學報**，**10**，27–50。[Yang, S.-L. (2017). Efficacy of clinical electronic-picture story direct-instruction on speech-language performances of children with intellectual disability. *Journal of Research in Special Education and Assistive Technology*, 10, 27–50. (in Chinese)] [https://doi.org/10.6684/JRSEAT.201712_\(10\).0002](https://doi.org/10.6684/JRSEAT.201712_(10).0002)
- 劉柏宏 (2021)。數學人文教案培養數學文化素養之理論探討與反思。**臺灣數學教育期刊**，**8** (1)，1–25。[Liu, P.-H. (2021). A theoretical and reflexive study on cultivating literacy of mathematical culture by using lesson plans from humanistic mathematics. *Taiwan Journal of Mathematics Education*, 8(1), 1–25. (in Chinese)] [https://doi.org/10.6278/tjme.202104_8\(1\).001](https://doi.org/10.6278/tjme.202104_8(1).001)
- 劉儷琪、張宏維、林盈成、溫立翔、魏秀燕、洪錫璿 (2017)。臺北市國中推動教育部數位輔助學科閱讀計畫實例分享。**中等教育**，**68** (3)，158–165。[Liu, L.-C., Chang, H.-W., Lin, Y.-C., Wen, L.-H., Wei, H.-Y., & Hung, H.-H. (2017). A case study of digital reading in a junior high school. *Secondary Education*, 68(3), 158–165. (in Chinese)] <https://doi.org/10.6249/SE.2017.68.3.15>
- 蕭文強 (1992)。數學史和數學教育：個人經驗和看法。**數學傳播**，**16** (3)，23–29。[Hsiao, W.-C. (1992). History of mathematics and mathematics education: Personal experience and opinions. *Mathmedia*, 16(3), 23–29. (in Chinese)]
- 賴慶三 (2015)。國小電子書的推展與實務。**國民教育**，**55** (4)，1–13。[Lai, C.-S. (2015). The promotion and practice of E-books in elementary schools. *Elementary Education*, 55(4), 1–13. (in Chinese)]
- 蘇惠玉 (2019)。HPM 實踐在臺灣：以《HPM 通訊》為研究個案。**臺灣數學教育期刊**，**6** (1)，1–26。[Su, H.-Y. (2019). HPM Practice in Taiwan: A Case Study of HPM Tongxun (HPM Newsletter). *Taiwan Journal of Mathematics Education*, 6(1), 1–26. (in Chinese)] [https://doi.org/10.6278/tjme.201904_6\(1\).001](https://doi.org/10.6278/tjme.201904_6(1).001)

- 蘇意雯 (2011)。數學史融入數學教學之理論與實務探究。國教新知, 58 (3), 65–73。[Su, Y.-W. (2011). A theoretical and practical study on integrating history of mathematics into teaching. *The Elementary Education Journal*, 58(3), 65–73. (in Chinese)] [https://doi.org/10.6701/TEEJ.201109_58\(3\).0007](https://doi.org/10.6701/TEEJ.201109_58(3).0007)
- 蘇意雯 (2019 年 10 月 30 日)。數學元素入詩 文學連結算術思維。國語日報, 13 版。[Su, Yi-Wen (2019, October 30). Arranging mathematical poems and linking mathematics with literature. *Mandarin Daily News*, 13. (in Chinese)]
- 蘇意雯 (2020)。數學史電子繪本之開發研究。載於國立臺中教育大學數學教育學系 (主編), 2020 年台灣數學教育學會年會暨第十二屆科技與數學教育學術研討會論文集 (頁 3–14)。國立臺中教育大學數學教育學系。[Su, Y.-W. (2020). Developing the electronic picture book of history of mathematics. In Department of Mathematics Education, NTCU (Ed.), *Proceeding of 2020 the twelfth international conference on technology and mathematics education and workshop of mathematics teaching* (pp. 3–14). Department of Mathematics Education, National Taichung University of Education. (in Chinese)]
- 蘇意雯 (2021)。中小學數學史教案開發與實作研究。臺灣數學教育期刊, 8 (1), 27–53。[Su, Y.-W. (2021). Research on the development and implementation of lesson plans for the history of mathematics in primary and secondary schools. *Taiwan Journal of Mathematics Education*, 8(1), 27–53. (in Chinese)] [https://doi.org/10.6278/tjme.202104_8\(1\).002](https://doi.org/10.6278/tjme.202104_8(1).002)
- 蘇意雯、林美媛 (2016)。提升國小低學習成就學生數學閱讀學習成效之研究。載於國立臺中教育大學數學教育學系 (主編), 2016 年第八屆科技與數學教育國際學術研討會暨數學教學工作坊論文集 (頁 21–41)。國立臺中教育大學數學教育學系。[Su, Y.-W., & Lin, M.-Y. (2016). Improving math reading effect of low-achievement students. In Department of Mathematics Education, NTCU (Ed.), *Proceeding of 2016 the eighth ICTME and workshop of mathematics teaching* (pp. 21–41). Department of Mathematics Education, National Taichung University of Education. (in Chinese)]
- 蘇意雯、陳政宏、王淑明、王美娟 (2015)。幾何文本閱讀理解的實作研究。臺灣數學教育期刊, 2 (2), 25–51。[Su, Y.-W., Chen, C.-H., Wang, S.-M., & Wang, M.-C. (2015). Teaching practices for reading comprehension of geometry texts. *Taiwan Journal of Mathematics Education*, 2(2), 25–51. (in Chinese)] <https://doi.org/10.6278/tjme.20151001.002>
- Agterberg, D. A., Oostdam, R. J., & Janssen, F. J. J. M. (2022). From speck to story: relating history of mathematics to the cognitive demand level of tasks. *Educational Studies in Mathematics*, 110, 49–64. <https://doi.org/10.1007/s10649-021-10093-6>
- Baki, A., & Çakıroğlu, Ü. (2010). Learning objects in high school mathematics classrooms: implementation and evaluation. *Computers & Education*, 55(4), 1459–1469. <https://doi.org/10.1016/j.compedu.2010.06.009>
- Barbin, E., Bagni, G.T., Grugnetti, L., Kronfellner, M., Lakoma, E., Menghini, M. (2002). Integrating history: research perspectives. In J. Fauvel & J. van Maanen (Eds.), *History in mathematics education: The ICMI study* (pp. 63–90). Kluwer Academic Publishers. https://doi.org/10.1007/0-306-47220-1_3
- Borasi, R., Siegel, M., Fonzi, J. & Smith, C. F. (1998). Using transactional reading theory to support sense-making and discussion in mathematics classrooms: An exploratory study. *Journal for Research in Mathematics Education*, 29(3), 275–305. <https://doi.org/10.2307/749791>
- Borba, M.C., Askar, P., Engelbrecht, J., Gadanidis, G., Llinares, S., & Aguilar, M. S. (2016). Blended learning, e-learning and mobile learning in mathematics education. *ZDM Mathematics Education*, 48, 589–610. <https://doi.org/10.1007/s11858-016-0798-4>

- Branch, R. M. (2009). *Instructional design: The ADDIE approach*. Springer-Verlag.
- Branson, R. K., Rayner, G. T., Cox, J. L., Furman, J. P., & King, F. J. (1975). *Interservice procedures for instructional systems development. Executive summary and model*. Center for Educational, The Florida State University.
- Chatman, S. (1975). Towards a Theory of Narrative. *New Literary History*, 6(2), 295–318. <https://doi.org/10.2307/468421>
- D'Agostino, S. (2018). To fall in love with math, Do this. *Journal of Humanistic Mathematics*, 8(1), 271–276. <https://doi.org/10.5642/jhummath.201801.11>
- Demattè, A., & Furinghetti, F. (2011). History, figures and narratives in mathematics teaching. In V. Katz, & C. Tzanakis (Eds.), *Recent developments on introducing a historical dimension in mathematics education*. (MAA Notes, pp. 103–112). Mathematical Association of America.
- Engelbrecht, J., Llinares, S., & Borba, M. C. (2020). Transformation of the mathematics classroom with the internet. *ZDM Mathematics Education*, 52, 825–841. <https://doi.org/10.1007/s11858-020-01176-4>
- Fauvel, J. (1991). Using history in mathematics education. *For the Learning of Mathematics*, 11(2), 3–6.
- Fink, L. D. (2003). *Creating significant learning experiences: An integrated approach to designing college courses*. Jossey-Bass.
- Fink, L. D. (2005). Integrated course design. *Idea Paper*, 42, 1–7.
- Furinghetti, F., & Paola, D. (2003). History as a crossroads of mathematical culture and educational needs in the classroom. *Mathematics in School*, 32 (1), 37–41.
- Gagné, R. M., Briggs, L. J., & Wager, W. W. (1992). *Principles of instructional design* (4th ed.). Harcourt Brace Jovanovich College Publishers.
- Gerofsky, S. (1996). A linguistic and narrative view of word problems in mathematics education. *For the Learning of Mathematics*, 16(2), 36–45.
- Gulikers, I., & Blom, K. A. (2001). 'A historical angle', a survey of recent literature on the use and value of history in geometrical education. *Educational Studies in Mathematics*, 47, 223–258. <https://doi.org/10.1023/A:1014539212782>
- Gustafson, K. L., & Branch, R. M. (2002). What is instructional design? In R. A. Reiser, & J. V. Dempsey (Eds.), *Trends and issues in instructional design and technology*. (pp. 16–25). Merrill/Prentice Hall.
- Kasman, A. (2003). Mathematics in fiction: An interdisciplinary course. *PRIMUS: Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies*, 13 (1), 1–16.
- Lim, S. Y., & Chapman, E. (2015). Effects of using history as a tool to teach mathematics on students' attitudes, anxiety, motivation and achievement in grade 11 classrooms. *Educational Studies in Mathematics*, 90(2), 189–212. <https://doi.org/10.1007/s10649-015-9620-4>
- Mckenna, M. C., & Robinson, R. D. (2002). *Teaching through text: Reading and writing in the content area*. Allyn and Bacon.
- Molenda, M. (2003). In search of the elusive ADDIE model. *Performance Improvement*, 42(5), 34–36. <https://doi.org/10.1002/pfi.4930420508>
- Organisation for Economic Cooperation and Development. (2010). *PISA 2009 Assessment framework: Key competencies in reading, mathematics and science*. OECD Publishing. <https://doi.org/10.1787/9789264062658-en>
- Palinscar, A. S., & Brown, A. L. (1984). Reciprocal teaching of comprehension-fostering and comprehension-monitoring activities. *Cognition and instruction*, 1(2), 117–175. https://doi.org/10.1207/s1532690xci0102_1

- Pengelly, D. (2011). Teaching with primary historical sources: Should it go mainstream ? Can it ? In V. Katz, & C. Tzanakis (Eds.), *Recent developments on introducing a historical dimension in mathematics education* (MAA Notes, pp. 1–8). Mathematical Association of America.
- Pepin, B., Choppin, J., Ruthven, K., & Sinclair, N. (2017). Digital curriculum resources in mathematics education: Foundations for change. *ZDM Mathematics Education*, 49, 645–661. <https://doi.org/10.1007/s11858-017-0879-z>
- Rezat, S. (2021). How automated feedback from a digital mathematics textbook affects primary students' conceptual development: Two case studies. *ZDM Mathematics Education*, 53, 1433–1445. <https://doi.org/10.1007/s11858-021-01263-0>
- Russo, T., & Russo, J. (2018). Narrative-first approach: Teaching mathematics through picture story books. *Australian Primary Mathematics Classroom*, 23(2), 8–14.
- Solomon, Y., & O'Neill, J. (1998). Mathematics and narrative. *Language and Education*, 12(3), 210–221. <https://doi.org/10.1080/09500789808666749>
- Summerville, J. B. (2002). Taking ID online: Developing an online instructional design course. *TechTrends*, 46(4), 29–32. <https://doi.org/10.1007/BF02763261>
- Thomas, R. S. D. (2002). Mathematical communities: Mathematics and narrative. *The Mathematical Intelligencer*, 24(3), 43–46. <https://doi.org/10.1007/BF03024731>
- Tzanakis, C., & Arcavi, A. (2000). Integrating history of mathematics in the classroom: An analytic survey. In J. Fauvel, & J. van Maanen (Eds.), *History in mathematics education: The ICMI study* (pp. 201–240). Kluwer Academic Publishers. https://doi.org/10.1007/0-306-47220-1_7

曾敏、陳國龍 (2023)。

線上繪圖計算機 Desmos 融入國中學習障礙學生二次函數教學之成效研究。

臺灣數學教育期刊, 10 (1), 29-55。

doi: 10.6278/tjme.202304_10(1).002

線上繪圖計算機 Desmos 融入國中學習障礙學生 二次函數教學之成效研究

曾敏¹ 陳國龍²

¹臺北市立成淵高中

²國立清華大學特殊教育學系

本研究旨在探討透過線上繪圖計算機 Desmos 融入國中學習障礙學生二次函數教學成效。研究以臺北市兩名國中九年級學習障礙學生為研究對象，採用單一受試實驗研究法的跨受試多探試設計。實驗設計分為三個階段，即基線期、介入期及保留期。實驗期間以研究者編製之二次函數圖形課程為內容，進行為期 3 周的課程。研究發現繪圖計算機 Desmos 融入二次函數圖形教學對於學習障礙學生有立即及保留的學習效果，這兩位學生在未使用繪圖計算機 Desmos 的基線期階段其答題的平均正確率為 38.3%和 40%，到了開始使用繪圖計算機 Desmos 的介入期階段其答題的平均正確率為 84%和 70%，使用繪圖計算機 Desmos 除了能增加答題正確率並能提升其學習態度，使他們學習更加主動、有自信。

關鍵字：Desmos、二次函數、學習障礙、繪圖計算機

通訊作者：陳國龍，e-mail：klchen@mx.nthu.edu.tw

收稿：2022 年 4 月 26 日；

接受刊登：2023 年 4 月 23 日。

Tseng, M. & Chen, K. L. (2023).

Use of online Desmos graphing calculator to improving the quadratic function learning outcomes among junior high school students with learning disabilities.

Taiwan Journal of Mathematics Education, 10(1), 29–55.

doi: 10.6278/tjme.202304_10(1).002

Use of Online Desmos Graphing Calculator to Improving the Quadratic Function Learning Outcomes Among Junior High School Students With Learning Disabilities

Min Tseng¹ Kuo-Long Chen²

¹ Taipei Municipal Chengyuan High School

² Department of Special Education, National Tsing Hua University

This study investigated the effectiveness of Desmos graphing calculator in improving the quadratic function learning outcomes of junior high school students with learning disabilities. A between-subject multiple probe design, which is one of the single-subject research approach, was conducted on 2 ninth grade students with learning disabilities at a junior high school in Taipei. The experiment consisted of 3 stages: baseline, intervention, and retention. A 3-week quadratic function graphics course developed by the investigator was provided, revealing that incorporating Desmos in quadratic function graphics teaching produced immediate and retained learning effects among the students. The average correct rates of these two students were 38.3% and 40% in the baseline period when they did not use Desmos, and their average correct rates were 84% and 70% in the intervention period after they started using Desmos. Using Desmos can not only increase the correct rate of test questions, but also improved their learning attitudes; specifically, the students learned more proactively and confidently.

Keyword: Desmos, quadratic functions, learning disabilities, graphing calculator

Corresponding author : Kuo-Long Chen , e-mail : klchen@mx.nthu.edu.tw

Received : 26 April 2022;

Accepted : 23 April 2023.

壹、前言

一、研究背景

學習障礙學生在閱讀、注意力、記憶和後設認知等能力上的問題，會影響其對於數學的學習（Gagnon & Maccini, 2001, 2007; Geary, 2004）且易在學習數學時產生挫折。他們對抽象的代數符號和概念的理解有困難（Maccini & Hughes, 2000），尤其對二次函數圖形的意義及認識上常出現認知的錯誤，其中最大的困難就是無法對同一個函數的代數和圖形等不同表徵進行轉換（Reiken, 2008）。為了提升學習障礙學生對二次函數的理解能力及學習興趣，研究者不斷地嘗試各種教學方法，最後發現計算機融入二次函數教學可能是一個有效且易引起學障學生興趣的教學方法。

計算機為有價值的數學教育輔助工具，可以在短時間內處理複雜之數值運算，化繁為簡，所以教育部將計算機融入數學教學做為十二年國民基本教育數學領域課程綱要設定的目標之一。除了計算的功能外，目前有些計算機還有繪圖的功能，這種繪圖計算機是一種能同時顯示數字、數學符號及圖形的計算機，所以可以有效的連結函數的不同表徵，並進一步協助學生學習函數的概念。在搜尋現有的數位工具時，發現 Desmos Graphing Calculator（簡稱 Desmos）是一種線上繪圖計算機，它的優點是學生容易操作且不需花任何費用，就能在手機、電腦或平板上直接使用。因此本研究欲運用線上繪圖計算機 Desmos 融入國中學習障礙學生二次函數數學教學中，設計相關教學課程，協助學習障礙學生對二次函數基本意義及圖形的學習，並進一步探討可能的教學成效。

二、研究目的及問題

根據上述研究動機，本研究目的在探討運用線上繪圖計算機 Desmos 融入國中學習障礙學生二次函數數學教學，其對學習障礙學生學習效果及學習態度的影響。研究問題如下：

基於上述動機，本研究目的如下：

- （一）使用線上繪圖計算機 Desmos 對國中學習障礙學生學習二次函數圖形的立即及保留成效為何？
- （二）使用線上繪圖計算機 Desmos 對國中學習障礙學生數學學習的態度影響為何？

貳、文獻探討

一、二次函數學習

在學習函數時，學生要了解函數的意義，將抽象的關係轉換成具體圖形，能在表格、圖形及代數式等不同表徵之間進行轉換，其複雜度高於先前所學。學生在函數單元的學習

困難，主要有（一）不知道什麼是函數，什麼不是函數。（二）不了解函數中的變數間的對應關係。（三）過度依賴使用代數解題方式，而且是固定且重複使用的解題方式，並且無法使用圖形來協助解題，即使圖形解題是比較快的方式。（四）函數的不同表徵連結和轉換的困難（戴文賓、邱守榕，2000；Baki & Güveli, 2008; Godwin & Beswetherick, 2003; Wurning, 2009）。Godwin 和 Beswetherick（2003）認為傳統的函數教學學生使用紙筆來畫出圖形，先用許多的 x 值代入函數，形成許多的點，將多點連成函數圖形，再觀察這個函數的特徵的特徵，但這樣的方法當學生要畫許多函數圖形，並觀察它們之間相似或相異的特徵時，學生要花非常多的時間，而造成學習熱忱的下降。Reiken（2008）研究十六名九年級學生，發現他們在學習函數時，對同一個函數的表格、符號、圖形和語言表徵之間的連結和轉換有困難。

針對二次函數的學習，學生除了上述的困難外，還有容易將一次函數的特徵過度類化到二次函數，例如學生會誤認為 $y = ax^2 + bx + c$ 的 a 是這個函數的斜率（Ellis & Grinstead, 2008）。

二、繪圖計算機之相關研究

傳統數學教學帶給人們的印象是不斷記公式、將數字帶進方程式，並重複練習枯燥乏味的計算，這使得許多學生感到厭倦且逃避學習數學（Ye, 2009）。所以使用教具來協助學生學習數學會有教學上的效果，在小學階段所使用的教具大多是具體教具，但到了中學階段使用具體教具的比例會減少，使用虛擬教具（virtual manipulatives）的比例則會增加（Witzel et al., 2003）。繪圖計算機就是其中虛擬教具的一種，使用繪圖計算機處理複雜計算可以減少學生的負擔，並且能夠讓學生多花時間在理解數學概念、學習邏輯推理和應用，並可以激發學生對於學習數學的熱情（Harskamp et al., 2000）。隨著資訊科技時代來臨，電腦、手機及平板設備開始進入教學現場；同時，繪圖計算機也從實體手持裝置演變為線上軟體。近年來新興的線上繪圖計算機，如 Desmos、Geogebra 等，已有許多現場教師將此做為教學工具，協助學生數學概念之理解，Kandemir 與 Demirbag-Keskin（2019）的研究發現圖形計算機可增進學生的數學學業成就和產生正向的數學學習態度。像是曾冠博（2019）利用 Geogebra 為工具協助補教教學學生學習二次函數相關概念，結果發現透過動態圖形的呈現，學生對二次函數的概念與圖形的變化，能夠更清楚的認識及產生深刻的印象。然而 Geogebra 其操作版面及功能較為複雜，研究者為了讓資源班孩子能盡快上手，而選擇操作版面簡單、明瞭的 Desmos 作為教學工具使用。

國內外學者研究發現，對於一般學生使用繪圖計算機，不但不會阻礙及減弱學生數學思考及運算的能力，反而能提升學生對於數學概念的理解，甚至能引起學生學習數學的動機。歸納整理繪圖計算機融入數學教學優點：（一）提升學習數學的動機。（二）提升數學概念之理解。（三）增強後設認知能力，在解決問題自我監控解題之歷程。（四）使教學達到良好的成效（Parrot & Leong, 2018; Spinato, 2011; Tajuddin et al., 2009; Ye, 2009）。

三、學習障礙學生學習表現

學習障礙學生由於知覺能力的缺陷，會使其在辨識或閱讀數字與數學符號時有困難，計算程序和語文理解未達自動化，理解和推理能力差，工作記憶缺損等（邵慧綺，2011）。陳麗如（2007）指出，學習障礙學生在符號認知方面有困難，因此抽象概念及符號認識對於學習障礙學生會感到相當吃力。在代數的學習上，其為較高層次且抽象之數學概念。羅榮福（2004）以一元一次方程式為例，分析學習障礙學生解代數問題時的答題狀況和訪談發現，學障生有無法列出方程式、不知假設之未知數含義、符號運算錯誤等問題。學障生所遭遇學習的困難，通常自行無法解決，因此，針對其特質給予合適教學，並提升學習動機為首要任務。孟瑛如（2003）指出電腦科技的發展已使得電腦輔助教學成為目前特殊教育教學的趨勢。電腦、手機或平板的動態表徵、教學軟體、互動式網頁等，能夠耐心地提供互動性回饋，並根據學習者的認知發展，協助其調整及練習，擴大知識情境的延展性，達到個別化、精熟的學習（鄭佩文，2020）。而科技輔助教學，增加了學障生的感官刺激，能引起他們的注意力，提升學習的興趣。

四、學習障礙學生使用計算機之相關研究

在數學計算上，由於具有數學學習困難的學習障礙學生，因而面臨計算上的錯誤或是複雜的計算步驟，導致花大部分時間在數學的運算，而非理解數學的概念。計算機的使用在國內研究發現，學習障礙學生使用計算機能幫助數學技能的提升，王秀嫻（2019）將計算機融入學習障礙學生小數位值概念教學的研究結果顯示，透過計算機直接顯示出答案，具象化數字，並由學生自己操作、觀察，可以成功建立小數單位量的化聚。在研究過程中，也發現運用計算機於數學課堂中可以提升學生的學習動機及學習專注度，並從被動學習轉換為主動學習。Bouck（2009）將繪圖計算機融入在七年級一般生以及學習障礙學生四則運算的計算中，其研究結果顯示雖然一般生比學習障礙學生在答題上更具顯著的差異，但整體上兩者在答題正確率皆上升，且在問題解決的能力上是進步的。但 Bouck 等人在 2015 年做的研究，是針對七名身心障礙學生使用繪圖計算機是否能提升其數學解題能力，研究結果發現使用繪圖計算機比沒有使用繪圖計算機答對率是有提升的，但答對率卻偏低，都是在 50% 以下，這樣的結果可能跟研究對象只有一位是學習障礙學生，其他的學生都是注意力缺陷過動症或廣泛性發展障礙，且其智力在 77 至 92 之間，較一般學生的智力有偏低的現象，才會出現答對偏低的結果。

儘管研究顯示計算機融入在教學對學習障礙學生是有幫助的，但仍須注意在使用計算機，尤其較為複雜的繪圖計算機時，是否因學習障礙學生視覺、記憶、語言缺陷、閱讀等困難導致不熟悉繪圖計算機的操作，而影響整體學習的效益（Steele, 2006）。因此，研究者將使用簡單易操作的線上繪圖計算機 Desmos，將其融入在二次函數圖形的教學中，希望藉由此教學方式提升學習障礙學生數學的學習。

參、研究方法

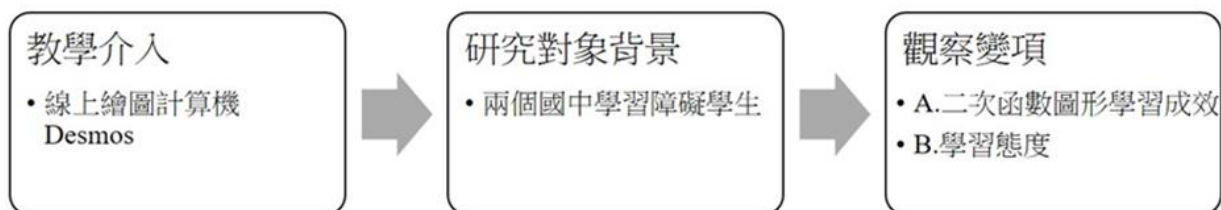
本研究旨在探討將線上繪圖計算機 Desmos 融入於國中資源班學習障礙學生二次函數圖形之學習成效，以及其對學生數學學習態度的影響。為增進研究對象學習情形的深入了解及避免冗長的基線觀察可能導致受試者負面的影響，故本研究採單一受試實驗研究法（single subject design）的跨受試多探試設計。

一、研究架構

根據研究目的與文獻探討建構出本研究的架構如圖 1，其中自變項為線上繪圖計算機 Desmos，將繪圖計算機 Desmos 融入在康軒版數學第六冊第一章第一節二次函數圖形單元教學中，以了解對學習障礙學生學習所產生的影響；依變項是學習障礙學生在接受繪圖計算機 Desmos 融入教學後，對二次函數圖形概念學習成效及態度影響。在學習成效部分，可分為立即成效與保留成效。立即成效為對教學效果的立即評量，在每次教學完後利用十分鐘實施；而保留成效是在實驗教學結束一週後，實施三次測驗以評量保留成效。

- （一）教學者：所有教學活動均由研究者擔任，避免因不同教學者實施教學所造成的偏誤。
- （二）評量者：基線期、介入期、保留期的所有評量由研究者擔任。
- （三）教學方式：依據康軒版課本二次函數內容發展課程教案（如附錄 1 和附錄 2）進行教學，為避免對受試者造成教學效果上的誤差，課程的實施原則與步驟皆相同。
- （四）教學時間：本研究利用午休或放學後的時間進行教學，以不干擾受試者原班上課的時間為原則。教學時間為共五節課，每節三十分鐘，二節課間隔約二到三天。
- （五）教學地點：為使每次教學的情境一致，因此教學進行地點固定在資源班學習中心教室。
- （六）評量方式：教學後，皆以紙筆測驗方式對兩位受試者實施研究者自編二次函數圖形成效評量，將學生的答對題數除以總題數，計算其答對百分比。
- （七）學生訪談：教學介入結束後，為了解受試者接受實驗教學後數學觀念之差異及學習態度之轉變，研究者向受試者進行訪談，以記錄學習歷程，並將訪談資料整理後進行分析。
- （八）評量地點：為避免受試者因處於不熟悉的環境產生焦慮，而導致測驗結果偏誤，本研究各次的評量地點均在資源班學習中心教室。

圖 1
研究架構



二、實驗設計

研究以個別教學的方式進行，採用單一受試的跨受試多探試設計。研究共分三個階段：

(一) 基線期 (A)：研究者在教學介入前，針對受試對象二次函數圖形概念進行至少三次連續式評量紀錄，作為依變項之基線資料。在此階段，並不對評量內容做任何說明或解釋。當受試甲的解題表現呈現穩定狀態，如：水準穩定度達 80%，即進入教學介入期。(二) 介入期 (B)：此時期的資料收集是在評量受試者接受教學介入後的立即成效。介入期依康軒版課程內容，認識二次函數圖形、 $y = ax^2$ 、 $y = ax^2 + k$ 、 $y = a(x - h)^2$ 、 $y = a(x - h)^2 + k$ 五個部分，進行五次教學，每週三節課，每節課約三十分鐘，於每節教學結束後進行評量測驗，做為介入期的資料點。待受試甲的教學結束，且受試乙的基準線穩定後，開始進行受試乙的教學介入。(三) 保留期 (C)：本階段是在撤除教學介入後七天開始實行，不給受試者任何指導及教學，對受試者進行三次評量，以觀察受試者學習維持效果。

三、研究對象

本研究以立意取樣的方式，從研究者所任教的資源班學生中，選取符合標準的對象以作為受試者，並在家長同意後進行實驗教學。研究對象的選定標準有四：1.經臺北市鑑定安置委員會通過鑑定，領有國中階段學習障礙鑑定證明；2.魏氏兒童智力量表全量表的智商在 75 分以上；3.在基礎數學概念評量（柯華葳，1999）的整體表現在年級切截分數以上，具備基礎數學能力；4.在班上數學科成績屬全班最後 15%。原目標為四位受試者，發下家長同意書後，其中一位未取得家長同意；另一位受試者由於 covid-19 影響，於停課期間停止進行研究。最後僅二位受試者接受研究者實驗教學的介入，二位均就讀國中九年級。

(一) 受試甲

經鑑輔會鑑定為學習障礙的學生，從八年級開始變至資源班接受英語及數學的補救課程。在班上成績屬後段，自信心低落，不過肯認真學習，是勤奮的學生。魏氏智力測驗全量表智商為 93，語文理解指數為 101，知覺推理為 108，工作理解為 84，處理速度為 80。在操作 Desmos 方面，能了解其功能並自行操作。在數學方面，根據其個別教育計畫中能力分析敘述為具基本數學運算能力，但計算速度偏慢，無法依題意列式，且抽象概念理解力弱，在學習一元一次函數、二元一次方程式時，對於 x 、 y 所代表之意義概念弱，固定且基本題型能算出答案，但一遇變化，便易出錯。對於二次函數概念，能理解其為拋物線圖形，不過在描繪二次函數圖形時，會因數字帶入方程式計算錯誤或是座標標記錯誤而影響二次函數圖形的呈現及判斷。另對於二次函數方程式與圖形之間的變化關係概念易混淆。

(二) 受試乙

經鑑輔會鑑定為學習障礙的學生，從八年級開始至資源班接受數學的補救課程。對於學習事情較為散漫，學習動機低落。有注意力及過動問題，定期至醫院回診並穩定用藥。魏氏智力測驗全量表智商為 97，語文理解指數為 99，知覺推理為 108，工作理解為 89，處

理速度為 89。在操作 Desmos 方面，能了解其功能並自行操作。根據其個別教育計畫中能力分析敘述，該生具備數學基本運算能力，但只要運算過程複雜，就容易運算錯誤，且同樣題型只是換個數字，便會答錯。抽象概念理解力弱，在學習一元一次函數、二元一次方程式時，對於 x 、 y 所代表之意義概念弱，基本題型教過便忘，且反覆練習效果不佳。對於二次函數概念，能理解其為拋物線圖形，在描繪二次函數圖形時，會因數字帶入方程式計算錯誤或是座標標記錯誤而影響二次函數圖形的呈現及判斷。在直角坐標 x 軸及 y 軸概念模糊，另對於二次函數方程式與圖形之間的變化關係概念易混淆。

四、研究工具

本研究主要研究工具為自編二次函數圖形測驗（如附錄 3）和對學生的訪談，本自編測驗以評估受試者在教學前（基線期）、教學中（介入期）及教學後（保留期）二次函數圖形概念之能力。測驗編制參考國中康軒版第六冊數學課本、習作及電子題庫，選出適當的基本題型加以改編，基線期、處理期及保留期三階段的評量內容題型皆相同，以更改數字及不動題幹為原則發展出難度一致的評量測驗。研究工具的效度採用專家效度，自編二次函數圖形測驗在接受指導教授意見修正後，並邀請校內具有合格教師證之數學教師及特教教師各一位協助審題，確認題幹及選項適合選答。基線期測驗卷，題目內容包括 $y = ax^2$ 、 $y = ax^2 + k$ 、 $y = a(x - h)^2$ 、 $y = a(x - h)^2 + k$ ，此四種二次函數式的圖形的基本判別。一份測驗卷共二十題，題目皆為選擇題，題型順序隨機排列，避免猜測效應；介入期階段測驗卷共有五份，每份測驗卷共十題，題目內容對應上課教材，分別包含 $y = ax^2$ 、 $y = ax^2 + k$ 、 $y = a(x - h)^2$ 、 $y = a(x - h)^2 + k$ ，此四種二次函數式的圖形的基本判別，題目皆為選擇題；保留期之測驗卷為基線期評量卷的副本，共三份，數值同樣經過改編設計。題目內容包括 $y = ax^2$ 、 $y = ax^2 + k$ 、 $y = a(x - h)^2$ 、 $y = a(x - h)^2 + k$ ，此四種二次函數式的圖形的基本判別，題目皆為選擇題，共十題，題型順序隨機排列，避免練習效應。

對學生的訪談主要在了解學生使用繪圖計算機 Desmos 後的數學學習態度，訪談問題如下：

- (一) 對於使用 Desmos 軟體上數學課有甚麼感覺？
- (二) 最喜歡 Desmos 軟體的什麼功能？
- (三) 使用 Desmos 軟體會幫助你提升上課的專心度嗎？為什麼？
- (四) 使用 Desmos 軟體會讓你喜歡上數學課嗎？為什麼？
- (五) 使用 Desmos 軟體會幫助你對於數學概念更清楚？為什麼？
- (六) 課程結束後，你會自己使用 Desmos 軟體幫助你學習嗎？

五、資料處理

本研究針對受試者在不同時期二次函數圖形的辨識表現進行分析。資料分為量化與質化兩種型態，量化的資料包含圖示、趨向穩定度、水準穩定度和水準變化；質化的資料則透過訪談及觀察記錄的方式進行處理。

圖示在瞭解受試者在階段內的表現狀況，並比較相鄰階段間的解題成果差異狀況。研究期間將二次函數圖形測驗結果進行紀錄，其中整體解題正確率的計算方式為，整體解題正確率=答對題數/全部題數 $\times 100\%$ 。取得數值後，以點的方式代表各次評量得分百分比，並繪曲線圖顯示兩位研究對象基線期、教學介入期及保留期各階段的整體解題正確率，以呈現各階段變化。

趨向穩定度、水準穩定度和水準變化也做為資料分析之參考。趨向穩定性的計算方式依資料點範圍選定穩定標準百分比 20%，以曲線最高值乘以穩定標準百分比 20%，所得的數值為穩定標準值。如圖 2，介入期最高值為 100， $100 \times 20\% = 20$ ，20 即為此介入期的穩定標準值。介入期五個資料點在 80 ~ 100 之間有四個點， $4/5 = .8$ 即為此介入期的趨向穩定數。當趨向穩定數超過（含）.75 以上，即可判斷為穩定，低於 .75 則為不穩定（杜正治，2006）。

水準穩定性要先計算出該階段資料得算數平均值，以此算數平均值為水平線，水準穩定性是指階段中個資料點在水平線上下變動的情形。如圖 2 水準平均數 84。在平均數上畫出與 x 軸平行的直線，此為平均線。在平均線上下分別量出穩定標準值（與趨向穩定標準值相同）的二分之一，即 $20 \times 1/2 = 10$ 。再計算曲線所有資料點中，以圖 2 來說介入期五個資料點有三個落在該範圍 74 ~ 84，其水準穩定度就是 $3/5 = .6$ 。當水準穩定度超過（含）.75 以上，即可判斷為穩定，低於 .75 則為不穩定。

水準變化則指階段內第一個資料點和最後一個資料點的差值，並標出進步（+）或退步（-），進步的變化愈大，表示教學介入的效果愈明顯。

肆、研究結果與討論

本研究旨在探討將線上繪圖計算機 Desmos 融入於國中資源班學習障礙學生二次函數圖形之教學成效，以及其對學生數學學習態度的影響。研究結果與討論分述如下：

一、線上繪圖計算機 Desmos 融入二次函數教學成效分析

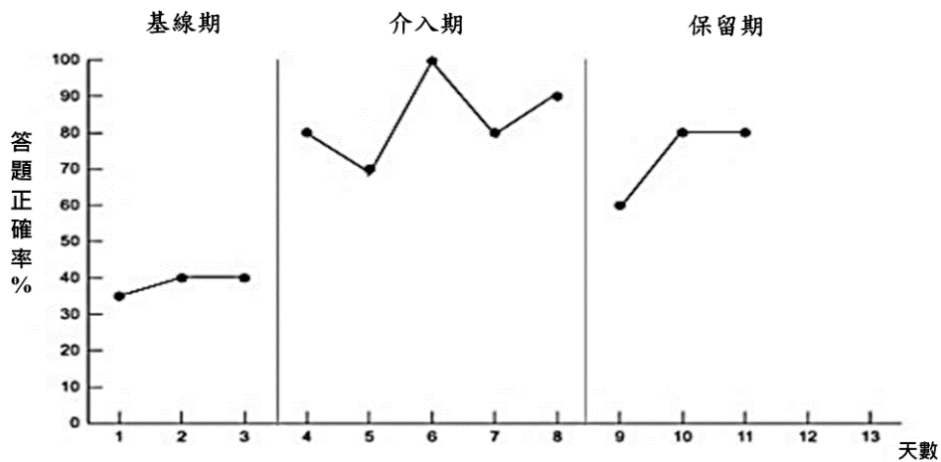
探討研究對象在接受線上繪圖計算機 Desmos 教學後其立即及保留成效。研究者將研究對象在基線期、介入期及保留期的表現繪製成曲線圖，再以目視分析來呈現，並比較階段內與階段間的變化情形。

（一）受試甲

由圖 2 顯示，受試甲在第一階段（基線期）共接受三次評量，答題正確率分別為 35%、40%及 40%，平均正確率為 38.3%，趨向穩定性和水準穩定性均為 1.0。第二階段（介入期）共接受五次的 Desmos 二次函數圖形教學後，測驗正確率明顯增加為 80%、70%、100%、80%、90%，平均正確率為 84%，趨向穩定性為 .8，水準變化為 +10%，水準穩定性為 .6。

圖 2

受試甲整體解題正確率



比較介入期和基線期的效果，介入期第一個資料點為 80%比前一階段最後一個資料點 40%，正確率增加 40%，介入期與基線期的重疊百分比為 0%，由此看出 Desmos 二次函數圖形教學效果良好。

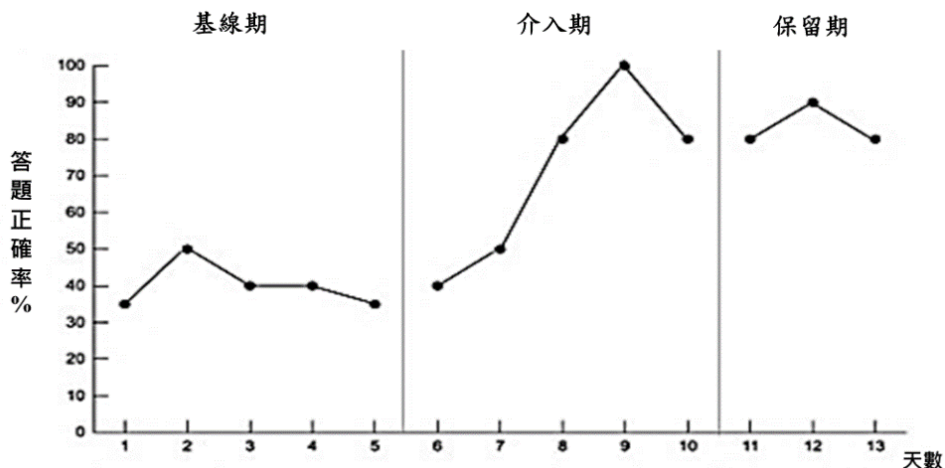
進入第三階段（保留期）進行三次評量，答題正確率分別為 60%、80%、80%，平均正確率為 73.3%，趨向穩定性及水準穩定性分別為 1.0 及 .67，水準變化為 +20%，且與介入期的重疊百分比為 66.7%，顯示 Desmos 二次函數圖形教學有保持一定的效果。

(二) 受試乙

由圖 3 得知，受試乙在第一階段（基線期）共接受五次評量，平均正確率為 40%，趨向穩定性和水準穩定性均為 1.0。進行第二階段（介入期）共接受五次的 Desmos 二次函數圖形教學後，受試乙的測驗正確率逐漸增加為 40%、50%、80%、100%、80%，平均正確率為 70%，趨向穩定性為 .8，水準變化為 +40%，水準穩定性為 .4。

圖 3

受試乙整體解題正確率



比較介入期和基線期的效果，介入期第一個資料點為 40%比前一階段最後一個資料點 35%，正確率增加 5%，介入期與基線期的重疊百分比為 40%，由此看出 Desmos 二次函數圖形教學是有成效的。

進入第三階段（保留期）進行三次評量，答題正確率分別為 80%、90%、80%，平均正確率為 83.3%，趨向穩定性及水準穩定性皆為 1.0，水準變化為 +0%，呈現穩定的狀態，且與介入期的重疊百分比為 100%，顯示 Desmos 二次函數圖形教學有保持良好的效果。

二、數學學習態度訪談

透過教學前後的觀察記錄以及訪談的結果，分別探討兩位受試者對於數學學習態度之變化。

（一）受試甲

受試甲在資源班進行數學補救教學，成績在班上屬於後段，自信心低落，對數學的學習態度並非正向。在教學介入使用 Desmos 軟體時，感受到受試甲對於此感到好奇，並出現喜歡學習的正向態度，訪談內容如下。

T：那你喜歡 Desmos 嗎？

S1：喜歡，因為他可以呈現很多圖形，而且會動有變化，可以觀察。

T：使用 Desmos 軟體會讓你喜歡上數學課嗎？為什麼？

S1：會，因為想學不同的式子來做不同圖案。

另外受試甲覺得使用 Desmos 軟體對他的數學學習是有幫助的，且能讓他觀察到圖形變化，並和表格連結再一起，而出現函數的多種表徵的連結。

T：使用 Desmos 軟體會幫助你對於數學概念更清楚？為什麼？

S1：會比較清楚，因為原本用背的，但用了軟體是能用理解的。

T：怎麼樣的解釋？你可以舉個例？

S1：像是開口大小好了，之前是知道數字小的開口比較大，但不知道為啥，不過老師你用這個軟體，不用自己畫，自己畫還會畫不準，而且要一直帶數字進去，很麻煩，這個直接輸入方程式就會有圖形呈現，可以輸入很多的不同的方程式去觀察變化。還有表格，我覺得這個很強，它會幫我帶好數字，這更好觀察。

統整上述訪談及教學觀察紀錄，可以感受到受試甲對於使用 Desmos 軟體融入在數學教學中，是持正向的態度。在上課行為表現上，受試甲在 Desmos 介入後皆準時進入上課教室，沒有像之前會有晚到的狀況；在上課情緒表現上，受試甲是容易因題目答錯而難過，甚至會有氣餒、想放棄的情形出現。Desmos 介入後，研究者感受到受試甲對於解答問題更有自信，在課堂中能與研究者一同討論題目並勇敢說出自己的想法；主動性上，在 Desmos 介入前，受試甲習慣研究者直接給予問題的解答，而非自己找尋答案，但當 Desmos 介入後，受試甲開始會使用 Desmos 自行找尋問題的解答，主動性提升。

(二) 受試乙

受試乙也是在資源班進行數學補救教學，數學學習動機低落，有注意力缺陷，數學學習態度偏負向。對於使用 Desmos 軟體的學習態度是正向的。

T：對於使用 Desmos 軟體上數學課有甚麼感覺？

S2：很方便也很有趣，對學習也有幫助。

T：那你喜歡 Desmos 嗎？

S2：還不錯，它呈現圖形蠻清楚的，讓我可以知道式子跟圖的關係。操作也蠻簡單的。

但和受試甲不同的是，受試乙並不肯定 Desmos 會讓他對數學的學習態度產生改變。

T：使用 Desmos 軟體會讓你喜歡上數學課嗎？為什麼？

S2：不一定，因為數學這個科目覺得簡不簡單都要看自身懂不懂。

另外，他和受試甲相同的是認為 Desmos 對於學習數學是有幫助的。

T：使用 Desmos 軟體會幫助你對於數學概念更清楚？為什麼？

S2：會，因為它有圖示，所以會比較看得懂。

T：可以再說清楚些嗎？

S2：輸入二次函數方程式會呈現圖形，而且會有對應的顏色，不會搞錯，這蠻不錯的！

統整上述訪談及教學觀察紀錄，可以感受到受試乙對於使用 Desmos 軟體融入在數學教學中，是持正向的態度。在上課行為表現上，受試乙在 Desmos 介入前，常在課堂中向教學者提出提早下課的請求，Desmos 介入後，受試乙上課專心度提升，且服從研究者教學時間的分配；在上課情緒表現上，受試乙容易因為忘記自己原本記得的概念，而感到生氣、懊惱。在 Desmos 介入後，受試乙因對二次函數概念掌握度提升，出現生氣及懊惱情緒頻率降低，並且對於解答問題更有自信；主動性上，在 Desmos 介入前，受試乙習慣研究者直接給予問題的解答，而非自己找尋答案，但當 Desmos 介入後，受試乙能使用 Desmos 自行找尋問題的解答，主動性提升；概念理解部分，受試乙表示 Desmos 能幫助他加深二次函數概念的印象，與之前相比更不容易忘記。

三、討論

(一) 線上繪圖計算機 Desmos 融入學習障礙學生二次函數學習之成效

本研究將線上繪圖計算機 Desmos 融入國中學習障礙學生二次函數教學之研究結果說明，兩位受試者在接受 Desmos 軟體的介入教學後，不僅在二次函數圖形概念的習得上有好的立即成效外，也有良好維持的效果，並產生正向的數學學習態度。和 Bouck 等人(2015)對於特殊學生使用計算機在計算和解題的研究比較，本研究在介入期和維持期答對率均有高於 50%，而 Bouck 等人的研究中特殊學生的答對率卻低於 50%，這個差異的第一個原因可能是因為本研究的參與對象都是學障學生，而 Bouck 等人的研究參與對象只有一位為學習障礙學生，其他都不是學習障礙學生。另外一個原因是智力因素，本研究的參與對象智

商為 93 和 97，而 Bouck 等人的研究參與對象的智商分布範圍為 77 至 92，智商較本研究對象低，這可能是其答對率低的重要原因。在教學介入方面，二次函數教學相關研究中，柯慶安（2013）使用線上數學軟體輔助教學，並發現其能幫助學生有良好的學習進步，透過具體操作及動態圖形的呈現能加深學生學習印象，其線上教學軟體融入二次函數概念之教學策略與本研究使用線上繪圖計算機 Desmos 線上教學軟體一樣，亦有良好的介入效果，且使受試者發展出主動探索數學課程的態度。

（二）二次函數解題歷程教學介入前後之差異

本研究在二次函數評量測驗訪談中發現，兩位受試者在教學介入前對於二次函數圖形有許多錯誤的概念，例如，會背誦二次函數圖形與方程式變化的口訣，「數字越大，開口越小」、「往左移是正的，往右移是負的」，但卻不了解 $y = ax^2$ 之二次項係數 a 與圖形之間的關係，不了解圖形的左右平移與方程式 $y = a(x - h)^2 + k$ 中 h 、 k 數值之關係，而這與國內探討對於二次函數概念學生易出現之困難的相關研究一致（徐敏媛，2011）。在 Desmos 軟體介入後兩位受試者從 Desmos 的二次函數圖形呈現以及圖形、表格的轉換功能，釐清之前錯誤概念，知道方程式和圖形之間變化的關係，能從方程式中找出頂點及圖形對稱軸。像是能了解 $y = a(x - h)^2 + k$ 二次方程式中，知道二次項係數 a 判別拋物線開口的大小，其係數前面之正負號則是影響開口方向。對於二次方程式左右平移問題，受試者會先找到 $y = a(x - h)^2 + k$ 的頂點 (h, k) ，再依據題目的移動指示找到新的頂點，並寫出平移過後新的方程式。

（三）線上繪圖計算機 Desmos 融入教學對數學學習態度之影響

在教學介入後對受試者進行學習態度訪談，訪談中發現，兩位受試者對於線上繪圖計算機 Desmos 的使用表示操作簡單、容易上手，且幫助受試者對於學習數學有興趣，並開始主動進行探索。過去 Parrot 與 Leong（2018）繪圖計算機融入教學研究結果顯示，繪圖計算機能有效促進低成就學生嘗試自行解決問題，產生更加主動積極的學習心態，與本研究學習態度的訪談結果一致。

伍、結論與建議

一、結論

（一）使用線上繪圖計算機 Desmos 使國中學習障礙學生的二次函數圖形答題正確率有增加

兩位受試者在未使用繪圖計算機 Desmos 的基線期階段其答題的平均正確率為 38.3% 和 40%，到了開始使用繪圖計算機 Desmos 的介入期階段其答題的平均正確率為 84% 和 70%。因此兩位受試者在線上繪圖計算機 Desmos 教學介入後，使學習二次函數圖形答題正確率有所提升。

(二) 使用線上繪圖計算機 Desmos 幫助兩位學習障礙受試者釐清二次函數圖形概念

研究發現在線上繪圖計算機 Desmos 介入前後，受試者對於二次函數概念之正確性具有明顯的差異，原兩位受試者對於方程式 $y = ax^2$ 之 a 與圖形之間的關係以及方程式 $y = a(x - h)^2 + k$ 中 h 、 k 之關係概念不清楚，且會用背誦的方式記二次函數概念。線上繪圖計算機 Desmos 介入後，幫助了兩位受試者對於原錯誤概念得以釐清，且皆能清楚說明二次函數圖形概念題目，了解方程式及圖形之間變化的關係，例如知道二次函數方程式係數為判別拋物線開口大小的因素，而其係數前正負號則是影響開口方向。另外評量測驗中，能說出自己選擇的選項或刪掉其他選項的原因，並再利用 Desmos 軟體解釋給研究者聽。

(三) 使用線上繪圖計算機 Desmos 對國中學習障礙學生學習數學的態度具有正向且積極的影響

研究結果顯示，兩位受試者在接受 Desmos 軟體介入後，皆有積極正向的學習態度。在教學介入後的訪談中，兩位受試者皆同意使用 Desmos 軟體對此次數學課程學習是有幫助的，除了提升對於二次函數圖形概念的理解，在學習二次函數圖形的態度上變為更加主動積極。研究者教學觀察也發現，在課堂中兩位受試者與研究者的互動相較於介入前更加踴躍、有自信。

二、建議

本研究發現使用線上繪圖計算機 Desmos 對國中學習障礙學生學習二次函數圖形，具有立即及保留的成效，且能釐清學生的迷思概念，並進一步提升學生的學習態度，因此建議針對學習障礙學生在學習二次函數時，教師可指導學生使用繪圖計算機 Desmos。由於繪圖計算機能連結代數及圖形表徵的強大功能，未來在教學的應用上，教師可嘗試將其應用於與函數圖形有關的單元學習上，並進一步獲致可能的教學效果實證資料。在教學應用方面，本研究主要使用線上繪圖計算機 Desmos 表格及數值滑桿功能，建議未來能加入使用 Desmos 軟體中團體課程之遊戲模組設計功能，經由增加與學生的互動，提升課程的豐富性，或許能使 Desmos 的教學應用獲致更大的學習成效，此部分有待進一步驗證。

另外本研究讓學生看到圖形的變化，再注意頂點和對稱軸，然後利用頂點和對稱軸判斷圖形。這似乎在找關鍵點而已，似乎沒有真正了解為什麼只要看頂點和對稱軸即可？若 a 改變呢？頂點和對稱軸還是相同，但圖形口小不同？對學障生而言，本研究只考慮單一變因的改變問題，至於二變因的改變問題，可以在未來研究加以探討。

由於本研究採用單一受試的研究設計，針對在 Desmos 應用過程中，學生操作工具及概念探索的歷程並未進一步探討，為本研究之限制，建議未來可以針對學生的學習歷程進行探究，以獲得 Desmos 教學應用對學生學習改變的具體影響資料。

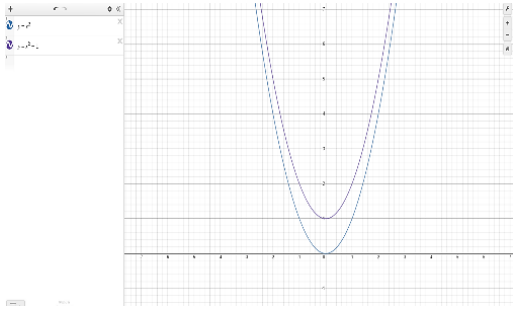
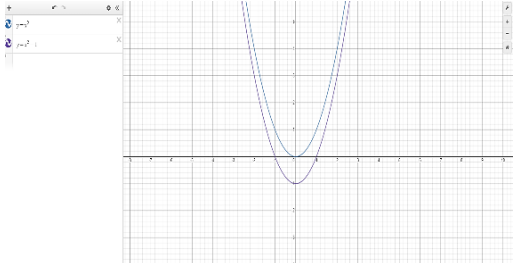
參考文獻

- 王秀嫻(2019)。運用計算機輔助國小五年級學習障礙學生的小數位值概念教學成效之行動研究(未出版之碩士論文)。國立清華大學。[Wang, S.-Y. (2019). *An action research of integrating calculators into mathematics teaching of decimals place value for the fifth graders with learning disabilities* (Unpublished thesis). National Tsing Hua University. (in Chinese)]
- 杜正治(2006)。單一受試研究法。心理。[Duh, J.-J. (2006). *Single subject research*. Psychological Publishing. (in Chinese)]
- 孟瑛如(2003)。資源教室方案:班級經營與補救教學。五南圖書。[Meng, Y.-R. (2003). *Resource room project: Classroom management and remedial instruction*. Wunan Books. (in Chinese)]
- 邵慧綺(2011年2月11日)。數學學障生的學習困難。[Shao, H.-C. (2011, February). *Learning difficulties in students' mathematics learning disabilities*. (in Chinese)] <https://www.mdnkids.com/specialeducation/detail.asp?sn=890>
- 柯慶安(2013)。二次函數數位教學分析與設計之研究(未出版之碩士論文)。國立臺灣師範大學。[Ko, C.-A. (2013). *The analyzing and the design for learning quadratic function* (Unpublished thesis). National Taiwan Normal University. (in Chinese)]
- 徐敏媛(2011)。國中生在二次函數概念上的主要錯誤類型及其補救教學之研究(未出版之碩士論文)。國立臺灣師範大學。[Hsu, M.-Y. (2011). *Error pattern investigation and remedy development for the quadratic function concepts of junior high school students in Taiwan* (Unpublished thesis). National Taiwan Normal University. (in Chinese)]
- 陳麗如(2007)。身心障礙學生教材教法。心理。[Chen, L.-J. (2007). *How to teach students with disabilities*. Psychological Publishing. (in Chinese)]
- 曾冠博(2019)。國中二次函數相關概念 GEOGEBRA 補救教學之研究(未出版之碩士論文)。中華大學。[Tzeng, K.-P. (2019). *GEOGEBRA remedial instruction of the quadratic function concepts of junior high school students* (Unpublished thesis). Chung Hua University. (in Chinese)]
- 鄭佩文(2020)。科技輔具融合數位遊戲式教學對於提升國中學障生的學習興趣及成效探討。臺灣教育評論月刊, 9(9), 154-161。[Cheng, P.-W. (2020). Using technology in game-based teaching for junior high students with learning disabilities. *Taiwan Educational Review Monthly*, 9(9), 154-161. (in Chinese)]
- 戴文賓、邱守榕(2000)。國一學生由算術領域轉入代數領域呈現的學習現象與特徵。科學教育月刊, 10, 148-175。[Tai, W.-P. & Chiu, S.-Y. (2000). The learning difficulties of beginning algebra encountered by first year secondary school students. *Science Education Monthly*, 10, 148-175. (in Chinese)] <https://doi.org/10.6767/JSE.200008.0148>
- 羅榮福(2004)。國民中學學習障礙學生與普通學生解一元一次方程式問題之比較研究(未出版之碩士論文)。國立彰化師範大學。[Lo, L.-F. (2004). *A study relected to the comparison between the normal students and students with learning disability in solving the linear equation with an unknown quantity in junior high school* (Unpublished thesis). National Changhua Normal University. (in Chinese)]
- Baki, A., & Güveli, E. (2008). Evaluation of a web based mathematics teaching material on the subject of functions. *Computers and Education*, 51(2), 854-863. <https://doi.org/10.1016/j.compedu.2007.09.003>

- Bouck, E. C. (2009). Calculating the value of graphing calculators for seventh-grade students with and without disabilities: A Pilot Study. *Remedial and Special Education, 30*(4), 207–215. <https://doi.org/10.1177/0741932508321010>
- Bouck, E. C., Bouck, M. K., & Hunley, M. (2015). The calculator effect: Understanding the impact of calculators as accommodations for secondary students with disabilities. *Journal of Special Education Technology, 30*(2), 77–88. <https://doi.org/10.1177/0162643415617371>
- Ellis, A. B., & Grinstead, P. (2008). Hidden lessons: How a focus on slope-like properties of quadratic functions encouraged unexpected generalizations. *The Journal of Mathematical Behavior, 27*(4), 277–296. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2008.11.002>
- Gagnon, J. C., & Maccini, P. (2001). Preparing students with disabilities for algebra. *TEACHING Exceptional Children, 34*(1), 8–15. <https://doi.org/10.1177/004005990103400101>
- Gagnon, J. C., & Maccini, P. (2007). Teacher-reported use of empirically validated and standards-based instructional approaches in secondary mathematics. *Remedial and Special Education, 28*(1), 43–56. <https://doi.org/10.1177/07419325070280010501>
- Geary, D. C. (2004). Mathematics and learning disabilities. *Journal of learning disabilities, 37*(1), 4–15. <https://doi.org/10.1177/00222194040370010201>
- Godwin, S., & Beswetherick, R. (2003). An investigation into the balance of prescription, experiment and play when learning about the properties of quadratic functions with ICT. *Research in Mathematics Education, 5*(1), 79–95. <https://doi.org/10.1080/14794800008520116>
- Harskamp, E., Suhre, C., & Van Streun, A. (2000). The graphics calculator and students' solution strategies. *Mathematics Education Research Journal, 12*(1), 37–52. <https://doi.org/10.1007/BF03217073>
- Kandemir, M. A., & Demirbag-Keskin, P. (2019). Effect of Graphing Calculator Program Supported Problem Solving Instruction on Mathematical Achievement and Attitude. *International Journal of Research in Education and Science, 5*(1), 203–223.
- Maccini, P., & Hughes, C. A. (2000). Effects of a problem-solving strategy on the introductory algebra performance of secondary students with learning disabilities. *Learning Disabilities Research & Practice, 15*(1), 10–21.
- Parrot, M. A. S., & Leong, K. E. (2018). Impact of using graphing calculator in problem solving. *International Electronic Journal of Mathematics Education, 13*(3), 139–148. <https://doi.org/10.12973/iejme/2704>
- Reiken, J. J. (2008). *Coming to understand slope and the Cartesian connection: An investigation of student thinking* [Doctoral Dissertation, University of California, Santa Barbara]. ProQuest Dissertations and Theses database (No. 3347606).
- Spinato, H. J. (2011). *The effects of graphing calculator use on high-school students' reasoning in Integral Calculus*. [Doctoral Dissertation, University of New Orleans]. University of New Orleans Theses and Dissertations. <https://scholarworks.uno.edu/td/1346>
- Steele, M. M. (2006). Graphing calculators: Teaching suggestions for students with learning problems. *TechTrends, 50*(6), 32–35.
- Tajuddin, N. M., Tarmizi, R. A., Konting, M. M., & Ali, W. Z. W. (2009). Instructional efficiency of the integration of graphing calculators in teaching and learning mathematics. *International Journal of Instruction, 2*(2), 11–30.
- Witzel, B. S., Mercer, C. D., & Miller, M. D. (2003). Teaching algebra to students with learning difficulties: An investigation of an explicit instruction model. *Learning Disabilities Research & Practice, 18*(2), 121–131. <https://doi.org/10.1111/1540-5826.00068>

- Wurning, O. (2009, July). *Modelling of a problem with the help of CAS and GeoGebra* [Paper presentation]. The 9th International Conference on Technology in Mathematics Teaching (ICTMT 9), Metz, France.
- Ye, L. (2009). Integration of graphing calculator in mathematics teaching in China. *Journal of Mathematics Education*, 2(2), 134–146.

附錄 1：二次函數圖形教學活動設計示例

教學年級	九年級	單元名稱	二次函數圖形(三)
教學日期	2021/4~2021/5	教學時間	30分鐘
學習目標	能辨別 $y = ax^2 + k$ 二次函數圖形的上下移動。		
教學活動	教學資源	時間	評量方式
一、引起動機 複習上周課程內容。		3	
二、發展活動 (一) 二次函數圖形的向上移動 1. 在白板上呈現 $y = ax^2 + k$ 詢問學生若在方程式後面加上一個未知數，拋物線會有何變化？請學生在Desmos軟體上輸入 $y = x^2$ 及 $y = x^2 + 1$ 觀察圖形變化，圖形的頂點向上移了一格，從(0, 0)移至(0, 1)。  2. 再請學生在Desmos軟體上自訂 k ($k > 0$)值，觀察圖形變化，並請學生說出圖形頂點及其對稱軸。	白板 平板 Desmos軟體	8	口頭評量
(二) 二次函數圖形的向下移動 1. 請學生在Desmos軟體上輸入 $y = x^2$ 及 $y = x^2 - 1$ 觀察圖形變化，圖形的頂點向上移了一格，從(0, 0)移至(0, -1)。  2. 再請學生在Desmos軟體上自訂 k ($k < 0$)值，觀察圖形變化，並請學生說出圖形頂點及其對稱軸。		8	
三、綜合活動 (一) 有獎快問快答活動 ※課程結束後進行測驗	白板 白板筆	7	口頭評量
		3	口頭評量


附錄 2：二次函數圖形學習單示例

拋物線的變化

班級_____姓名_____

一、拋物線上下的移動 1

- 請同學在 Desmos 軟體上輸入 $y = x^2 + 1$



➤ 頂點座標: _____

➤ 對稱軸: _____

- 請同學在 Desmos 軟體上輸入 $y = x^2 + k$ ($k > 0$) 觀察圖形變化。(可設定滑桿)



➤ 頂點座標: _____	➤ 頂點座標: _____
➤ 對稱軸: _____	➤ 對稱軸: _____

二、拋物線上下的移動 2

- 請同學在 Desmos 軟體上輸入 $y = x^2 - 1$

desmos

➤ 頂點座標: _____

➤ 對稱軸: _____

- 請同學在 Desmos 軟體上輸入 $y = x^2 + k$ ($k < 0$) 觀察圖形變化。(可設定滑桿)

desmos

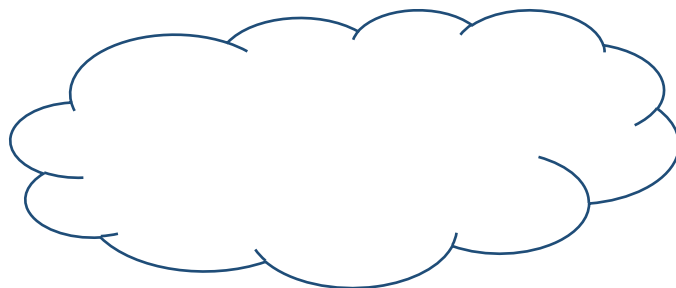
➤ 頂點座標: _____

➤ 對稱軸: _____

➤ 頂點座標: _____

➤ 對稱軸: _____

- 你的總結與歸納



附錄 3：自編二次函數圖形測驗

_____年 _____班 座號：_____ 姓名：_____	得分：
範圍：1-1 二次函數的圖形	

1. () 下列二次函數圖形哪一個開口最大？

(A) $y = 3x^2$	(B) $y = -x^2$
(C) $y = -2x^2$	(D) $y = 6x^2$

2. () 下列二次函數圖形哪一個開口最小？

(A) $y = 8x^2$	(B) $y = 3x^2$
(C) $y = -2x^2 + 1$	(D) $y = -4x^2$

3. () 下列哪一個函數圖形有最高點？

(A) $y = -x + 3$	(B) $y = -x^2 + 3$
(C) $y = x - 3$	(D) $y = x^2 - 3$

4. () 下列二次函數圖形哪一個開口最小？

(A) $y = 5 - x^2$	(B) $y = 5x^2$
(C) $y = -6x^2$	(D) $y = -\frac{x^2}{5}$

5. () 下列二次函數圖形哪一個開口最大？

(A) $y = \frac{1}{5}x^2 + 23$	(B) $y = -\frac{2}{3}x^2 - 50$
(C) $y = 3x^2 + 1$	(D) $y = -5x^2 - 1$

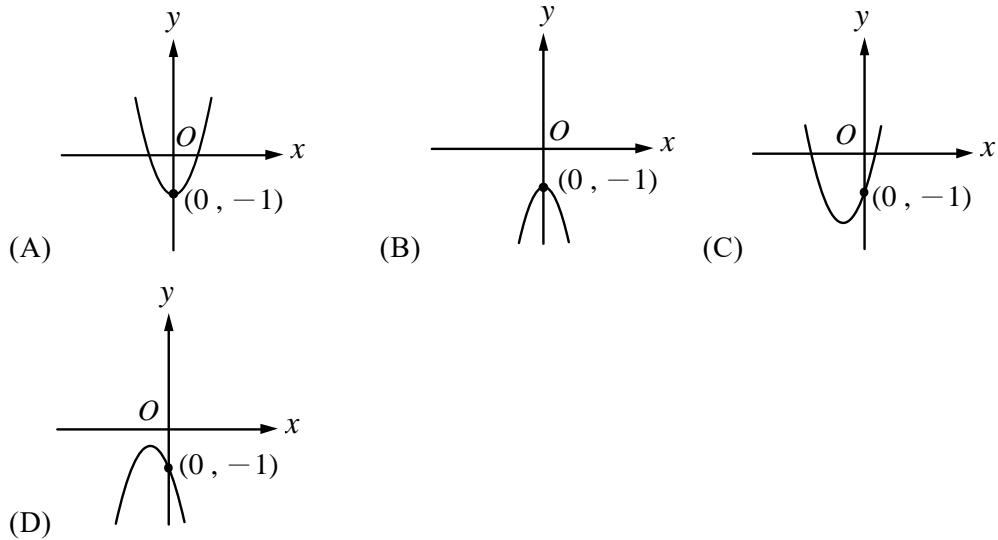
6. () 將 $y = x^2$ 的圖形向上平移 5 個單位，得新的二次函數為何？

(A) $y = x^2 + 5$	(B) $y = x^2 - 5$	(C) $y = (x + 5)^2$	(D) $y = (x - 5)^2$
-------------------	-------------------	---------------------	---------------------

7. () 將 $y = 3x^2 + 4$ 的圖形其頂點為何？

(A) (4, 0)	(B) (-4, 0)	(C) (0, 4)	(D) (0, -4)
--------------	---------------	--------------	---------------

8. () 下列哪一個圖形可能為二次函數 $y = -2x^2 - 1$ 的圖形？



9. () 已知坐標平面上有二次函數 $y = -3x^2 - 5$ 的圖形，今將此圖形沿著 x 軸對摺得到新圖形，則關於新圖形的敘述，下列何者正確？

- (A) 開口向下，頂點為 $(0, 5)$
 (B) 開口向下，頂點為 $(0, -5)$
 (C) 開口向上，頂點為 $(0, 5)$
 (D) 開口向上，頂點為 $(0, -5)$

10. () 若兩拋物線 $y = -\frac{1}{3}x^2 + 2$ 及 $y = -\frac{1}{3}x^2 - 2$ 的頂點分別為 A、B，則 $\overline{AB} = ?$

- (A) 4 (B) 2 (C) 1 (D) 0

11. () 將 $y = \frac{1}{2}x^2$ 的圖形向右平移 6 個單位，得新的二次函數為何？

- (A) $y = \frac{1}{2}(x+6)^2$ (B) $y = \frac{1}{2}x^2 + 6$ (C) $y = \frac{1}{2}(x-6)^2$ (D) $y = \frac{1}{2}x^2 - 6$

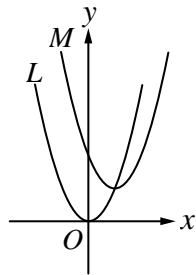
12. () 將 $y = 2x^2$ 的圖形向左平移 2 個單位，得新的二次函數為何？

- (A) $y = 2(x+2)^2$ (B) $y = 2x^2 + 2$ (C) $y = 2(x-2)^2$ (D) $y = 2x^2 - 2$

13. () 關於二次函數 $y = -3(x-2)^2$ 圖形的敘述，下列何者錯誤？

- (A) 其圖形為一拋物線 (B) 其圖形的頂點坐標為 $(2, 0)$
 (C) 其圖形的開口向下 (D) 其圖形的對稱軸為 $x = -2$

14. () 將二次函數 $y = -(x+2)^2$ 的圖形向左平移 3 個單位，得新的二次函數為何？
 (A) $y = -(x+3)^2$ (B) $y = -(x+5)^2$ (C) $y = -(x-1)^2$ (D) $y = (x-1)^2$
15. () 將二次函數 $y = (x-5)^2$ 的圖形向右平移 2 個單位，得新的二次函數為何？
 (A) $y = -(x-3)^2$ (B) $y = -(x+3)^2$ (C) $y = (x-7)^2$ (D) $y = (x+7)^2$
16. () 將二次函數 $y = x^2$ 的圖形，向右平移 5 個單位，再向下平移 2 個單位，得新的二次函數為何？
 (A) $y = (x-2)^2 + 5$ (B) $y = (x+5)^2 + 2$ (C) $y = (x+2)^2 - 5$ (D) $y = (x-5)^2 - 2$
17. () 將二次函數 $y = 5x^2$ 的圖形，向左平移 5 個單位，再向上平移 3 個單位，得新的二次函數為何？
 (A) $y = 5(x-3)^2 + 5$ (B) $y = 5(x+5)^2 + 3$ (C) $y = 5(x-5)^2 + 3$ (D) $y = 5(x+3)^2 - 5$
18. () 將二次函數 $y = -2x^2$ 的圖形，如何平移可以得到 $y = -2(x+8)^2 + 3$ 的圖形？
 (A) 向右平移 3 個單位，再向上平移 8 個單位
 (B) 向右平移 8 個單位，再向上平移 3 個單位
 (C) 向左平移 3 個單位，再向下平移 8 個單位
 (D) 向左平移 8 個單位，再向上平移 3 個單位
19. () 如圖，拋物線 $y = 2x^2$ 的圖形為 L ，若將 L 平移後得一拋物線 M ，則拋物線 M 的二次函數可能為下列何者？



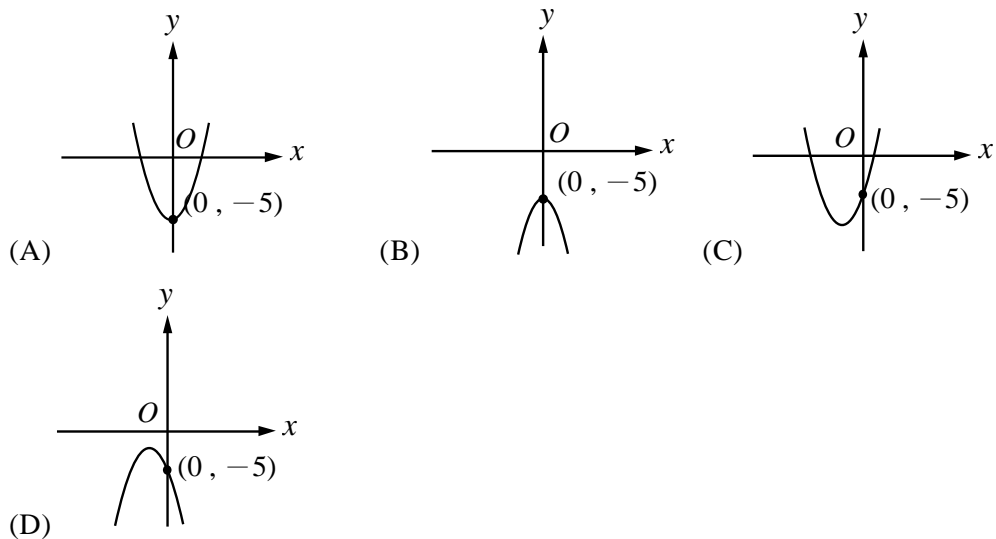
- (A) $y = 2(x+1)^2 - 2$ (B) $y = 2(x+1)^2 + 2$ (C) $y = 2(x-1)^2 - 2$ (D) $y = 2(x-1)^2 + 2$
20. () 將二次函數 $y = \frac{1}{2}(x-2)^2 + 3$ 的圖形向下平移 5 單位，再向右平移 2 單位，可以得到二次函數的圖形為？
 (A) $y = \frac{1}{2}(x-4)^2 - 2$ (B) $y = \frac{1}{2}(x-7)^2 + 5$ (C) $y = \frac{1}{2}(x+4)^2 + 2$ (D) $y = \frac{1}{2}(x-2)^2 - 5$

____年 ____班 座號：_____ 姓名：_____

範圍：1-1 二次函數的圖形

得分：

- () 下列二次函數圖形哪一個開口最大？
 (A) $y = 3x$ (B) $y = -x^2$
 (C) $y = -3x^2$ (D) $y = 6x^2$
- () 下列二次函數圖形哪一個開口最小？
 (A) $y = 5 - x^2$ (B) $y = 5x^2$
 (C) $y = -2x^2$ (D) $y = -\frac{1}{2}x^2$
- () $y = 8x^2 - 2$ 的圖形其頂點為何？
 (A) $(2, 0)$ (B) $(-2, 0)$ (C) $(0, -2)$ (D) $(0, 2)$
- () 下列哪一個圖形可能為二次函數 $y = -2x^2 - 5$ 的圖形？



- () 若兩拋物線 $y = -\frac{1}{3}x^2 + 2$ 及 $y = -\frac{1}{3}x^2 - 2$ 的頂點分別為 A、B，則 $\overline{AB} = ?$
 (A) 4 (B) 2 (C) 1 (D) 0
- () 關於二次函數 $y = -3(x - 2)^2$ 圖形的敘述，下列何者錯誤？
 (A) 其圖形為一拋物線 (B) 其圖形的頂點坐標為 $(2, 0)$
 (C) 其圖形的開口向下 (D) 其圖形的對稱軸為 $x = -2$

7. () 將二次函數 $y = -(x+2)^2$ 的圖形向右平移 2 個單位，得新的二次函數為何？
(A) $y = -(x+4)^2$ (B) $y = -x^2$ (C) $y = -(x-4)^2$ (D) $y = x^2$
8. () 將二次函數 $y = x^2$ 的圖形，向右平移 5 個單位，再向下平移 2 個單位，得新的二次函數為何？
(A) $y = (x-2)^2 + 5$ (B) $y = (x+5)^2 + 2$ (C) $y = (x+2)^2 - 5$ (D) $y = (x-5)^2 - 2$
9. () 將二次函數 $y = -2x^2$ 的圖形，如何平移可以得到 $y = -2(x+8)^2 + 3$ 的圖形？
(A) 向右平移 3 個單位，再向上平移 8 個單位
(B) 向右平移 8 個單位，再向上平移 3 個單位
(C) 向左平移 3 個單位，再向下平移 8 個單位
(D) 向左平移 8 個單位，再向上平移 3 個單位
10. () 將二次函數 $y = \frac{1}{2}(x-2)^2 + 3$ 的圖形向下平移 5 單位，再向右平移 2 單位，可以得到二次函數的圖行為？
(A) $y = \frac{1}{2}(x-4)^2 - 2$ (B) $y = \frac{1}{2}(x-7)^2 + 5$ (C) $y = \frac{1}{2}(x+4)^2 + 2$ (D) $y = \frac{1}{2}(x-2)^2 - 5$

_____年 _____班 座號：_____ 姓名：_____

範圍：1-1 二次函數的圖形

得分：

- () $y = 2x^2$ 的圖形向左平移 5 個單位，得新的二次函數為何？
 (A) $y = 2(x + 5)^2$ (B) $y = 2x^2 + 5$ (C) $y = 2(x - 5)^2$ (D) $y = 2x^2 - 5$
- () 將二次函數 $y = x^2$ 的圖形，向右平移 1 個單位，再向上平移 3 個單位，得新的二次函數為何？
 (A) $y = (x - 1)^2 + 3$ (B) $y = (x + 1)^2 + 3$ (C) $y = (x + 1)^2 - 3$ (D) $y = (x - 1)^2 - 3$
- () 下列哪一個函數圖形有最低點？
 (A) $y = -x + 3$ (B) $y = -2x^2 + 3$ (C) $y = 5x - 3$ (D) $y = x^2 - 3$
- () 關於二次函數 $y = 3(x - 5)^2$ 圖形的敘述，下列何者錯誤？
 (A) 其圖形為一拋物線 (B) 其圖形的頂點坐標為(0, 5)
 (C) 其圖形的開口向上 (D) 其圖形的對稱軸為 $x = 5$
- () $y = 5x^2 - 2$ 的圖形其頂點為何？
 (A) (2, 0) (B) (-2, 0) (C) (0, -2) (D) (0, 2)
- () 下列二次函數圖形哪一個開口最大？
 (A) $y = 3x$ (B) $y = -3x^2$
 (C) $y = -3x^2$ (D) $y = 2x^2$
- () 將二次函數 $y = -2x^2$ 的圖形，如何平移可以得到 $y = -2(x - 5)^2 + 3$ 的圖形？
 (A) 向右平移 5 個單位，再向上平移 3 個單位
 (B) 向右平移 3 個單位，再向下平移 5 個單位
 (C) 向左平移 5 個單位，再向上平移 3 個單位
 (D) 向左平移 3 個單位，再向下平移 5 個單位

8. () 已知坐標平面上有二次函數 $y = 2x^2 + 4$ 的圖形，今將此圖形沿著 x 軸對摺得到新圖形，則關於新圖形的敘述，下列何者正確？

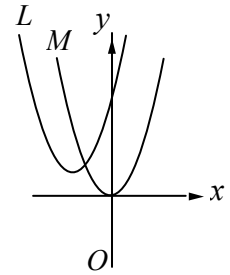
- (A) 開口向下，頂點為 $(0, 4)$
 (B) 開口向下，頂點為 $(0, -4)$
 (C) 開口向上，頂點為 $(0, 4)$
 (D) 開口向上，頂點為 $(0, -4)$

9. () 將二次函數 $y = -(x + 1)^2$ 的圖形向左平移 2 個單位，得新的二次函數為何？

- (A) $y = -(x + 3)^2$ (B) $y = -(x + 1)^2$ (C) $y = -(x - 3)^2$ (D) $y = (x - 1)^2$

10. () 如圖，拋物線 $y = 3x^2$ 的圖形為 M ，若將 M 平移後得一拋物線 L ，則拋物線 L 的二次函數可能為下列何者？

- (A) $y = 3(x + 2)^2 - 1$ (B) $y = 3(x + 2)^2 + 1$
 (C) $y = 3(x - 2)^2 - 1$ (D) $y = 3(x - 2)^2 + 1$



Wu, P. C., & Hsieh, F. J. (2023).

The gap between the demand for understanding introductory economics textbooks and the supply of high school mathematics– Use graph representations as examples.

Taiwan Journal of Mathematics Education, 10(1), 57–82.

doi: 10.6278/tjme.202304_10(1).003

The Gap Between the Demand for Understanding Introductory Economics Textbooks and the Supply of High School Mathematics– Use Graph Representations as Examples

Pei-Chen Wu Feng-Jui Hsieh

Department of Mathematics, National Taiwan Normal University

This study employed content analysis on one popular introductory economics textbook to explore whether the graph representations in the textbook match those taught in school mathematics. We analyzed the external and internal representations of coordinate graphs in one of the most math-related chapters. The results showed that neither the various external displays nor the internal imagistic kinesthetic representations used in the economics textbook were sufficiently provided in school mathematics. In economics, the ways of labeling variables, segments, lines, and axes are relatively free and do not match those used in mathematics. Static display representations are often used to express the dynamic/action of objects in graphs, which are usually not emphasized in school mathematics. Students have to construct imagistic kinesthetic representation internally when reading graphs in economics textbooks and this experience is not usually provided in school math classes. This study raised an alert to mathematics educators that the traditional way of using and teaching mathematics representations might be reconsidered in the era of interdisciplinarity.

Keyword: internal representation, textbook analysis, imagistic kinesthetic representation, economics readiness, graph representation

Corresponding author : Pei-Chen Wu · e-mail : mgsky626@gmail.com

Received : 17 January 2023;

Accepted : 14 April 2023.

吳珮蓁、謝豐瑞（2023）。

高中數學與大學經濟學課本之間的供需落差—以圖形表徵為例。

臺灣數學教育期刊，10（1），57-82。

doi: 10.6278/tjme.202304_10(1).003

高中數學與大學經濟學課本之間的供需落差— 以圖形表徵為例

吳珮蓁 謝豐瑞

國立臺灣師範大學數學系研究所

本研究探討大學一年級經濟學課本中的圖形表徵是否與學校數學學過的圖形表徵一致。研究採內容分析法，分析課本中與數學最相關的一章中坐標圖形的外在表徵與內在表徵。研究結果發現，經濟學中常使用的各樣外在表徵與內在想像動態表徵在學校數學中並未充分涵蓋。經濟學在變數、線段、線及坐標軸的標記方式較為隨意，與數學用法不盡相同。經濟學中會用靜態的表徵來表示圖形中動態的物件，這是數學中不強調的；在經濟學，學生需要建構內在想像動態表徵來理解圖形，但學校數學並未提供這樣的學習經驗，此研究結果給數學教育者一個警示：數學教育應重新思考數學表徵的使用與教學以符應當今重視跨學科學習的時代。

關鍵字：內在表徵、教科書分析、動態表徵、經濟學準備度、圖形表徵

通訊作者：吳珮蓁，e-mail：mgsky626@gmail.com

收稿：2023年1月17日；

接受刊登：2023年4月14日。

I. Introduction

“ $Q^D = f(P; \text{other factors})$ or $Q_x = f(P_x, \text{related goods, income, preference})$ ” is defined as a demand function, accompanied by its curve with P on the vertical axis and Q on the horizontal axis in most introductory economics textbooks (Chang et al., 2000; Eastin & Arbogast, 2020). Is D in the expression of an exponent? Is $f(P; \text{other factors})$ something like a function $f(x)$ learned in high school? Should we consider “ P ” as an independent variable? Why is the independent variable on the vertical axis? Students may ask these questions when they first see this function and its graph because these differ from the conventions taught in high school mathematics.

Economics is one of the basic college courses using mathematics. The majority of students who majored in social science will take introductory economics in their first year in college. Students’ performance in mathematics was found to have a positive impact on students’ performance in economics (Mumuni et al., 2010). Many studies pointed out that students’ algebra and graphing abilities affected their performance in college-level economics courses (Crowley & Wilton, 1974; Espey, 1997).

It is very often that new concepts are introduced with different kinds of mathematics representations, such as math expressions, tables, and graphs, in an economics textbook. It has been examined that the use of graphs in economics classes would benefit students when learning the principles of economics (Cohn et al., 2001). Therefore, understanding the related math contents, the mathematical graph and symbol representations is the keystone to learning economics. However, studies showed that students faced difficulties in economics graphs. Veloo and Md-Ali (2015) showed that pre-university students faced greater difficulty with graph items compared to economic problem-solving items in an economic achievement test. Khoo (2008, as cited in Veloo & Md-Ali, 2015, p. 264) pointed out that pre-university economics students frequently faced difficulties in understanding the described graphs.

Moreover, freshman-year math focuses on calculus and/or linear algebra, which are not directly related to graph representation in basic economics courses. Are the mathematical graph representations learned in high school enough for college readiness, such as in economics? There are few, if any, papers illustrating the mathematical representations involved in learning economics, so this study would like to initiate this kind of research to explore the discrepancy between the graph representations and their corresponding functions used in mathematics and those used in economics. The relationships of linear functions and the interpretations of their translations are massively discussed in the introductory economics textbooks, so the linear functions will be the focus of this study.

The main research questions are: What are the major differences between the coordinate graph representations of linear functions in the introductory economics textbooks and the representations introduced in high school mathematics classes?

II. Literature review

1. College readiness and mathematical representations

One of the goals of high school mathematics education is to prepare students for college and career readiness. A study (Siri et al., 2016) showed that mathematics was one of the most problematic subjects relating to the transition from high school to university. Researchers have proven that mathematics played a crucial role in learning economics (Velupillai, 2005). This study would like to investigate the gap between high school mathematics and college economics.

Kao (2009) examined the gaps between an introductory economics textbook and high school mathematics textbooks. Most of the math-related contents, including the first derivative and the instantaneous rate of change, were covered in high school mathematics, except the topic of “total derivatives”. This gap is not taught in high school and will not be learned in the first year of college calculus until the very last chapters. Besides the analysis of the learning sequence, researchers would like to investigate the gap from the viewpoints of mathematical representations.

Economists explain the concept with words, equations, tables, charts, and mostly graphs. Stern et al. (2003) found that active graphical representation was a powerful tool to transfer knowledge from one economic content area to another. Those learners with high mathematical competencies benefited more from actively constructing graph representations.

Studies (Veloo & Md-Ali, 2015; Zetland et al., 2010) pointed out the difficulties of learning graphs in economics. Johari et al. (2018) found that students had problems visualizing complex graphs and interpreting data in the graph when learning economics. Cohn et al. (2004) examined students' attitudes toward graphs and the relationship between attitudes and learning in the one-semester college introductory economics course. They found that students who had problems reading and interpreting graphs in economics scored poorly in economics courses. These graphs were highly related to linear functions learned in mathematics. Some mathematics studies showed that students faced difficulties when learning linear functions and interpreting cartesian graphs (Postelnicu, 2011). Nathen et al. (2002) found that students showed a lower level of performance in drawing holistic graphs (line or exponential curves) than instance-based graphs (scatter plots). The possible reasons for economics graph-learning difficulties could be the complexity of economics graphs, the ability to “decode” graphs by connecting an economics graph to a similar prior-learned mathematics graph, the difficulties of learning linear functions, etc.

The visible, concrete graph is one of the external representations. The external representations refer to embodied, observable configurations, such as concrete objects, visible images, equations, verbal forms, manipulatives, and computer operations (Goldin & Kaput, 1996; Hiebert & Carpenter, 1992). Different kinds of external representations were studied with various types of configurations (Heddens, 1984; Lesh et al., 1987; Niss, 2003). In a graph representation, learners' actions such as reading,

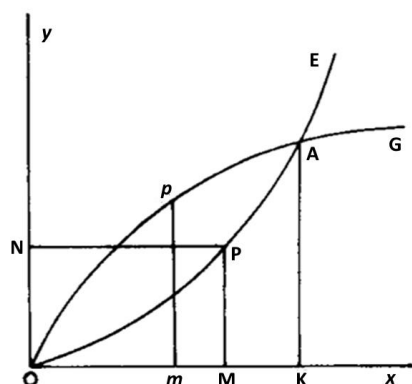
interpreting the meaning of equations, analyzing the slope and intersections, and drawing inferences from graphs in the real world, are anchored by internal representations. The internal representations are the invisible configurations that are encoded in the human brain, and they dominate the interpretation of external representations (Goldin & Kaput, 1996).

Goldin and Kaput (1996) rejected the view that mathematical meaning was inherent in external representations and instead, they proposed the view that mathematical meaning given to external representations was the product of students' interpretive activity. Therefore, Goldin and Kaput (1996) not only distinguished the internal representations from the external representations but also discussed the interactions of the internal and the external representations in imagistic systems and formal systems. They stated that the construction of formal internal representations mostly depended on the interactions between formal and rule-based systems. The external display representations could be linked via internal representations. This linking could be constructed in the mind of a person, and could also be achieved by interactive media. Besides, internal tactile/kinesthetic representation, one of the imagistic cognitive representational systems, was employed to introduce the imagined physical actions by or on the person.

2. Economics graphical representations and elements

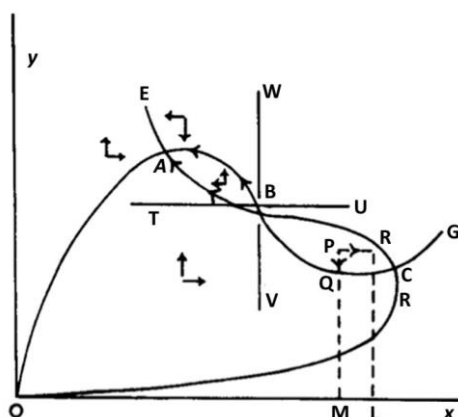
The graphical representations in economics were categorized differently in different studies (Chao & Maas, 2017; Demir & Tollison, 2015; Maas & Morgan, 2002). The focused category in this article can be named a causal dependency graph, theory graph, or law curve. These graphs depict the abstract functional relationships between variables, without using real data. This kind of graph exists thoroughly in the economics textbook that we are going to investigate. The famous Marshallian cross diagram is one of the classic economics graphs. The diagram was named after him due to his massive contributions to the design of the diagram (Humphrey, 1996). Therefore, Marshall's diagrams are exemplified for describing the different conventions of graphical elements between mathematics and economics.

Figure 1 shows the foreign trade between England and Germany. The value of all wares which England exported to Germany is measured in yards of cloth, the measurement on the horizontal axis. The value of all wares which Germany exported to England is measured in yards of linen, the measurement on the vertical axis. From mathematics perspectives: E and G refer to curves, x and y refer to the horizontal axis and the vertical axis, and M and N are points on axes. However, in *The pure theory of foreign trade*, curves are named OE and OG . The axes are named as rays, Ox and Oy . The names of points M , N , and P also represent the "length". At point P , the amounts of cloth or linen are represented by OM , ON , and PM . In addition to the curves and points, auxiliary lines are drawn to indicate the coordinates of the points.

Figure 1*Marshall's Figures: Law of International Demand*

Note. Adopted from “The pure theory of foreign trade,” by Marshall, 1879, *History of economic thought books*, p. 29 (<https://historyofeconomicthought.mcmaster.ca/marshall/foreigntrade.pdf>). In the public domain.

Figure 2 comprises two curves OE , OG , three intersections A , B , C , and many other objects. The graph is not limited to “function”, such as OE . This graph explains the status of the equilibrium between curves OE and OG . The unstable equilibrium, B , will move toward the stable position, either A or C . The power that moves B is explained as “forces” that act upon B . Arrowheads are inserted to indicate the directions of the forces which act upon the exchange index at different points. Arrowhead on the curve is to simulate the possible movement from B to A . Besides that, mini coordinate planes are planted in the original diagram. Straight line TBU is drawn from left to right and VBW is drawn vertically upward. This mini coordinate plane is to indicate the location of force by expressing quadrants TBW , VBW , etc.

Figure 2*Marshall's Figures: From Unstable Equilibrium to Stable Equilibrium*

Note. Adopted from “The pure theory of foreign trade,” by Marshall, 1879, *History of economic thought books*, p. 30 (<https://historyofeconomicthought.mcmaster.ca/marshall/foreigntrade.pdf>). In the public domain.

Economists had diverse opinions about the location of variables on the causal dependency graph. Take the demand function $Q = f(P)$ as an example. From mathematics perspectives, Q is a function of P , and the independent variable P should be represented on the horizontal axis. Some economists suggested the same way (Cournot, 1838/1897; Dupuit, 1844; Edgeworth, 1889). However, there were other voices. Wicksteed (1888) believed that the variables and function were changeable, in mathematical language, the independent variable and the dependent variable were switchable. Marshall (1879) regarded the opposite way of graphing, and he put Q on the x -axis and P on the y -axis in his diagram. They believed that both ways of graphing had their own interpretations and timing to use.

Dynamic changes are projected onto external representations through mental acts, which means one imagines the motion of the projectile (Goldin & Kaput, 1996). In economics, the models that directly consider the time factor are usually called dynamic (Safiullin & Safiullin, 2018). Schumpeter (1954) defined a relation as dynamic if it connected economic quantities that referred to a different point in time. The dynamic functional relation could be written as $S_t = f(P_{t-1})$ (Ahuja, 2017).

Some “imagined dynamic” motions exist in the graph when defining the stable equilibrium. The equilibrium state of an economy is defined as “static,” while the explanation of the movement of industry and trade is defined as “dynamic” (Chao & Maas, 2017). In the graph of stable equilibrium of trade between two countries, Marshall (1879) stated that when the exchange index struck either of the curves in the neighborhood of the equilibrium point, the forces acting on the index tended to “make it oscillate” along the curve toward the equilibrium point. He also analogized the process of “moving” to a mechanics case: “A body may pass through a position of unstable equilibrium on its way toward a position of stable equilibrium”. Points are not really oscillating on the graphs, but with the readers’ mental act, points are moving. This mental activity is similar to the internal kinesthetic representation proposed by Goldin and Kaput (1996). The dynamic manner in which a path from disequilibrium to equilibrium draws attention in economics classes, while the final static intersection of curves is more concerned in math classes.

III. Research method

Since Goldin and Kaput (1996) and Goldin (1987) cumulated and restructured most, if not all, types of representations used in mathematics and mathematics learning, this study based on the types of representational systems from Goldin and Kaput’s studies (Goldin, 1987; Goldin and Kaput, 1996) to analyze the characteristics of graphical representations in economics. In this article, we discussed the discrepancies between the graphical representations in economics and similar graphical representations in mathematics. The researchers chose similar graphical representations in mathematics for comparison because Goldin and Kaput mentioned that when facing representations, we followed those paths of thought that had been previously constructed. The representations in which they were encoded were “available” to us. “Other paths that have never been constructed were not even considered as alternative

thoughts, because they are beyond the realm of present imagination.” Therefore, students have nearly no path to follow to understand the economics graphs if they do not refer to similar representations, especially those relating to functions, taught in high school math classes. The relationship between the supply of high school mathematics and the demand for understanding college economics textbooks becomes a critical issue.

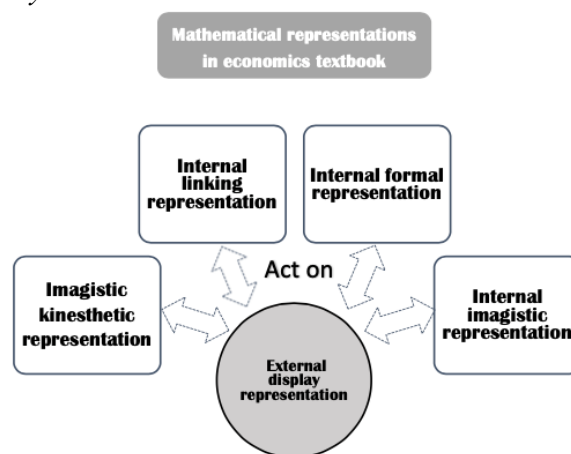
1. Conceptual framework

This research adopted the framework of the system of mathematics representations introduced in Goldin and Kaput’s studies (Goldin, 1987; Goldin and Kaput, 1996). In the focus group discussion (see below in the design and subject session), participants previewed the four economics cases that would be analyzed and excluded the representations which are irrelevant to static textbook analysis from Goldin and Kaput’s studies, such as external action representation, internal auditory/rhythmic representation, internal tactile representation, etc. Then, participants chose the representations that can highlight the differences between mathematics and economics conventions to form this framework, such as external display representations. Participants chose the internal representations to describe the mental configurations which might occur in the process of understanding economics graphs and their functions, such as linking representation, imagistic representation, and internal formal representation. Then, participants renamed some representations based on features, such as imagistic kinesthetic representation focusing on actions, while internal imagistic representation focusing on a static image.

The framework is used to guide the analysis of coordinate graphs in economics textbooks. The framework (Figure 3) included external and internal representations. External representations focus on display representation. Internal representations focus on linking representation, imagistic representation, imagistic kinesthetic representation, and formal representation. Internal representations act on external representations.

Figure 3

The Framework of This Study



Goldin and Kaput (1996) and Goldin (1987) provided the following explanations regarding the system of representations used in our framework. Examples from economics were provided by the authors of this article for clarification. External representations refer to concrete, observable, and physical configurations, such as graphs, equations, tables, manipulatives, etc. The only category we used here is the external display representation. Internal representations refer to possible and not externally observable mental configurations of individuals. Four focuses of our analysis are listed below.

External display representation: the representation used to display relationships between objects, and variables, such as graphs, tables, functions, etc. In the economic context, the demand curve shows the graphical relationship between the quantity demanded and price. The investment function $I = I(i, Y)$ shows that the investment (I) is determined by income (Y) and the marginal propensity to invest (i).

Linking representation: the internal representation that learners can integrate, convert the cognitive structures or mentally link among external representations. External display representations might be linked in the mind of the person who produced them or who reads them (Goldin & Kaput, 1996). Given one external representation, learners interpret and construct the internal configuration or meaning of it. This representation can be used to predict, identify, or produce different external representations of the same entity.

In the economic context, the link between the demand function, demand curve, and demand table can be exemplified. Learners can interpret the graph of the function, and translate the graph into a table. These representations, which show the same quantitative relationship between quantity demanded and price, are being linked by the person who read them. The flexibility of linking and switching among multiple representations benefits learners while solving mathematical problems, and enables learners to understand math notation more effectively (Heinze et al., 2009). More examples of flexibility will be illustrated in the results.

Internal imagistic representation: the representation “included internal imagery, image-schematic representation” (Goldin & Kaput, 1996). They are the internal images when referring to a concept. For example, an imagistic representation of the axiom of equality might be a balance. With the image and mechanism of balance, learners would understand that adding a number on both sides of an equal sign balances the equation. This imagistic representation would help learners understand the axiom of equality easily. Sometimes, this kind of representation conveys meaning in an analogic way. For example, two lines that slant up from left to right are drawn, and the steeper one indicates the larger slope. Two points on the vertical axis are plotted, the high one indicates the larger y -value.

Imagistic kinesthetic representation: When the internal process of imagistic representation is further associated with a kinesthetic component, it is called imagistic kinesthetic representation. It is a dynamic representation, imagined physical actions by or on the person, to construct internal imagistic configurations that appropriately correspond to nonverbal configuration (Goldin & Kaput, 1996). For

example, when combining like terms in a quadratic polynomial, students may learn to put all like terms of x together in a parenthesis and all like terms of x^2 together in another parenthesis, as if they were moving the objects into different baskets. These terms are imagined to be moved into baskets like cargo with the learners' imagination.

Sometimes, imagistic kinesthetic representations exist in economics graphs, such as the imagined physical movement of points along the demand curve, indicating the change in demand quantity over price. The imagined physical movements of the whole demand curve indicate the translation of the curves and result in a new equilibrium. The points and the curves become vivid and dynamic with the learners' imagination. More examples will be illustrated in the research results.

Internal formal representation: "the internal representation associated with the construction and manipulations of formal notations" (Goldin & Kaput, 1996). Learners are able to perform the algorithm, discuss and explain symbol manipulation and rules, interpret formal notational descriptions such as symbolic statements and expressions imagistically, and visualize situations formally (Goldin & Kaput, 1996). For example, transform a given algebraic expression into its equivalent form by manipulating math symbols. The saving is the residual income (Y_d), which is not used for consumption (C). The saving function is defined as $S = Y_d - C$. By substituting the consumption function $C = C_a + cY_d$ in the equation, the saving function can be derived into another equation: $S = Y_d - C = Y_d - (C_a + cY_d) = -C_a + (1 - c)Y_d$. This revised format in terms of $y = b + mx$ reveals autonomous consumption (C_a) and marginal propensity to save ($1 - c$).

2. Design and subject

This study was conducted by the researchers in a focus group. The focus group contained six experts in mathematics education. The six experts include a professor, an assistant professor, three Ph.D. students with teaching experiences in high school, and one Ph.D. student with teaching experiences in middle school, ranging from 10 to 30 years. Two economics experts with more than 20 years of teaching experience in high school served as consultants regularly.

The method used to carry out this qualitative study is content analysis. The subject of this study is economics textbooks used in basic economics courses for freshman year. Researchers analyzed the economics textbook "*Economics: Theory and practice*" (Chang et al., 2000). This is one of the most popular textbooks in business schools in Taiwan. The book is written in Chinese, and co-edited by four professors of Economics at National Taiwan University. There are twenty-nine chapters. This study only analyzed Chapter 19, "The simple Keynesian model," in the book. The researchers considered the math relevance in each chapter. It was agreed by the researchers and two consultants who were economic experts that Chapter 19 was one of the chapters that contained the most math functions, equations, and complex graphs and that students required adequate math competency to learn this chapter. This article focuses on a sub-part of the study in which four special cases of graph representations were selected

based on criterion sampling (Patton, 2002) and were decided by five 3-hour sections of focus group discussion. The cases met the criterion of appearing to have at least three characteristics different from those in mathematics.

3. Data analysis

This study was conducted in two stages. The first stage was to develop the coding rubric for the external display representation. The characteristics of external display representation of the economics graphs we analyzed include: almost only the first quadrant being illustrated, no arrowheads being drawn on the axes, the independent variable being represented by the vertical axis, schematic diagram being drawn without real values of intercept and slope, multiple auxiliary lines in the graph, the labeling method of an object being various, the value of function sometimes being represented by a line segment. Therefore, the 13-coding rubric for external display representation included quadrant, axis arrowhead, axis label, axis variable, point coordinate, segment label, auxiliary line, characteristic of the line (schematic graph or authentic graph), and representation of the value of the function.

The second stage was to code the chapter's graphs according to the analytical units. Any graph stands alone as an analytical unit, except those that are a series of graphs expressing the same concept with only minor changes. The numbers of codes were summed up for each category of representations. Data triangulations were conducted with three other coworkers and six 3-hr focus group discussion sections, each including at least six experts in mathematics education. Two economics experts served as consultants continuously. Criterion sampling was further used to select special cases for deeper qualitative analysis, which meet the criterion of appearing to have at least three characteristics different from those in mathematics (Patton, 2002). This article reports the analytical results of the four cases selected through criterion sampling.

The conventions of mathematical representations are quite consistently applied in Taiwan's mathematical education, so scholars and experts should be familiar with them. These mathematical conventions are not the focus of this article. However, to provide more rigorous pieces of evidence in comparison, this study analyzed the graph representations in one collection of best-selling high school textbooks for reference. The graphs in this study focus on the relationships between linear functions and their translations, so the researchers analyzed the graphs of polynomial functions taught in high school, which are more relevant to the foundation of understanding linear functions. The analysis results will be described shortly when mentioning comparisons between mathematics and economics representations.

IV. Research result

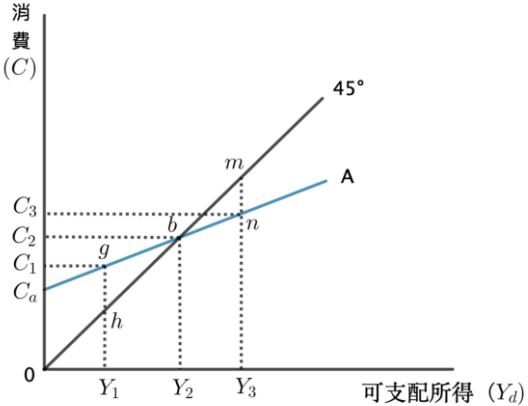
This article aims to provide initial qualitative results that may show extreme characteristics of graph representations in economics and their relationships with math representations that enable readers to gain a deep understanding and insights. We provide statements regarding the characteristics of the graph representations of four selected cases. These four cases are from three different sections and relate to the determination of the equilibrium point. We illustrate these cases by the external display characteristics which are different from mathematics conventions and two of the internal representations. To introduce these four internal representations thoroughly and fairly, each case is illustrated by two of the internal representations, and each internal representation is reported two times in this article. These four cases will be carried out in a sequence of textbook page numbers.

Some economics content is taught in high school Civics and Society. The most related content to this study is “supply and demand.” In an unpublished document (Chang, 2023) consisting of economics graphs from all high school Civics and Society textbooks, researchers found that the high school level content only covers the basic concepts and basic graphs, and the graphs in this study are not covered in high school. According to the interview with “some” Civics and Society teachers, they “don’t” focus much on graphs while teaching. The graphs in this study are new to learners when they first learn this chapter in college (only translations of curves have been introduced in the previous chapters), therefore they have to apply these representations to read and understand the graphs.

Case 1: Consumption function

The consumption function $C = C_a + cY_d$, line A (see Figure 4), shows the relationship between consumer spending (C) and disposable income (Y_d). C_a is autonomous consumption, a positive value that represents the expenses that consumers must spend even when they have no disposable income. c is the marginal propensity to consume, a value between 0 and 1. The consumption increases while the disposable income increases; the increment of consumption is less than the increment of disposable income. The 45° line is drawn for reference, and it shows all points where disposable income and consumption spending are equal. The intersection of line A and the 45° line, b, determines the equilibrium.

Figure 4
Consumption Function

Case 1: Consumption function	External display representations which are different from mathematical conventions
	<ul style="list-style-type: none"> ● Arrowhead: No arrowheads at the end of axes ● Line labeling: Line are labeled as C_aA, and 45° line ● Segment labeling: Segment bA, Segment Obm ● Value of function: When the disposable income is 0, the value of consumption is OC_a. When the disposable income is Y_1, the value of consumption is gY_1. ● Line characteristic: <ol style="list-style-type: none"> (1) The intercept and slope of A are not given numbers. (2) The line is written in form of $y = a + mx$, not $y = mx + a$

Note. The graph is adopted from *Economics: Theory and practice*, by Chang et al., 2000, p.105.

External representation

The display representations between mathematical labeling and economic labeling for the same object have many differences. In mathematics, labeling various constituents of the Cartesian coordinate plane has its rules. Conventionally, lines are labeled by a letter or by expressing two points that the line passes through, with a line notation. Line segments are labeled by expressing the two endpoints of the segment, with a segment notation. For example, \overline{AB} represents the line segment from point A to point B, \overleftrightarrow{AB} represents the line passing through point A and point B, or simply line l . The y -intercept is written as point notation $(0, y)$ or just the value of y .

However, the conventions of labeling segments are relatively free in economics. Segments in the graph are named C_aA , bA , and Obm when mentioned in the textbook. The external display representations are listed in Figure 4. The line segments on the coordinate plane can be labeled with a combination of the point on the coordinate axes and the label of the line (such as C_aA), or a combination of the intersection point and the label of the line (such as bA). Occasionally, lines may be labeled by expressing more than two points (such as Obm). The variety in labeling is conjectured that the label of the point has multiple roles. A is not only the label of the line but also the endpoint of the line segment. C_a is not only a value or a point on the y -axis, but also the endpoint of the line segment OC_a . The points on the coordinate plane become part of geometric elements, such as lines or segments. The difference between a line segment and a line seems not to be a big deal in economics. Learners are suggested to have some flexibility towards math-related objects when learning economics.

The displays of the quadrant and the arrowheads on the axes seem different in these two fields. Most of the functional graphs in mathematics textbooks display more than one quadrant and display arrowheads on the axes. Among functional graphs in high school textbooks, 88% of the graphs display four quadrants, and 2% display one quadrant. Regarding the arrowheads on the axes, 91% of the graph displays arrowheads at the ends of the axes. The rest of the graphs, which discuss the concavities and extrema, only show the curve itself and points of inflection, without axes and their arrowheads. However, among the graphs in this economics chapter, 86% of graphs display only one quadrant, and 14% display two quadrants. 100% of the economics graphs don't display arrowheads at the ends of axes.

Linking representation

Without any given numbers for the y -intercept, slope, or any points in the consumption function $C = C_a + cY_d$, the function can still be schematically sketched on the plane. We have the schematic drawing in math, and we usually have $y = mx + b$ as the equation. To extinguish the y -intercept or slope from several unfamiliar parameters, learners can link the external representation of $C = C_a + cY_d$ with the representation of the line equation $y = b + mx$ to help them read the graph and the function. Since the x -axis represents Y_d , and the y -axis represents C , learners can compare the coefficients and realize that the slope is c and the y -intercept is C_a . The different conventions of linear equations in mathematics and economics will be mentioned later.

The 45° line is drawn for reference to compare the disposable income and the consumer spending at a different level of Y_d . Learners must link this representation with the $y = x$ line representation learned in mathematics in order to understand that the points h , b , and m on the 45° line have equal horizontal and vertical distances, respectively.

Internal imagistic representation

When comparing the disposable income and the consumer spending at a different level of Y_d with the 45° line, an imagistic representation of a right isosceles triangle should be activated. When the disposable income is Y_1 , the auxiliary line leads to point g , with consumer spending C_1 . The right isosceles triangle OhY_1 helps convert the length from OY_1 to hY_1 , and convert the point Y_1 to h . Therefore, learners just need to compare h and g , instead of Y_1 and C_1 . With the same method, learners just need to compare m and n , instead of Y_3 and C_3 . The higher points have a larger value.

Learners must be aware that line A is not a fixed line, but rather is changeable according to different values of slope and intercept. The current line A has a slope of less than 1. Learners must create an image that the consumption line may change to a steeper or smoother line if slope c changes. Learners also need to create an image of the effect of y -intercept C_a on line A.

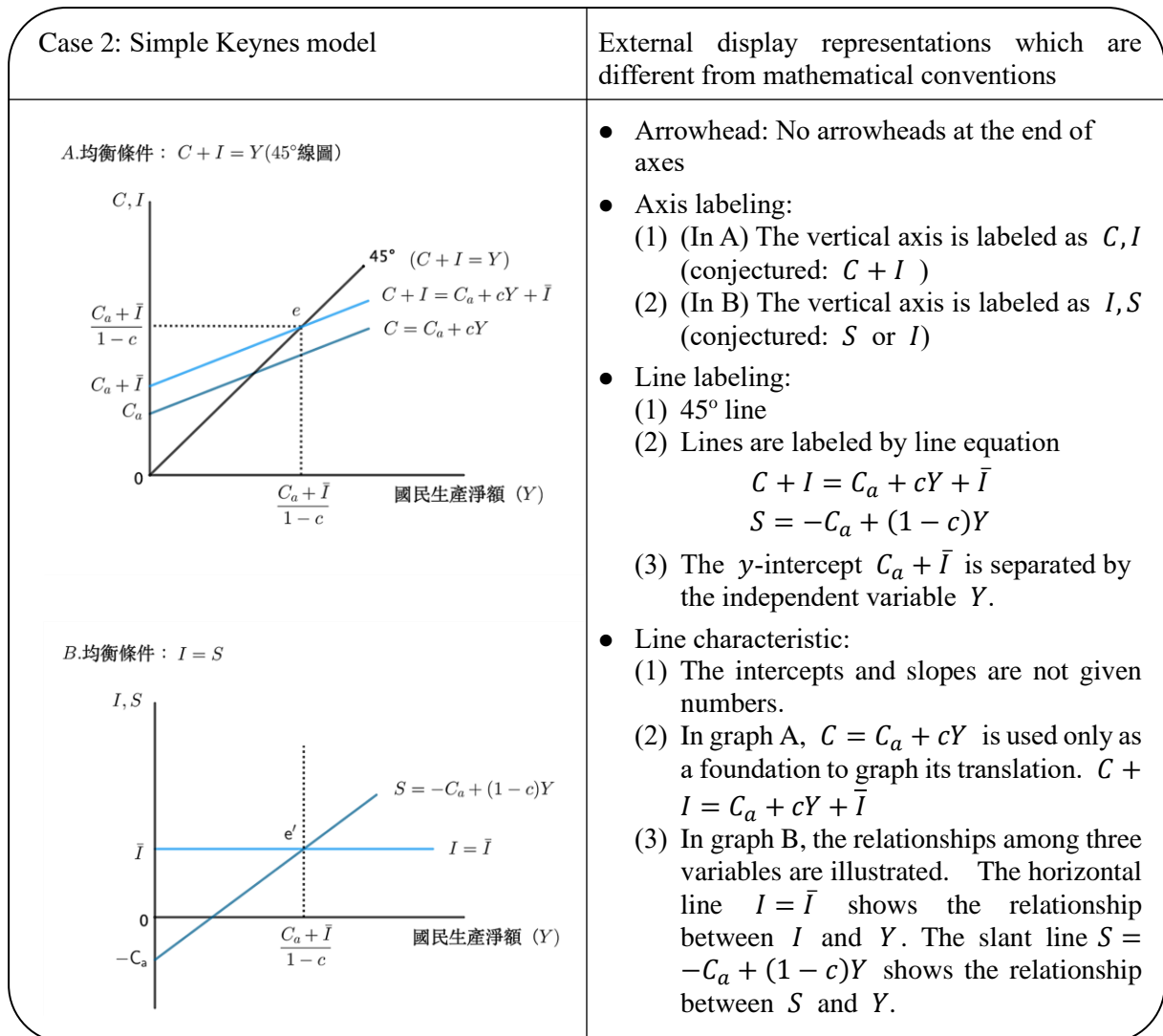
When slope c is defined as a value between 0 and 1, the imagistic representation of line comparison should be activated to understand the reason why c should be between 0 and 1. We all know

that people who earn more money, even if they spend a lot, still save more money; that is, they have more money in their disposable income than they spend. This situation may be seen from the imagistic representation of the comparison of the steeper 45° line and the less steep consumption function. In mathematics, we prefer to use a more formal way to derive the slope: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta C}{\Delta Y_d} < 1$, since the increment of consumption is less than the increment of disposable income.

Case 2: Simple Keynes model

This case is to describe the determination of equilibrium under the simple Keynes model (Figure 5). The determination of equilibrium income can be determined by two methods: $C + I = Y$ (graph A) or $I = S$ (graph B).

Figure 5
The Determination of Equilibrium Income



Note. The graph A and graph B are adopted from *Economics: Theory and practice*, by Chang et al., 2000, p.118.

In graph A, the horizontal axis is national income, Y . The vertical axis is aggregate demand, $C + I$, the sum of consumption and investment (investment can be viewed as saving or a future benefit that could lead to future consumption), respectively. The graph shows that the intersection of the 45° line, $Y = C + I$, and aggregate demand curve $C + I$ is the equilibrium point.

In graph B, the horizontal axis is national income, Y . The national income is determined at the equilibrium point when saving (S) equals investment (I), $I = S$. The investment is a constant number, $I = \bar{I}$. The saving function was derived in the textbook as $S = -C_a + (1 - c)Y$. Graph tells us that the intersection of S and I is the equilibrium point.

Internal formal representation

Internal formal representation is required when reading these graphs. To understand the coordinates of the equilibrium points, learners must be familiar with the variables and their meanings, manipulate the symbols, and work on the algorithm. Three equations under the simple Keynes model are as follows:

- (1) $Y = C + I$ The national income (Y) is the sum of consumption (C) and investment (I).
- (2) $C = C_a + cY$ The consumption function (C) is determined by national income (Y), while $C_a > 0$ is autonomous consumption, c is the marginal propensity to consume, $1 > c > 0$
- (3) $I = \bar{I}$. The investment is a constant number (\bar{I})

Graph A indicates that the solution of the system of linear equation $\begin{cases} C + I = Y \\ C + I = C_a + cY + \bar{I} \end{cases}$ is the equilibrium point. Learners have to substitute one equation to the other, obtain the equation $Y = C_a + cY + \bar{I}$, and get the answer $Y = \frac{C_a + \bar{I}}{1 - c}$, which is the x -coordinate and y -coordinate of the equilibrium

point. Graph B indicates that the solution of the system of linear equations $\begin{cases} S = -C_a + (1 - c)Y \\ I = \bar{I} \\ I = S \end{cases}$ is the equilibrium point. Learners have to solve the equation to obtain the answer $Y = \frac{C_a + \bar{I}}{1 - c}$, which is also the x -coordinate and y -coordinate of the equilibrium point.

External display representation hinders internal linking representation

In this case, the display representation of labeling and indication of the vertical axis is different from mathematical conventions. The vertical axis is labeled by " C, I " in graph A, and " I, S " in graph B; while the vertical axis is usually labeled by " y ", a single independent variable. In economics, due to the complexity of equations, the y -intercepts consist of variables and constants, such as C_a , $C_a + \bar{I}$, $-C_a$. In mathematics, y -intercepts are usually marked with real values, or in form of y_i which represents an unknown value. In the equation $C + I = C_a + cY + \bar{I}$, the y -intercept, $C_a + \bar{I}$ is separated by the independent variable, which barely exists in math classes. These differences hinder learners to apply

linking representation to interpret the representation and construct internal configurations which can be used to identify different external representations of the same entity.

The axis is labeled by “ C, I ” in graph A, and “ I, S ” in graph B. Two variables are indicated on the vertical axis at the same time, while only one variable, usually y , is indicated in mathematics. Without other descriptions, learners may refer to the union of variables “ C or I ”, the intersection of variables “ C and I ”, or another condition. These labeling methods hinder learners’ interpretation of the dependent variables. However, the equation $C + I = C_a + cY + \bar{I}$ and its y -intercept $C_a + \bar{I}$ reveal that the vertical axis indicates the value of “ $C + I$ ”. If learners notice these representations, then they will be able to link the math ways of representing the y -intercept and y -axis and refer “ C, I ” to “ $C + I$ ”. However, this linking process cannot be applied to Graph B, because the only shown y -intercept is \bar{I} , a constant value of I , while the dependent variable in the equation $S = -C_a + (1 - c)Y$ is S ; these two labels do not match a consistent dependent variable. For graph B, when $Y = 0$, the equation $S = -C_a + (1 - c)Y$ becomes $S = -C_a$. The y -intercept $-C_a$ tells that the vertical axis is S . However, the equation $I = \bar{I}$ also tells that the vertical axis is I . Due to the equivalence of I and S , the labeling “ I, S ” should be referred to as “ I or S ”. This is never a representation used in mathematics.

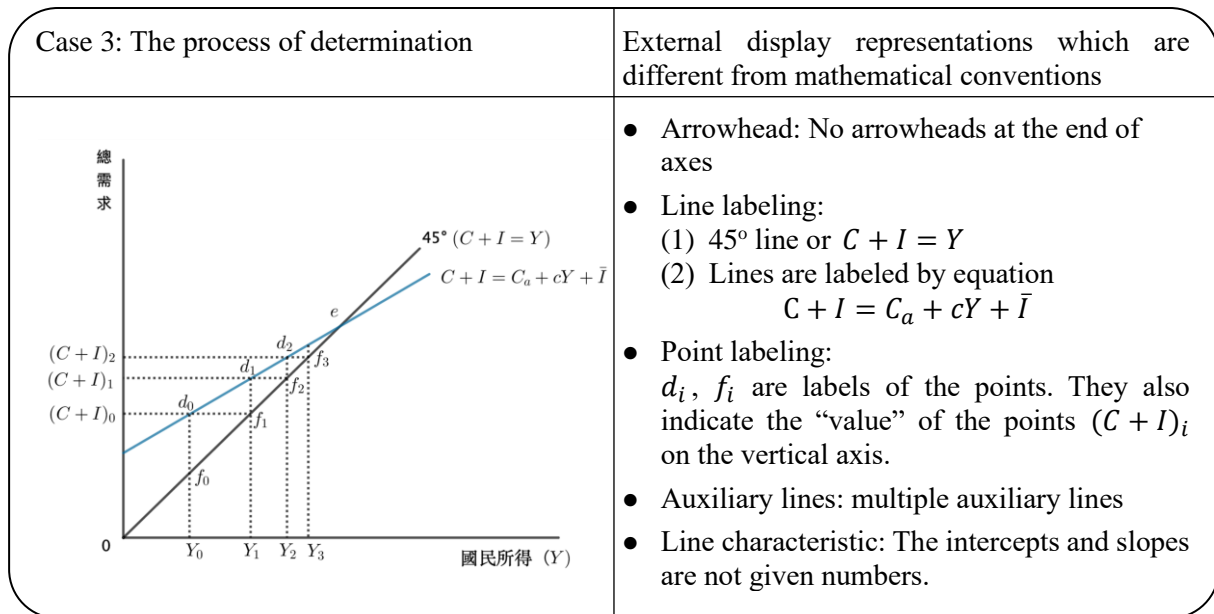
The linking between different conventions might be disturbed by the complexity of curves and massive graphical information loadings. In graph A, the line equation $C = C_a + cY$ is used only as a reference function to graph its translation $C + I = C_a + cY + \bar{I}$. The equilibrium point of graph A has no direct relevance to the line $C = C_a + cY$. Learners must distinguish the useful ones from massive graphical information. In both graphs, the linear equations describe the relationship among three variables: C, I, Y in graph A, and I, S, Y in graph B. In high school math, only two variables are described in the coordinate plane, and three variables are described in space.

Case 3: The process of determination

In Figure 6, the horizontal axis is national income, and the vertical axis is aggregate demand. The $C + I$ curve shows the desired level of demand by consumers. $C + I$ means the sum of consumption and investment, respectively. $(C + I)_i$ on the vertical axis, corresponding to each level of national income, and Y_i on the horizontal axis. The equilibrium is at the point where the level of national income equals aggregate demand.

Figure 6

The Process of the Determination of the Equilibrium Level of Income



Note. The graph is adopted from *Economics: Theory and practice*, by Chang et al., 2000, p.120.

External representation

The labels which are not on the axes, such as d_i, f_i , indicate a point and also a value at the same time (Figure 6). However, it is not easy to tell whether it represents its x-coordinate or its y-coordinate. In this case, it is not obvious whether d_i, f_i correspond to $C + I$ or Y . In addition, the expression $(C + I)_0$ is seldom seen in math classes. The value of the independent variable is usually written explicitly, such as $(f + g)(x_0)$, not $(f + g)_0$. Besides, the expression of $(f + g)(x_0)$ or $(f + g)_0$ is barely adopted on the vertical axis in math classes. It would be difficult for learners to link this kind of representation to something they have learned in math classes.

Imagistic kinesthetic representation

The equilibrium point is the intersection between line $C + I$ curve and 45° line. The point seems static. However, the process of determining the equilibrium level of income is dynamic. The imagistic kinesthetic representation is working in our brain when we read the process.

When the national income is Y_0 , the corresponding demand is d_0 , which is the value of $(C + I)_0$. The value of Y_0 equals f_0 on the 45° line. We can tell that $d_0 > f_0$, demand is greater than the national income, $(C + I)_0 > Y_0$. The national income is defined as “supply” in the textbook. When the demand d_0 is greater than the supply Y_0 , the factory will produce more to meet the demand. Then, the national income will increase to f_1 , in order to match the value of d_0 to become a state of balance. But when national income reaches f_1 , which is Y_1 , the corresponding demand becomes d_1 , $(C + I)_0$ changes

to $(C + I)_1$. Again, when $d_1 > f_1$, the factory will produce more to meet the supply. The national income will increase to f_2 , in order to match the value of d_1 for balance. But when national income reaches Y_2 , the corresponding demand becomes d_2 ; $(C + I)_1$ changes to $(C + I)_2$. After repeating a few cycles, the differences between d_i and f_i are getting smaller, until they are equivalent. At this moment, when the national income equals aggregate demand, there exists the equilibrium point, the intersection of the $C + I$ curve, and the 45° line.

The point is moving along the path: $d_0 \rightarrow f_1 \rightarrow d_1 \rightarrow f_2 \rightarrow \dots$, until it reaches the equilibrium point e . It seems that learners should wear a pair of special glasses which allow them to see the activities of the points. Taking off the glasses, learners see nothing, but static points lying on the coordinate plane. These physical actions are imagined by the readers, which is the imagistic kinesthetic representation.

Among functional graphs in high school textbooks, 37% of the functional graphs have auxiliary lines. The dashed auxiliary lines show the coordinates of the points or the axis of symmetry of the function. Some auxiliary lines with arrowheads indicate the translation of one function. However, these dashed lines in economic graphs can even show the interaction between two functions and indicate the trace and direction of movements. The existence of lines helps carry out the kinesthetic representation.

Internal imagistic representation

The internal imagistic representation of “limit” is evoked in this case. The movement of the point from $d_0 \rightarrow f_1 \rightarrow d_1 \rightarrow f_2 \rightarrow \dots$ until the equilibrium point e is similar to the process that $f(x)$ is approaching a specific value when learning the limit in pre-calculus. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ represents a value that $f(x)$ is approaching when x is getting closer and closer to 1. Mathematics teachers usually move the chalk along the horizontal axis closing to the point $x = 1$ from either the right-hand side or left-hand side, and then move the chalk along the function $f(x)$ approaching $f(1)$. With carefulness, teachers move the chalk infinitely close to $f(1)$, but do not touch it, and draw an arrowhead next to $f(1)$. The movements of points and arrowheads leave an image of “approaching” in learners’ minds. This image helps learners understand the trend of the points and their ultimate destination, e . However, a big difference is how to show the path of points in graphs. In mathematics, the point is moving along a smooth curve or line, and the x and y values change at the same time (with y_i ’s changes depending on x_i ’s changes); in economics, the point is climbing the staircase formed by auxiliary lines. This kind of “approaching” imagistic representation is rarely seen in high school math classes.

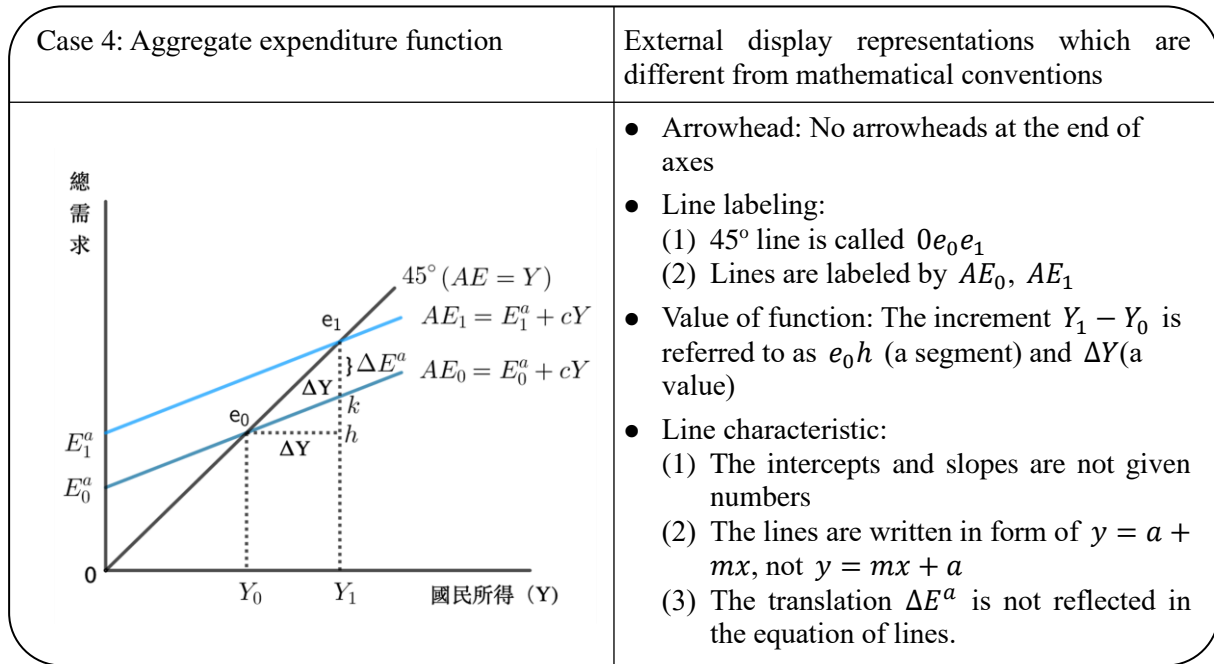
Case 4: Aggregate expenditure function

In Figure 7, the aggregate expenditure function $AE_1 = E_1^a + cY$ shows that the aggregate expenditure is the sum of autonomous expenditure (E^a) and inducted expenditure (cY). Y is the level of national income, and c is the marginal propensity to spend. The inducted expenditure is affected by c , the slope of the aggregate expenditure line. This graph indicates that the change in autonomous

expenditure caused the change in the equilibrium point, from e_0 to e_1 . An increase in E^a producing a bigger increase in national income is called the multiplier effect.

Figure 7

The Change of the Equilibrium Level of Income



Note. The graph is adopted from *Economics: Theory and practice*, by Chang et al., 2000, p.123.

Imagistic kinesthetic representation

The dynamic representation reveals the change of values over a period of time (Ainsworth & VanLabeke, 2004). The change of status is a big issue in economics, and people always want to investigate the change of equilibrium. The increment of autonomous expenditure on the vertical axis causes the translation of AE_0 , moving ΔE^a units upward to AE_1 , and the movement of equilibrium points from e_0 to e_1 . The translation of the line might occur more than one time, and then the equilibrium points will correspondingly move along the 45° line. What we should observe from the graph is like a silhouette, a collection of lines and a collection of points. They are externally static, but their movements should be traced in readers' mind internally.

Some economics graphs show points moving along the curve, one or two curve translations, and accompanying new points of intersection. These lines and points are not really moving but are imagined by the reader. This imagistic kinesthetic representation makes the graphs come alive in our imagination. This imagistic kinesthetic representation might be thought unreal, illusory, or vague; therefore, the authentic dynamic movements should be demonstrated by technology. This representation is projected onto external representations through one's mental act, and many techniques have been developed to

assist in the mental act (Goldin & Kaput, 1996). With the operation of interactive media, learners can physically observe the connection among objects and build the corresponding imagistic kinesthetic representation. However, when this kind of representation is shown in economics books, it is externally presented with both the original graph and the moved graph. Learners must construct their internal imagistic kinesthetic process to understand the relationships between the graphs and their corresponding functions.

Internal Formal representation

Compared with the mathematical formal representation of the function and linear expression, the expression $AE_1 = E_1^a + cY$ is hardly connected to the function expression $f(x) = mx + a$ or the linear equation $y = mx + a$ for learners. The key reason is that it is difficult to tell which letter is variable and which letter is constant. Additionally, the order of the items is reversed. The linear equation is usually expressed in the form of $y = mx + a$ in math classes, while $y = a + mx$ is applied in the economics textbook.

In mathematics, the equation of the function and its vertically translated function are usually represented as $y = f(x)$ and $y = f(x) + k$, in which the translated length and direction are emphasized. However, the “characteristics of translation” are not focused in economics, but the “phenomena of parallel lines”. In mathematics, the general forms of parallel lines are usually represented as $f(x) = mx + a$ and $f(x) = mx + b$. With the internal formal representation, learners can rewrite the equation, from $AE_1 = E_1^a + cY$ and $AE_0 = E_0^a + cY$ to $AE_1 = cY + E_1^a$ and $AE_0 = cY + E_0^a$, to interpret the slope of parallel lines, the y -intercept, and the change of lines.

There seems to be little or no experience with adopting a superscripted index and a subscripted index at the same time, such as E_1^a and E_0^a , in math classes. The superscripted indexes in mathematics are the powers or exponents, and subscripted indexes are usually for counters. In economics, the superscripted indexes are used for indication, usually written in terms of the abbreviation, such as Q^D for quantity demand and E^a for autonomous expenditure. The subscripted indexes can be used for counters, time periods, or item indications. Economists investigate the phenomenon of shifting lines and their consequences; therefore, multiple indices are required to show their sequences and identities. The combination of superscript and subscript indexes is often applied in economics.

The effect that an increase in E^a produces a bigger increase in national income is called the multiplier effect, and the multiplier is defined as $\frac{\text{the change of national income}}{\text{the change of autonomous expenditure}}$. This can be represented with a math symbol, $\frac{\Delta Y}{\Delta E^a}$. The usage of the symbol ΔY and ΔE^a is similar to the case when learning slope, integration rule, the definition of derivative in mathematics, and the distance of a segment. The value of multiplier $\frac{\Delta Y}{\Delta E^a}$ is greater than 1, since $\Delta Y > \Delta E^a$ which can be observed from the graph.

With the internal formal representation, learners can manipulate the equation and rewrite it into an understandable equation. They can also recognize the mathematical symbols in math-related equations, which helps interdisciplinary communication. Besides, learners must be aware of different conventions in different fields. For example, learners have to get used to seeing “ Y ” on the horizontal axis in economics, especially when they have learned “ Y ” as a dependent variable on the vertical axis in math classes.

V. Conclusion

According to the research results of four cases, there are major differences between the graph representations in the economics textbook and the representations learned in high school math classes.

The study shows that the external display representations of the coordinate plane in introductory economics are significantly different from those in high school mathematics, such as the complexity of curves, graphical information loading, the indication of axes, object labeling, and the number of auxiliary lines. For the complexity of curves and graphical information loading, multiple curves are sketched to describe the original status and the change of phenomena in economics graphs. Sometimes, multiple auxiliary lines and the 45° line are sketched for reference in the same coordinate planes. To find out the relationship between variables, learners must deal with a heavier information loading in economics than in mathematics. For the indication of axes, the dual variables “ C, I ” on the vertical axis represent “ $C + I$ ” in one graph, and the dual variables “ I, S ” on the vertical axis represent “ I or S ” in another graph. The representations of dual variables on the vertical axis have never been taught in high school mathematics. Learners might be confused with the graphs. For object labeling, the line segments can be labeled not only by expressing two endpoints of the segment but also with more flexibility. A line segment is named C_aA , with the point C_a on the vertical axis and the label of line A . For the auxiliary lines, there are many more auxiliary lines in economics graphs than in mathematics. The auxiliary lines not only indicate the coordinates of the points but also indicate the moving direction of the imagistic movements of the object, especially when discussing the change of equilibrium point.

The conventions of external display representations are quite different in mathematics and economics. The variety and flexibility of economics representations have broadened our views. Mathematical representations tend to express a static moment in scenarios, but situations in the real world are usually dynamic. When these mathematical representations are applied to different scenarios, there must exist some flexibility to adapt to new scenarios. This flexibility can be introduced appropriately in high school math classes. If we can add some cases with flexible usages in different scenarios in math textbooks- for example, how to link the representations in economics back to the mathematical representations, then it would enlarge the practical value of mathematics and increase the economics readiness in the future.

Linking representation is for learners to integrate or mentally link among external representations. There are often differences in the representations of the same objects between economics and mathematics, which reduces the smooth link between representations. For example, to tell that the consumption function $C = C_a + cY_d$ and the saving function $S = -C_a + (1 - c)Y$ are lines, students have to link them with the line equation $y = mx + a$ learned in high school mathematics. However, the appearance of these two function expressions is hardly linked to lines.

Imagistic kinesthetic representation makes the graphs come alive in learners' imaginations. In the process of determining equilibrium, the equilibrium point doesn't appear at once, but "moves" along the curve until it reaches the equilibrium point. However, in high school math, equilibrium is only considered the intersection of two curves, and it is static but not dynamic. This representation tends to help learners understand the relationship between the original graph and the moved graph, which is not sufficiently illustrated in high school math. With the assistance of technology devices, this kinesthetic representation corresponding to objects can be better built up.

With internal formal representation, learners can figure out the intersection of curves by manipulating the symbols and working on the algorithm. However, the mathematical process for solving the point of intersection is not a big focus in economics. The relationship between variables and the process of approaching the equilibrium point is much more important in economics.

Internal imagistic representation evokes learners' existing mental images to learn new content. However, the mathematical image is not always the same as the economical one. In the process of determining equilibrium, a change in the y -value or x -value makes the point move toward equilibrium. The path of points on the graph is like a staircase. In mathematics, the situation where both x and y values change at the same time is discussed more often, and the point is moving along a smooth curve or line in these cases. The way to show the path of points in graphs is quite different.

VI. Suggestion

Transfer of learning occurs when prior-learned knowledge and skills affect how knowledge and skills are learned (Cormier & Hagman, 1987). This article is not to discuss which convention should be correct but to point out the gaps that might exist when transferring mathematics background knowledge to economics. Math conventions are taught rigorously and legitimately in math classes. Learners will be confused when they first learn economics. Things are different! Significantly different external display representations may cause difficulty when recognizing math-related objects. The four internal representations need to be activated when applying mathematical background knowledge to economics graphs. Learners need to "transform" the mathematics representations into economics ones, to learn the new context. Learners used to learn one intersection between two lines in the system of linear equations in math classes. Now they have to generalize the concept in economics graphs, to understand the

multiple intersections between multiple lines and curves, and the relationships among these intersections.

Some transitions can be illustrated and developed in high school. For example, some cases with flexible external display representation usages in different scenarios can be added to mathematics textbooks or introduced by Civics and Society teachers. With the practice of mathematics software, learners can develop imagistic kinesthetic representation and broaden their internal imagistic representation through hands-on activities or perception. These research results have shown the importance of scaffolding between high school mathematics and introductory economics. The overall goal of instructions is to help learners construct correct internal representations (Cobb et al., 1992). This scaffolding needs to be constructed to provide learners with more readiness, however, by which field or a new interdisciplinary track? It needs further discussion and research.

References

- Ahuja, H. (2017). *Advanced economic theory*. S. Chand Publishing.
- Ainsworth, S., & VanLabeke, N. (2004). Multiple forms of dynamic representation. *Learning and instruction*, 14(3), 241–255. <https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2004.06.002>
- Chang, C.-H., Hsu, C.-T., Liu, Y.-C., & Wu, T.-M. (2000). *Economics: Theory and practice*. Han-lu. (in Chinese)
- Chang, H.-Y. (2023). *Civics and society [Book 3] Economics and living* (Unpublished manuscript). Victor. (in Chinese)
- Chao, H.-K. and Maas, H. (2017). Engines of discovery: Jevons and Marshall on the methods of graphs and diagrams. In Including a Symposium on the Historical Epistemology of Economics (*Research in the History of Economic Thought and Methodology*, Vol. 35A, pp. 35–61), Emerald Publishing Limited. <https://doi.org/10.1108/S0743-41542017000035A003>
- Cobb, P., Yackel, E., & Wood, T. (1992). A constructivist alternative to the representational view of mind in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics education*, 23(1), 2–33. <https://doi.org/10.2307/749161>
- Cohn, E., Cohn, S., Balch, D. C., & Bradley, J., Jr. (2001). Do graphs promote learning in principles of economics? *The Journal of Economic Education*, 32(4), 299–310. <https://doi.org/10.2307/1182879>
- Cohn, E., Cohn, S., Balch, D. C., & Bradley, J., Jr. (2004). The relation between student attitudes toward graphs and performance in economics. *The American Economist*, 48(2), 41–52. <https://doi.org/10.1177/056943450404800203>
- Cormier, S. M., & Hagman, J. D. (Eds.). (1987). *Transfer of learning: Contemporary research and applications*. Academic Press.
- Cournot, A. A. (1897). *Researches into the mathematical principles of the theory of wealth*. (N.T. Bacon, Trans.) Macmillan. (Original work published 1838)
- Crowley, R. W., & Wilton, D. A. (1974). An analysis of 'learning' in introductory economics. *The Canadian Journal of Economics/Revue canadienne d'Economique*, 7(4), 665–73. <https://doi.org/10.2307/133945>

- Demir, I., & Tollison, R. D. (2015). Graphs in economics. *Economics Bulletin*, 35(3), 1834–1847.
- Dupuit, J. (1844). On the measurement of the utility of public works. *International Economic Papers*, 2(1952), 83–110.
- Eastin, R. V., & Arbogast, G. L. (2020). Topics in Demand and Supply Analysis. In CFA Institute (Ed.), *Economics CFA Program Curriculum 2020 Level I* (Volume 2). CFA.
- Edgeworth, F. Y. (1889). "On the application of mathematics to political economy." The address of the president of section F—Economic science and statistics—of the British Association, at the fifty-ninth meeting, held at Newcastle-Upon-Tyne, in September, 1889. *Journal of the Royal Statistical Society*, 52(4), 538–576. <https://doi.org/10.2307/2979102>
- Espey, M. (1997). Testing math competency in introductory economics. *Applied Economic Perspectives and Policy*, 19(2), 484–491. <https://doi.org/10.2307/1349755>
- Goldin, G. A. (1987). Cognitive representational systems for mathematical problem solving. *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics*, 125–145.
- Goldin, G. A., & Kaput, J. J. (1996). A joint perspective on the idea of representation in learning and doing mathematics. In Steffe, L. P., Neshier, P., Cobb, P., Goldin G. A., & Greer, B. (Eds.), *Theories of mathematical learning* (pp. 397–430). Erlbaum.
- Heddens, J. W. (1984). *Today's Mathematics: Concepts and methods in elementary mathematics*. Science Research Associates.
- Heinze, A., Star, J. R., & Verschaffel, L. (2009). Flexible and adaptive use of strategies and representations in mathematics education. *ZDM Mathematics Education*, 41, 535–540. <https://doi.org/10.1007/s11858-009-0214-4>
- Hiebert, J., & Carpenter, T. P. (1992). Learning and teaching with understanding. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 65–97). Macmillan Publishing Co, Inc.
- Humphrey, T. M. (1996). Marshallian cross diagrams and their uses before Alfred Marshall: The origins of supply and demand geometry. In J. C. Wood (Ed.), *Alfred Marshall: Critical Assessments. Second series* (pp. 224-255). Routledge.
- Johari, N., Ali, D. F., Hassan, T., Mokhtar, M., Wahid, N. H., Noordin, M. K., & Ibrahim, N. H. (2018). Problems faced by students in learning microeconomics course. *The Turkish Online Journal of Design Art and Communication*, 8, 847–852. <https://doi.org/10.7456/1080SSE/120>
- Kao, S.-C. (2009). *The connection between the required courses in university freshman year first semester and high school calculus* (Unpublished master's thesis). National Central University. (in Chinese)
- Lesh, R., Post, T. R., & Behr, M. (1987). Representations and translations among representations in mathematics learning and problem solving. In C. Janvier (ed.), *Problems of representations in the teaching and learning of mathematics* (pp. 33–40). Lawrence Erlbaum.
- Maas, H., & Morgan, M. S. (2002). Timing history: The introduction of graphical analysis in 19th century British economics. *Revue d'Histoire des Sciences Humaines*, 7, 97–127. <https://doi.org/10.3917/rhsh.007.0097>
- Marshall, A. (1879). The pure theory of foreign trade. *History of economic thought books*. McMaster university archive for the history of economic thought. <https://historyofeconomicthought.mcmaster.ca/marshall/index.html>
- Mumuni, B. Y., Acquah, B. Y. S. & Anti Partey, P. (2010). The relationship between students' achievement in mathematics and their performance in economics. *International Journal of Educational Leadership (IJEL)*, 3(3), 320–330.

- Nathen, M. J., Stephens, A. C., Masarik, K., Alibali, M. W., & Koedinger, K. R. (2002). Representational fluency in middle school: A classroom study. In D. S. Mewborn, P. Sztajn, D. Y. White, H. G. Wiegel, R. L. Bryant, & K. Nooney (Eds.), *Proceedings of the twenty-fourth annual meeting of the North American chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 463–472). ERIC Clearinghouse on Science, Mathematics and Environmental Education. <https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED471747.pdf>
- Niss, M. (2003). Mathematical competencies and the learning of mathematics: The Danish KOM project. In A. Gagatsis, & S. Papastavridis (Eds.), *3rd Mediterranean Conference on Mathematical Education - Athens, Hellas 3-4-5 January 2003* (pp. 116–124). Hellenic Mathematical Society.
- Patton, M. Q. (2002). Qualitative designs and data collection. In M. Q. Patton (Ed.), *Qualitative research & evaluation methods* (3rd ed., pp. 207–257). SAGE Publications.
- Postelnicu, V. (2011). *Student difficulties with linearity and linear functions and teachers' understanding of student difficulties* [Unpublished doctoral dissertation]. Arizona State University.
- Safiullin, N., & Safiullin, B. (2018). Static and dynamic models in economics. *Journal of Physics: conference series*, 1015(3), 032117. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1015/3/032117>
- Schumpeter, J. A. (1954). *History of economic analysis*. Allen & Unwin.
- Siri, A., Bragazzi, N. L., Khabbache, H., Spandonari, M. M., & Cáceres, L. A. (2016). Mind the gap between high school and university! A field qualitative survey at the National University of Caaguazú (Paraguay). *Advances in Medical Education and Practice*, 301–308. <https://doi.org/10.2147/AMEP.S103811>
- Stern, E., Aprea, C., & Ebner, H. G. (2003). Improving cross-content transfer in text processing by means of active graphical representation. *Learning and instruction*, 13(2), 191–203. [https://doi.org/10.1016/S0959-4752\(02\)00020-8](https://doi.org/10.1016/S0959-4752(02)00020-8)
- Veloo, A. & Md-Ali, R. (2015). Pre university students proficiency in symbols, graphs and problem-solving and their economic achievement. *Review of European Studies*, 7(11), 263–272. <https://doi.org/10.5539/res.v7n11p263>
- Velupillai, K. V. (2005). The unreasonable in effectiveness of mathematics in economics. *Cambridge Journal of Economics*, 29(6), 849–872. <https://doi.org/10.1093/cje/bei084>
- Wicksteed, P. H. (1888). *The alphabet of economic science. Part I: Elements of the theory of value or worth*. Macmillan.
- Zetland, D., Russo, C., & Yavapolkul, N. (2010). Teaching economic principles: Algebra, graph or both? *The American Economist*, 55(1), 123–131. <https://doi.org/10.1177/056943451005500113>

《臺灣數學教育期刊》稿約

2013.04.03 編審委員會會議通過
2013.09.27 編審委員會會議修訂通過
2014.09.04 編審委員會會議修訂通過
2017.03.17 編審委員會會議修訂通過
2021.04.09 編審委員會會議修訂通過
2022.04.08 編審委員會會議修訂通過

壹、《臺灣數學教育期刊》(*Taiwan Journal of Mathematics Education*) (以下簡稱本刊) 是國立臺灣師範大學數學系及台灣數學教育學會共同發行之期刊，內容以出版數學教育領域相關議題的原創性論文為宗旨。

貳、本刊歡迎符合宗旨的多元型態學術論文，類型如下：

- 一、實徵論文 (research report)：透過資料收集與分析來探究理論或檢驗假設。
- 二、回顧性論文 (review article)：整合相關之實徵研究，並提出批判性或創發思考的評析。
- 三、學術瞭望 (academy observatory)：針對國內外數學教育理論、議題、新知、研究成果、實務發展、改革趨勢，進行說明、分析、評論、反思或建議。
- 四、書評 (book review)：以導讀、討論、分析、闡釋，或比較，來介紹並評論數學教育領域新出版的重要書籍。

參、撰寫文別及字數如下：

- 一、實徵性論文與回顧性論文：可以中文或英文撰寫，中文稿件字數以20,000字、英文10,000字為上限（包含論文全文、中英文摘要、圖表、附註、參考文獻、附錄等），並需經正式審查流程（請參見第捌項之說明）。
- 二、學術瞭望與書評：以中文5,000字為原則，由編輯室邀稿。不經正式審查，但需通過編輯委員會議。

肆、本刊每年發行兩期，分別於四月、十月出刊，並採電子和紙本方式發行。全年徵稿，隨到隨審。

伍、本刊所刊之文稿須為原創性的學術論文之文稿，即未曾投遞或以全論文形式刊登於其他期刊、研討會彙編或書籍。若文稿在送審後自行撤稿，或出現一稿多投、修正稿回覆逾期、侵犯著作權等違反學術倫理等情況，將依下列規則處理：

- 一、來稿一經送審，不得撤稿。因特殊理由而提出撤稿申請者，案送主編決定；非特殊理由而自行撤稿者，一年內將不再接受該作者的投稿。
- 二、若文稿被發現一稿多投、侵犯著作權或違反學術倫理等情況，除文稿隨即被拒絕刊登外，一切責任由作者自負，且本刊於三年內不接受該作者來稿，並視情節嚴重程度求償。

三、作者應於發出文稿修正通知的三週內回傳修正稿及修正回覆說明書，逾期視同撤稿。若有特殊情況請先與本刊聯絡。

陸、未經本刊同意，已發表之文章不得再於他處發表。投遞本刊之學術論文須經編審委員會送請專家學者審查通過後予以刊登，被刊登文章之著作財產權歸國立臺灣師範大學數學系及台灣數學教育學會共同擁有，文責由作者自負。投稿至《臺灣數學教育期刊》之文章，若經編輯委員推薦且經作者同意，可轉稿至《臺灣數學教師》。

柒、中文文稿格式請參考本期刊論文撰寫體例的說明或已發行之文稿，若為英文撰寫之文稿、引用英文文獻以及數學符號、公式等請參考APA第七版出版手冊。投稿時應注意下列事項：

一、填寫投稿資料

(一) 文稿基本資料。

(二) 通訊作者之姓名、服務單位、職稱、通訊地址、聯絡電話和電子郵件地址。

一位以上作者時，非通訊作者只需填寫姓名、服務單位和職稱。

(三) 任職機構及單位：請寫正式名稱，分別就每位作者寫明所屬系所或單位。

(四) 頁首短題 (running head)：中文以不超過15個字、英文以不超過40個字元為原則。

(五) 作者註 (author note)：說明與本篇研究相關的資訊。

二、除文稿正文外，還需包含中英文摘要，相關規定請詳見《臺灣數學教育期刊》論文撰寫體例。

三、若為修正稿，遞交修正的文稿（上述第伍項第三點之資料）上請以色字標示修改處，並需依審查意見逐項說明修改內容或提出答辯。

捌、本刊審查流程分為預審與正式審查兩個階段：

一、預審：不符合本刊宗旨、品質要求，或撰寫體例者，逕行退稿或退回請作者修改後再上傳。

二、正式審查：為雙向匿名審查，除基本資料表外，不得出現任何足以辨識作者身份之資料，包括請先省略誌謝。

玖、文稿透過線上投稿系統 (<http://tjme.math.ntnu.edu.tw>) 方式投遞。當文稿被接受，作者需在本刊提供的著作財產權讓與同意書上簽名，以掃描檔或紙本方式寄回。作者應負論文排版完成後的校對之責。被接受刊登之文稿，作者需提供文獻之doi，以及中文參考文獻之英譯資料。被接受刊登的英文文稿，作者需自行負責檢查文稿中的用詞、語法、拼寫、含意和邏輯的正確性，編輯委員僅負責格式上之校對。

壹拾、期刊助理聯絡郵箱：TJME.taiwan@gmail.com

《臺灣數學教育期刊》研究論文撰寫體例

2013.04.03 編審委員會會議通過
2013.09.27 編審委員會會議修訂通過
2014.09.04 編審委員會會議修訂通過
2017.03.17 編審委員會會議修訂通過
2022.04.08 編審委員會會議修訂通過

本期刊原則上依循美國心理學會 (American Psychological Association) 的撰寫格式，中文文稿請參考下面的說明或本刊已發表的文稿，若為英文撰寫之文稿、引用英文文獻以及數學符號、公式等請參考 APA 第七版出版手冊。文稿請使用 Microsoft Word 98 以上之繁體中文文書軟體處理。除另有規定外，中文字型一律採用新細明體，英文字型一律為 Times New Roman。

壹、撰稿格式

- 一、**稿件順序**：投稿除需要附上作者基本資料表檔案外，中文稿件內容依序為中文摘要頁（含關鍵字）、英文摘要頁（含關鍵字）、正文（包括圖、表、附註、誌謝、參考文獻）以及附錄（若無必要可省略）；英文稿件之撰寫順序相同，唯中英文摘要頁位置對調。
- 二、**稿件版面**：以單欄版面橫向印列的A4規格紙張，上下左右各留2.5公分空白，除基本資料表頁外每頁需加註頁碼。文稿字數（包含摘要、正文、圖表、附註、參考文獻、附錄等）中文以20,000字為上限，英文以10,000字為上限。
- 三、**中文文稿的中文摘要在前，英文摘要在後**：中文摘要頁內容包括論文題目（粗體20級字、置中）、摘要（不分段，限500字以內）、與關鍵字（以五個為上限，並依筆畫順序由少到多排列）。英文摘要頁內容包括 Title（bold, 20 pt, central）、Abstract（不分段，限300字以內）及 Keywords（字詞及順序須與中文關鍵詞相對應）。
- 四、**英文文稿的英文摘要在前，中文摘要在後**：英文摘要頁內容包括 Title（bold, 20 pt, central）、Abstract（不分段，限300字以內）及 Keywords（以五個為上限，並依字母順序排列）；中文摘要頁內容包括論文題目（粗體20級字、置中）、中文摘要（不分段，限500字以內）及中文關鍵詞（字詞及順序須與英文關鍵詞相對應）。
- 五、**字級與行距**：除各項標題、表之註記與另起一段之引文外，內文不分中英文均為12級字，單行行距。
- 六、**字型與符號**：除另有規定外，中文字型一律採用新細明體，標點符號及空白字為全形字；英文字型一律為Times New Roman。

貳、正文規格

一、正文內容：原則上包括「緒論」、「文獻探討」、「方法」、「結果」、「討論」與「參考文獻」等六部分，「緒論」含研究動機與目的、假設或研究問題等內容。前述格式為原則性規定，作者可依論文性質斟酌改變。

二、標題的層次、選用次序與字體：

- (一) 標題請用字簡明，勿用句號或冒號。若逢頁尾最後一行，應移至次頁首行。第一級標題為「緒論」、「文獻探討」、「方法」、「結果」、「討論」與「參考文獻」等，各層次標題選用次序為：壹、一、(一)、1、(1)、A 最多以六個層次為原則。
- (二) 第一層次標題置中，其餘靠左對齊。第一、二、三、四、五層次標題請使用粗體。第一層次標題使用 16 級字，第二層次標題使用 14 級字，其餘 12 級字。
- (三) 第一、二、三層次標題為單行間距，並與前後段距離均為 1 行；第四、五、六層次標題為 12 點最小行高，並與前後段距離均為 0.5 行。
- (四) 第五、六層次標題內縮 1.5 字元，而第六層次標題加上底線。

壹、16級字、粗體、置中

一、14級字、粗體、靠左對齊

(一)12級字、粗體、靠左對齊

1. 12級字、粗體、靠左對齊

(1)內縮1.5字元、12級字、粗體、靠左對齊

A.內縮1.5字元、12級字、底線、靠左對齊

三、英文統計符號：須用斜體字，例如 $F(1, 53) = 10.03$, t , F , M , SD , N , r , p 等。希臘字母則不要斜體，例如： α , β , ϵ , η 。

四、資料分析結果的有效位數須全文一致：恆小於「1」的數值，例如 $KR20$, α , p 等統計數值的個位數字「0」請省略。

五、誌謝與附註：

- (一) 誌謝應力求簡短扼要，置於正文之後。誌謝二字為 16 級字、粗體、置中。誌謝文另起、第一行內縮 2 字元、12 級字。
- (二) 附註應置於參考文獻之前，每項附註均另起一行，並以阿拉伯數字編號，依順序排列。

參、文獻引用格式

一、注意事項

- (一) 引用文獻時，必須有作者姓名（中文作者姓名全列，英文作者僅列姓氏）及論年份（中文文獻及英文文獻均使用西元年份）。
- (二) 相同作者在同一段中重複被引用時，第一次須寫出年代，第二次以後，在不造成混淆的情況下年代可省略。若在不同段落中重複引用時，則仍須完整註明。
- (三) 本文中引用之文獻必須在參考文獻中列出。

二、引用部分文獻內容

若引用特定文獻時，資料來自於特定章、節、圖、表、公式，須標明特定出處；如引用整段原文獻資料，須加註頁碼。中文以「頁」表示；西文單頁為“p.”、兩頁以上為“pp.”。

範例：吳昭容（2019，頁9）或（洪萬生，2006，頁167）
 (Dubinsky, 1991, p. 102) 或 (Heath, 1956, pp. 251-252)

三、作者人數為一人、二人、三人以上或機構：

(一) 作者人數為一人

中文格式 作者（年代）或（作者，年代）

英文格式 Author (Year) 或 (Author, Year)

範例：劉柏宏（2021）或（劉柏宏，2021）
 Heinz (2015) 或 (Heinz, 2015)

(二) 作者人數為二人。每次引用均須列出全部作者，在行文中，以「與」連接；在括號和參考文獻中，中文以頓號「、」，西文以“&”連接。

中文格式 作者1與作者2（年代）或（作者1、作者2，年代）

英文格式 Author 1 與 Author 2 (Year) 或 (Author 1 & Author 2, Year)

範例：蔡政樺與秦爾聰（2021）或（蔡政樺、秦爾聰，2021）
 Yang 與 Idris (2021) 或 (Yang & Idris, 2021)

(三) 作者人數為三人以上。

1. 僅需要寫出第一位作者，後面再加上「等人」或「et al.」。
2. 若作者縮減後與其他文獻會產生混淆（第一作者與年代皆相同），請將作者逐一列出至可區辨者。
3. 若僅最後一位作者不同，則每次引用時都要將所有作者列出。

範例 1：呂鳳琳等人（2018）或（呂鳳琳等人，2018）或 Green 等人(2014)
 Sherry et al. (2010) 或 (Sherry et al., 2010)

範例 2：Hong、Hwang、Liu 等人（2014）
 Hong、Hwang、Tai 等人（2014）

範例 3：Mullis、Martin、Foy 與 Arora（2012）
 Mullis、Martin、Foy 與 Drucker（2012）

(四) 當作者或作者之一為機構。第一次引用應寫出機構全名，並以中括號註明慣用之簡稱，第二次之後即可使用簡稱替代。

範例：行政院國家科學委員會（國科會，2011）或（行政院國家科學委員會 [國科會]，2011）
National Science Council (NSC, 2011) 或 (National Science Council [NSC], 2011)

四、同一作者不同著作：在文章中引用同一作者在同一年的多篇著作時，應在年代後加註 a, b, c.....以茲區別。

範例：（教育部，2009a，2009b，2009c，2009d）

五、引用相同姓氏作者：當兩筆西文文獻之第一作者同姓時，須引用全名，且採「名在前姓在後」方式書寫。

範例：A. J. Bishop（1985）和 E. Bishop（1970）都認為.....。

六、同時引用多筆文獻：依作者姓名筆畫（英文用字母）排序；若同時有中英文作者，則先列中文作者。不同作者之間用分號分開，相同作者不同年代之文獻用逗號隔開年代。

範例：（陳學志、賴惠德、邱發忠，2010；Lai et al., 2013; Yen & Yang, 2016）

七、引用翻譯文獻：採用（原作者，原著出版年代/譯本出版年代）或原作者（原著出版年代/譯本出版年代）的標示方式。

範例：Skemp (1987/1995) 或 (Skemp, 1987/1995)

八、間接引註：當引用之觀念或陳述，來自第二手資料時，應將原始資料和第二手資料同時註明。在括號中首先列出原始作者與年代，接續中文以「引自」註明第二手資料之作者與年代，並說明出處頁碼；或直接引出第二手資料之文獻。

範例：（Garner, 1988，引自蘇宜芬、林清山，1992，頁246）

（引自蘇宜芬、林清山，1992，頁246）

九、直接引述：引文超過中文 80 字（西文 40 字），則須另起一段，並改為標楷體 10 級字，左右縮排 2 字元，與正文間前後空一行，且在引文前後無需用引號。

範例：

Schoendfeld (1992, p.335) 有一段話可以用來討論：

數學從其創生之始就是一種社會活動，在此活動中一群訓練有素的實踐者（數學科學家）從事組型的科學—基於觀察、研究和實驗，有系統地試圖要決定一個公理化或理論化之系統中的規律的性質和原理（此為純數學），或者從實在世界物體中抽象出來之系統的模式（此為應用數學）。數學的工具是抽象、符號表徵、和符號操作。然而學會運用這些工具，其意義乃謂一個人以數學方式思考而非如一個工匠使用工具。以數學的方式思考就是：（1）形成數學觀點—珍視數學與抽象的歷程，並偏愛其應用，（2）發展此學科的工具的能力，並應用這些工具以協助我們理解結構—數學的建構意義（mathematical sense-making）。

肆、圖與表格：

- 一、圖與表格均配合正文出現。圖和表格標題需分為上、下兩行，置左。圖表序在上行，以阿拉伯數字序碼，且需粗體；圖表名在下行，精簡命名，不粗體。
- 二、若有資料來源，應於圖表下方附加說明，同時可視需要加以註解，圖表中文字可用簡稱，若簡稱尚未約定俗成或未曾在正文中出現，則須於圖表的註解中列出全稱。
- 三、表格之製作以簡明清楚、方便閱讀為原則，頂端與底端採用粗線（1.5pt）繪製，中間與兩邊不必畫線。
- 四、每一個圖表的大小以不超過一頁為原則，如超過時，須在續表之表序後加上（續）/ (continued)，但無須重現圖表名，如：表1（續）或 Table 1 (continued)。
- 五、圖和表格內容若有解釋的必要，可作註記。註記與圖表之左邊界切齊，列在圖、表之下方，每註另起一行，按編號順序排列，句末須句號。
 - (一) 一個註解：中文稿件以「註：」表示；英文稿件以「*Note.*」表示（*Note.*為斜體）。
 - (二) 一個註解以上，註解順序依序為：
 1. 一般註解：限定、解釋或提供表、圖的相關資訊（以「註」表示）。
 2. 特別註解：特定的某個直欄、橫欄或個別的條目有關（以上標「a、b、c」分段表示）
 3. 機率註解：指出顯著性考驗的結果（以「 $*p < .05$. $**p < .01$. $***p < .001$.」表示）。

圖例：

圖 2

兩種不同的表徵(a)不規則排列的表徵(b)線性排列的表徵

(a) Irregular



(b) Linear-Spatial



引自 "Materials count: Linear-spatial materials improve young children's addition strategies and accuracy, irregular arrays don't," by J. Schiffman and E. V. Laski, 2018, *Plos One*, 13(12), p.4。

表例：

表2

實驗教學前兩組學生的作文成績比較（獨立t考驗）項目

項目	控制組		實驗組		兩組平均差 ^c	t值
	平均數	標準差	平均數	標準差		
內容 ^a	5.25	1.03	3.73	1.08	1.52	4.57***
組織 ^a	5.23	.95	3.85	1.07	1.38	4.31***
文法 ^a	5.44	1.08	4.17	1.18	1.27	3.53*
語辭 ^a	5.39	1.08	4.15	1.13	1.24	3.55**
整體 ^b	21.32	3.81	15.90	4.18	5.42	4.28***

註：控制組與實驗組受試者各20名。

^a 各項目的滿分為10。

^b 整體分數為四個分項的得分加總。

^c 兩組平均差＝控制組平均數－實驗組平均數。

* $p < .05$. ** $p < .01$. *** $p < .001$.

伍、參考文獻格式

一、注意事項

- (一) **排序方式**：正文中引用過之文獻，必須全部列舉在參考文獻內，且不得列出未引用之文獻。中文文獻依作者姓氏筆畫順序排列，外文文獻則依作者姓氏字母順序排列。每個作者第一行由第一格開始寫，第二行中文內縮三個字；英文內縮六個字母。
- (二) **標點符號**：中文文獻應使用全形的標點符號，英文文獻則使用半形的標點符號，在半形標點符號後須空一格半形空格書寫。
- (三) **英文名稱之大小寫**：期刊篇名與書名除了第一個、冒號之後或專有名詞之第一個字母大寫外，其餘均使用小寫。期刊名稱除了介系詞與連接詞外，每個字的第一個字母大寫。
- (四) **中文姓名英譯寫法**：中文姓名的英譯若有“-”(例如：Li-Li Huang)，則寫法為Huang, L.-L.；若沒有(例如：Lung Hung Chen)，則寫法為Chen, L. H.。此部分請作者在投稿前自行確認原始參考文獻為何種用法。
- (五) **多人文章**
 1. 作者為一到二十位：須全列出作者姓名，如果為英文文獻，須在最後一位作者前加上「&」。
 2. 二十一位(含)以上作者群：僅列出前十九位與最後一位作者姓名，中間以「...」連接。
- (六) **接受刊登之稿件**
 1. 作者應提供參考文獻之數位物件辨別碼(DOI)，格式請使用「<https://doi.org/xxxxx>」。
 2. 中文參考文獻皆須英文化，附加於該筆中文文獻之後，並置於方頭括號[]內。
 3. 若中文參考文獻已有相對應英文翻譯，請以現成的英文意譯為主；沒有相對應英文翻譯時，有些作者姓名在學術界已有慣用拼法，有些名詞(如：數學)也已有通行或正式的拼法，請採用通行或官方拼法，請勿自行音譯。

二、期刊論文

(一) 已發表：

中文格式

作者名（年代）。篇名。期刊名，卷數（期數），頁數。[Author, A. A. (Year). Title of article. *Title of Periodical*, xx(xx), xxx–xxx.] <https://doi.org/xxxxx>

英文格式

Author, A. A. (Year). Title of article. *Title of Periodical*, xx(xx), xxx–xxx. <https://doi.org/xxxxx>

範例：

蔡文榮、張鈞淇、劉柏宏（2019）。臺灣學術界數學史研究之現況分析與建議：以1992年至2017年學位論文為例。臺灣數學教育期刊，6（1），27–51。[Tsai, W.-J., Chang, C.-C., & Liu, P.-H. (2019). Analysis of current state and recommendations for HPM research in Taiwan: The case of theses and dissertations from 1992 to 2017. *Taiwan Journal of Mathematics Education*, 6(1), 27–51. (in Chinese)] [https://doi.org/10.6278/tjme.201904_6\(1\).003](https://doi.org/10.6278/tjme.201904_6(1).003)

(二) 已接受，未發表

中文格式

作者名（付梓中）。篇名。期刊名。[Author, A. A. (in press). Title of article. *Title of Periodical*.]

英文格式

Author, A. A. (in press). Title of article. *Title of Periodical*.

範例：

張子貴（付梓中）。數學系學生對函數極限的錯誤認知與解題困境。臺灣數學教育期刊。[Chang, T.-K. (in press). Math Students' Misunderstandings and Obstacles in Learning Limits of Functions. *Taiwan Journal of Mathematics Education*. (in Chinese)]

三、未出版碩博士論文

中文格式

作者名（年代）。論文名（未出版博士/碩士論文）。學校名稱。[Author, A. A. (Year). *Title of article* (Unpublished doctoral dissertation/master's thesis). Name of Institution. (in Chinese)]

英文格式

Author, A. A. (Year). *Title of article* [Unpublished doctoral dissertation/master's thesis]. Name of Institution.

四、學術研討會論文

(一) 未出版：

中文格式

作者名(年代,日期)。**篇名**(壁報/口頭發表論文)。研討會名稱,舉辦城市,國家。
[Author, A. A. (Year, Month Day). *Title of contribution* (Paper presentation/Poster presentation/Symposium presentation). Conference Name, Location, Country. (in Chinese)] 研討會議程網址

英文格式

Author, A. A. (Year, Month Day). *Title of contribution* [Paper presentation/Poster presentation/Symposium presentation]. Conference Name, Location, Country.
<https://xxxxx>

(二) 有出版：

1. 期刊：與「期刊論文」相同格式，請見第二項。
2. 書：與「編輯書」相同格式，請見第六項。

五、專書

中文格式

作者名(出版年)。**書名**。出版社名稱。[Author, A. A. (Year). *Book Title*. Publisher Name. (in Chinese)] <https://doi.org/xxxxx>

英文格式

Author, A. A. (Year). *Book Title*. Publisher Name. <https://doi.org/xxxxx>

六、編輯書：主編只有一位時用「(Ed.)」，兩位以上用「(Eds.)」。

中文格式

主編名(主編)(出版年)。**書名**。出版社。[Author, A. A. (Ed./Eds.). (Year). *Book title*. Publisher Name. (in Chinese)] <https://doi.org/xxxxx>

英文格式

Author, A. A. (Ed./Eds.). (Year). *Book title*. Publisher Name. <https://doi.org/xxxxx>

七、書籍中的專章：英文專書主編「名字」縮字放在「姓」之前。

中文格式

作者名(出版年)。章節名稱。載於主編單位/主編名(主編),**書名**(頁 xx-xx)。出版社名稱。[Author, A. A. (Year). Title of chapter. In E. E. Editor (Ed./Eds.), *Book title* (pp. xx-xx). Publisher Name. (in Chinese)] <https://doi.org/xxxxx>

英文格式

Author, A. A. (Year). Title of chapter. In E. E. Editor (Ed./Eds.), *Book title* (pp. xx-xx). Publisher Name. <https://doi.org/xxxxx>

- 八、**翻譯作品**：若為中文譯本，其文獻須列於中文文獻最前面，如有兩筆以上翻譯文獻，依照英文字母排序，但若譯本有將原作者名翻譯為中文者，須使用其中文名，依筆劃，插入中文文獻之內；若沒有則維持原作者名。

中文格式

原作者名/譯名（翻譯本出版年代）。**翻譯書名**（譯者名，譯）。譯本出版社。（原著出版於 xxx 年） [Author, A. A. (Year). *Book title* (Translator, Trans.). Publisher. (Original work published Year) (in Chinese)]

英文格式

Author, A. A. (Year). *Book title* (Translator, Trans.). Publisher. (Original work published Year)

範例1：

Struik, D. J. (2014)。**數學史**（吳定遠，譯）。水牛。（原作出版於 2012 年） [Struik, D. J. (2014). *A Concise History of Mathematics*. (Wu, D.-Y., Trans.). Buffalo Book Company. (Original work published 2012) (in Chinese)]

範例2：

赫爾曼(2009)。**數學恩仇錄**(范偉，譯)。博雅書屋。（原作出版於 2006 年）[Hellman, H. (2009). *Great feuds in mathematics: Ten of the liveliest disputes ever* (Fan, W., Trans.). Goodness Publishing House. (Original work published 2006) (in Chinese)]

- 九、**研究計畫報告**：若沒有計畫編號或網址，則無須填寫。當機構名稱與出版單位相同時，可省略出版單位。

中文格式

機構名稱或作者名稱（年代）。**篇名**（計畫編號：xxx）。出版單位。 [Name of Group. (Year). *Title of report* (Report No. xxx). Publisher name. (in Chinese)] 計畫網址

英文格式

Author/Name of Group. (Year). *Title of report* (Report No. xxx). Publisher name. <https://xxxxx>

- 十、**網路資訊**：檢索時間不需列出，除非該網路資料經常變動。括弧內日期為文章登錄於網站上的日期，如無日期可查，中文文獻則在括弧內註明為（無日期），英文文獻註明為 (n.d.)。日期可用形式為（年代）、（年月）、（年月日）、（無日期）。

中文格式

作者/單位名（年月日）。**篇名**。網站名稱。 [Author, A. A. (Year, Month Day). *Article title*. Website Name. (in Chinese)] 網址

英文格式

Author, A. A. (Year, Month Day). *Article title*. Website Name. <http://xxxxx>

範例：

國教署 (2020 年 12 月 8 日)。**臺灣參加國際數學與科學教育成就趨勢調查 (TIMSS 2019) 成果發表**。教育部全球資訊網。[K-12 Education Administration. (2018, December 8). *The report of trends in international mathematics and science study 2019 for Taiwan*. Taiwan Ministry of Education. (in Chinese)]
https://www.edu.tw/News_Content.aspx?n=9E7AC85F1954DDA8&s=B822E38553C1D561

《臺灣數學教育期刊》投稿基本資料表

篇名	(中文)		
	(英文)		
總字數	稿件全文 (含中英文摘要、正文、參考文獻、附錄等) 共_____字。		
關鍵詞 <small>(最多五個)</small>	(中文)		
	(英文)		
頁首短題 (running head)	(請以不超過15個中文字或40個英文字元為原則。)		
通訊作者資料	姓名	(中文)	(英文)
	職稱		
	服務單位	(中文)	
	<small>(或就讀校系)</small>	(英文)	
	E-mail		
	通訊地址		
	電話	辦公室：() 分機	
	行動電話：		
<i>如為共同著作，請詳填以下共同著作人欄位，非共同著作則不需填寫。(以下欄位不敷填寫時請自行增加)</i>			
共同著作人	姓名	服務單位 <small>(或就讀校系)</small>	職稱
第一作者 (<input type="checkbox"/> 通訊作者)	(中文)	(中文)	
	(英文)	(英文)	
第二作者 (<input type="checkbox"/> 通訊作者)	(中文)	(中文)	
	(英文)	(英文)	
第三作者 (<input type="checkbox"/> 通訊作者)	(中文)	(中文)	
	(英文)	(英文)	
作者註 (可複選)	<input type="checkbox"/> 本篇論文為碩、博士論文改寫，指導教授為_____。 <input type="checkbox"/> 本篇論文曾於_____發表。 <input type="checkbox"/> 本篇論文獲國科會補助，計劃編號：_____。		
1.茲保證本論文符合研究倫理。 2.茲保證所填基本資料正確，文稿未曾以任何方式出版或發行，且無一稿多投、違反學術倫理，或違反著作權相關法令等事情。 3.茲瞭解並同意貴刊著作權授權規範，並保證有權依此規範進行相關授權。 4.茲保證文稿已經所有作者同意投稿至《臺灣數學教育期刊》。			
填表人：_____		填表日期：_____年_____月_____日	

《臺灣數學教育期刊》著作財產權讓與同意書

茲同意投稿至國立臺灣師範大學數學系與台灣數學教育學會共同發行的《臺灣數學教育期刊》之一文，名稱為：

立書人聲明及保證本著作為從未出版之原創性著作，所引用之文字、圖表及照片均符合著作權法及相關學術倫理規範，如果本著作之內容有使用他人以具有著作權之資料，皆已獲得著作權所有者之（書面）同意，並於本著作中註明其來源出處。著作人並擔保本著作未含有毀謗或不法之內容，且絕未侵害他人之智慧財產權，並同意無償授權國立臺灣師範大學數學系與台灣數學教育學會於本著作通過審查後，以論文集、期刊、網路電子資料庫等各種不同方法形式，不限地域、時間、次數及內容利用本著作，並得進行格式之變更，且得將本著作透過各種公開傳輸方式供公眾檢索、瀏覽、下載、傳輸及列印等各項服務。國立臺灣師範大學數學系與台灣數學教育學會並得再授權他人行使上述發行之權利。惟著作人保有下列之權利：

- 1.本著作相關之商標權及專利權。
- 2.本著作之全部或部份著作人教學用之重製權。
- 3.出版後，本著作之全部或部份用於著作人之書中或論文集中之使用權。
- 4.本著作用於著作人受僱機關內部分送之重製權或推銷用之使用權。
- 5.本著作及其所含資料之公開口述權。

著作人同意上述任何情形下之重製品應註明著作財產權所屬，以及引自《臺灣數學教育期刊》。

如果本著作為二人以上之共同著作，下列簽署之著作人已通知其他共同著作人本同意書之條款，並經各共同著作人全體同意，且獲得授權代為簽署本同意書。如果本著作係著作人於受僱期間為雇用機構所作，而著作權為讓機構所有，則該機構亦同意上述條款，並在下面簽署。

本著作之著作財產權係屬（請勾選一項）

- 著作人所有
 著作人之僱用機構所有

立同意書人（著作人或僱用機構代表人）簽章：_____

著作人姓名或僱用機構名稱：_____

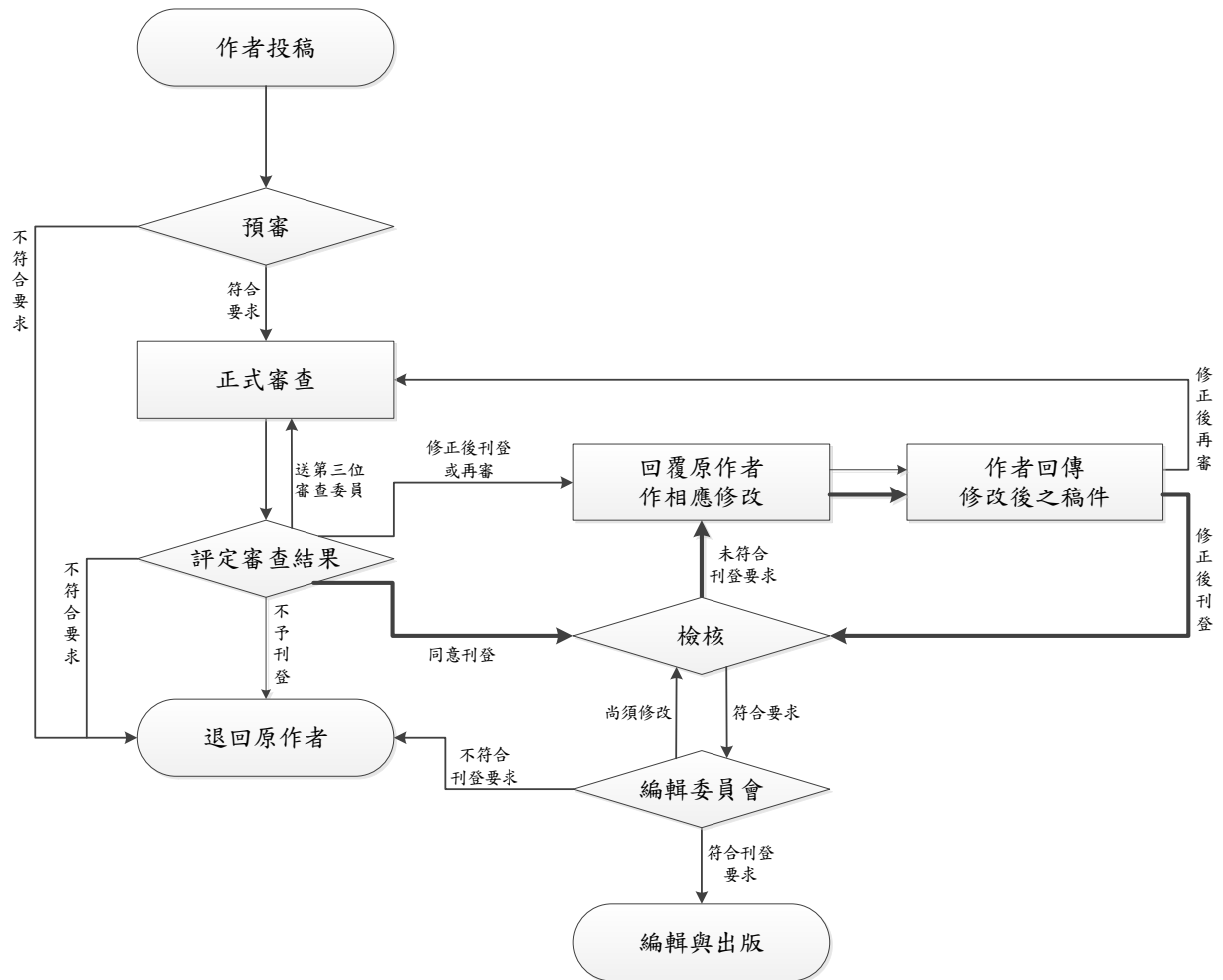
（正楷書寫）

中華民國 年 月 日

《臺灣數學教育期刊》編審辦法

2013.04.03 編審委員會會議通過

- 壹、《臺灣數學教育期刊》（以下簡稱本刊）之審查包括預審、正式審查兩個階段：
- 一、預審：檢視來稿是否符合本刊稿約之宗旨、論文品質以及進行論文格式之審查；
 - 二、正式審查：審查委員與投稿者採雙向匿名方式進行。主編就審查委員的回覆意見及論文品質決定接受或拒絕文稿，或是需要作者修改後再進行審查或檢核。需要「修正後再審」之稿件，交原審查委員或委由主編委任進行再審。所有文稿最後須經編輯委員會審查通過後，方能刊出。
稿件之最終審查決定以投稿後六個月內完成並通知作者。
- 貳、審查委員針對稿件之學術原創性、正確性及價值等條件從嚴審查，以確保所刊文稿的品質。審查委員可提供作者具建設性的修改建議，以利文稿的修正及品質提昇，並以下列其中一種的刊登建議回覆：
- 一、「同意刊登」：論文不需要修改可作原稿刊登。
 - 二、「修正後刊登」：通知作者依審查意見修改或答辯後刊登。
 - 三、「修正後再審」：要求作者依審查意見修改或答辯，修正稿由編輯委員會送原審查委員或委由主編委任進行再審。
 - 四、「不宜刊登」：通知作者退稿。
- 稿件審查的時間以三週為限，若超過期限，編輯委員會將去函提醒審查委員儘速審查，若逾六週審查者仍未寄回審查意見，則編輯委員會得再聘請另一位審查者取代之。每位審查者皆為無償審查，但會在每年第二期期刊中列名致謝。
- 參、本刊主編、副主編或編輯委員如投稿本刊，該委員應迴避推薦審查委員名單、參與審查結果決定之討論或經手處理與個人稿件有關的資料(包括審稿者資料、推薦審查委員名單、審稿意見等)。
- 肆、本刊預計每年四月和十月出版，稿件刊登順序由主編原則上依文稿性質與投稿時間之先後次序決定之，而第一作者的文稿以一篇為限，超過篇數之稿件留至下期刊登。
- 伍、本刊稿件之編審流程如下圖所示：



Publisher | Department of Mathematics, National Taiwan Normal University
 Taiwan Association for Mathematics Education

Editorial Board

Chief Editor	Wu, Chao-Jung	Department of Educational Psychology and Counseling, National Taiwan Normal University
Vice Chief Editor	Liu, Po-Hung	Fundamental General Education Center, National Chin-Yi University of Technology
	Yang, Kai-Lin	Department of Mathematics, National Taiwan Normal University
Editorial Panel	Chen, Jhih-Cheng	Department of Applied Mathematics, National University of Tainan
	Hsieh, Feng-Jui	Department of Mathematics, National Taiwan Normal University
	Hsiung, Tung-Hsing	Department of Early Childhood Education, National Taitung University
	Hsu, Hui-Yu	Graduate Institute of Mathematics and Science Education, National Tsing Hua University
	Huang, Hsin-Mei	Department of Learning and Materials Design, University of Taipei
	Lee, Yuan-Shun	Department of Mathematics, University of Taipei
	Liu, Man-Li	Department of Science Communication, National Pingtung University
	Liu, Yuan-Chen	Department of Computer Science, National Taipei University of Education
	Tam, Hak-Ping	Graduate Institute of Science Education, National Taiwan Normal University
	Yang, Chih-Chien	Graduate Institute of Educational Information and Measurement, National Taichung University of Education
	Yang, Der-Ching	Master Program in Mathematics and Science Education, Department of Education, National Chiayi University
	Yuan, Yuan	Department of Mathematics Education, National Taichung University of Education
International Editorial Panel	Lo, Jane-Jane	Department of Mathematics, Western Michigan University, USA
	Seah, Wee-Tiong	Melbourne Graduate School of Education, University of Melbourne, Australia
	Toh, Tin-Lam	National Institute of Education, Nanyang Technological University, Singapore

Address | No.88 Sec. 4, Ting-Chou Rd., Taipei City, Taiwan, R.O.C.
 Department of Mathematics, National Taiwan Normal University
"Taiwan Journal of Mathematics Education"

TEL | 886-2-7749-3678

FAX | 886-2-2933-2342

E-mail | TJME.taiwan@gmail.com

Website | <http://tjme.math.ntnu.edu.tw/contents/contents/contents.asp?id=21>

1 國中數學史數位閱讀文本之開發初探

／蘇意雯

Initial Investigation into Developing Digital Reading Texts on the History of Mathematics for Junior High Schools

／ Yi-Wen Su

29 線上繪圖計算機 Desmos 融入國中學習障礙學生二次函數教學之成效研究
／曾敏、陳國龍

Use of Online Desmos Graphing Calculator to Improving the Quadratic Function Learning Outcomes Among Junior High School Students With Learning Disabilities

／ Min Tseng, Kuo-Long Chen

57 高中數學與大學經濟學課本之間的供需落差－以圖形表徵為例

／吳珮蓁、謝豐瑞

The Gap Between the Demand for Understanding Introductory Economics Textbooks and the Supply of High School Mathematics– Use Graph Representations as Examples

／ Pei-Chen Wu, Feng-Jui Hsieh

