ISSN: 2312-5810
DOI: 10.6278/tjme

第 10 卷　第 2 期
二〇二三年十月
VOL. 10　NO. 2
October　2023

臺灣數學教育期刊

Taiwan Journal of Mathematics Education

國立臺灣師範大學數學系
Department of Mathematics,
National Taiwan Normal University

台灣數學教育學會
Taiwan Association
for Mathematics Education

臺灣數學教育期刊　第 10 卷 第 2 期　2023 年 10 月

地址　臺北市汀州路四段 88 號國立臺灣師範大學數學系
《臺灣數學教育期刊》
電話　886-2-7749-3678
傳真　886-2-2933-2342
電子郵件　TJME.taiwan@gmail.com
網址　http://tjme.math.ntnu.edu.tw/contents/contents/contents.asp?id=21

主編的話

第 10 卷 第 2 期　2023 年 10 月

《臺灣數學教育期刊》發行已滿十年。這十年來，本刊除了致力於建立一個促進臺灣數學教育社群學術交流與成長的發表平台，也努力提升本刊的能見度。例如辦理「專刊」的徵稿，透過主題性的論文增進學者間的交流，包括英文公告以邀請國際學者投稿；增加「預刊」文章的型態，讓已被接受的文稿能提前上線，提升學術成果分享的時效性；開辦邀稿性質的「學術瞭望」與「書評」，讓讀者有機會從資深學者的所思所讀獲得啟示。

本刊第 10 卷第 2 期刊登三篇文章，依序為「三至八年級學生數學文字題的表徵轉換與等價能力」、「數學識讀文本教學對數學素養之影響－以負數單元為例」、「數學探究教學的任務與學生的回應：一位大學數學教師教學實踐歷程的觀察」。在研究方法上分別為測驗分析、教學實驗，以及個案研究，不同研究方法展現了數學教育的豐富面貌。

第一篇的作者是邱怡靜、曾建銘、吳昭容，他們以 2677 名學生的測驗表現呈現了三至八年級學生初階代數思維的發展。在數學學習內涵上，該研究著眼在代數思維中的等價性，在研究方法的創新上，則整合潛在類別變項（認知診斷模式[CDM]）和潛在連續變項（測驗反應理論[IRT]）兩類測驗模型來探討數學能力。

第二篇的作者為陳玉芬、趙子揚、單維彰，他們運用「數線操作」與「語言譬喻」來建立學生的負數概念，教學目標含括數學素養的「知、行、識」三層面，同時為了檢驗教學實驗的成效，發展了對應的評量規準與評量工具。研究結果顯示在「識」的成效上實驗組優於控制組，而「知」和「行」的實驗成效上與控制組相當。該研究將負數的學習表現指標扣連到「知、行、識」的教材、評分規準，與試題，尤其一般課程較難實踐的「識」，提供了國中現場實踐上難得的範例。

第三篇的作者為徐偉民、張國綱、郭文金，他們探討大學數學課的數學探究教學。該研究以數學系一門「數學探索」課程的教師與學生為對象，分析教學歷程中教師關注的任務，分類出學生的回應，以及學生對探究學習數學的觀點。

這一年本刊曾邀請林碧珍教授擔任客座主編，提出「數學思考技能之教育研究」專刊的徵稿，雖有數篇文稿投入，可惜有些被轉為一般文稿，有些則未獲接受。該專刊雖未成刊，我們在此仍要誠摯感謝林教授這段時間投入編輯事務的辛勞。

《臺灣數學教育期刊》主編

吳昭容 謹誌

臺灣數學教育期刊

第 10 卷　第 2 期

2014 年 4 月創刊　　2023 年 10 月出刊

目錄

Taiwan Journal of Mathematics Education

Vol. 10 No. 2

First Issue: April 2014 Current Issue: October 2023

CONTENTS

邱怡靜、曾建銘、吳昭容（2023）。
三至八年級學生數學文字題的表徵轉換與等價能力。
臺灣數學教育期刊，**10**（2），1–25。
doi: 10.6278/tjme.202310_10(2).001

三至八年級學生數學文字題的表徵轉換與等價能力

邱怡靜 [1]　曾建銘 [2]　吳昭容 [1,3]
[1] 國立臺灣師範大學教育心理與輔導學系
[2] 國家教育研究院測驗及評量研究中心
[3] 國立臺灣師範大學學習科學跨國頂尖研究中心

代數思維是算術一般化的歷程，著重數量或變量間的關係，而掌握等價性為算術過渡到代數的關鍵之一。問題情境提供語意脈絡，有助於學生發展等價性。本研究為了瞭解橫跨國小到國中的等價性發展，針對 2677 位三至八年級學生設計數學文字題解題算式的多重是非題題組，採用認知診斷模型（cognitive diagnostic model [CDM]）界定出表徵轉換能力與等價能力兩種認知屬性，確認學生可分成困難者、單一表徵者、多元表徵者三種類型，並以試題反應理論（item response theory [IRT]）估計學生的能力值，以探究三至八年級學生在三種類型的百分比、能力值及其差異。研究結果顯示，隨著年級的增加，困難者百分比大致呈現下降，單一表徵者、多元表徵者百分比大致呈現上升的趨勢，而國小已有二至六成學生屬於多元表徵者，顯示國小階段即可培養初階代數能力，然而國中學生僅四成為多元表徵者。在能力值方面，困難者最低，單一表徵者居中，多元表徵者最高，且困難者文字題算式判斷能力成長遲滯，單一表徵者的能力隨年級增加明顯些，而多元表徵者的能力則隨年級有更顯著地增長，顯示等價能力會隨等式涉及的數學內涵而呈現多層次。此外，本研究示範了整合 CDM 與 IRT 以描繪長期發展之能力的研究方法，並檢討其未來優化的方向。

關鍵字：代數思維、表徵轉換、等價

通訊作者：吳昭容，e-mail：cjwu@ntnu.edu.tw
收稿：2023 年 7 月 20 日；
接受刊登：2023 年 10 月 3 日。

Chiu, Y. C., Cheng, C. M., & Wu, C. J. (2023).
Analyzing representation transformation and equivalence abilities across students in grades three to eight in mathematical word problems.
Taiwan Journal of Mathematics Education, *10*(2), 1–25.
doi: 10.6278/tjme.202310_10(2).001

Analyzing Representation Transformation and Equivalence Abilities across Students in Grades Three to Eight in Mathematical Word Problems

Yi-Ching Chiu [1] Chien-Ming Cheng [2] Chao-Jung Wu [1, 3]
[1] Department of Educational Psychology and Counseling, National Taiwan Normal University
[2] Research Center for Testing and Assessment, National Academy for Educational Research
[3] Institute for Research Excellence in Learning Science, National Taiwan Normal University

Algebraic thinking involves generalizing arithmetic principles and focusing on the relationships between quantities or variables. Mastering the concept of equivalence is a key step in transitioning from arithmetic to algebra. Mathematical word problems provide a semantic context and aid in developing equivalence. To investigate the development of mathematical equivalence from elementary to junior high school, the study devised sets of multiple true or false questions based on mathematical word problems and recruited 2,677 students spanning grades three to eight. Based on the cognitive abilities of representation transformation and equivalence ability, students were divided into three groups. The cognitive diagnostic model (CDM) was used to examine the percentages of three ability types within grades three to eight: difficulties, single representations, and multiple representations. The item response theory (IRT) was used to estimate the students' ability levels and discern variances across these three types of abilities for students in grades three to eight. The results showed that as students progressed through higher grade levels, the percentage of those difficult students decreased, while the percentages of students with single representation and multiple representation increased. It was observed that a considerable percentage of elementary students, ranging from 20% to 60%, exhibited proficiency in handling multiple representations, indicating that primary algebraic thinking could be nurtured at the primary school level. However, only about 40% of junior high school students demonstrated competency in multiple representations. In terms of ability levels, difficult students manifested the lowest values, followed by those with single representations; students with multiple representations displayed the highest values. Additionally, the growth of algebraic proficiency among difficult students lagged behind. Students with single representations showed noticeable improvement with increasing grade levels, while those with multiple representations exhibited more significant growth, indicating that equivalence abilities display multilevel characteristics depending on the mathematical content integrated into the equations. Furthermore, this study elucidated the research methodology that combines CDM and IRT to delineate long-term developmental abilities and discussed their potential optimization.

Keyword: algebraic thinking, representation transformation, equivalence

Corresponding author：Chao-Jung Wu，e-mail：cjwu@ntnu.edu.tw
Received：20 July 2023;
Accepted：3 October 2023.

壹、緒論

普及代數學習（Algebra for all）的呼籲彰顯了代數是一門關鍵課程（gatekeeper course）（College Board, 2000; No Child Left Behind Act of 2001, 2002）。代數不只是中學與高等數學的基礎，也是許多職業要求的能力（Domina et al., 2015）。早期數學課程採用先算術、再代數的階段式安排，近年來學者認為這種教學進程讓學生在算術學習階段過於重視數值運算而忽略關係的察覺，從而妨礙後續代數的學習，因此主張代數可以在小學低、中年級就及早開始（Cai & Knuth, 2005; Kieran, 2004a, 2022）；實徵研究也支持小學低、中年級學生就能獲益於代數課程，而發展出核心的代數能力（Blanton et al., 2015; Radford, 2018）。

討論代數思維（algebraic thinking）的內涵及其與算術思維（arithmetic thinking）之差異雖有多種不同的主張，但多數學者同意對等號意義的掌握，尤其理解等價性（equivalence）是關鍵能力之一（Knuth et al., 2008; Knuth et al., 2005; Kieran, 2004a, 2004b）。探討學生發展初階代數能力的研究方式，常以如 8＋5＝□＋9 的等式填空（Kieran, 2004a）或對 13＋11＝12＋12 的等式判斷對錯（Molina & Ambrose, 2008）來觀察學生是否理解等號不僅是指出左邊數字運算的結果（operational meaning），還掌握了等號左右兩邊數量之等價性的關係性意義（relational meaning），從而檢驗學生能否超越算術思維，進而掌握數量關係的代數思維（Chesney & McNeil, 2014; Prediger, 2010）。

然而，放在脈絡意義更為豐富的文字題（word problem）情境下，一個問題的解決可採數種不同的列式呈現，同樣是一種等價性的關係理解，也是能在國小低、中年級就開始的學習活動，提供及早的代數活動經驗（Carey, 1991）。例如「小明有 3 顆糖，小明和小華共有 8 顆糖，請問小華有幾顆糖？」學生若能理解列式能採 8－3＝□，也可以是 3＋□＝8，代表他能掌握這兩個算式的等價性，比僅能判斷其中一式正確的學生來得更具代數思維的能力，或至少已具備前代數思維（pre-algebraic thinking）。

隨著學習加減、乘除、四則運算等課程內容，學生若不只能由已知數求算答案這類算術思維來看待各類文字題，還能掌握各類文字題解題存在不只一種可能的列式、從數量關係這類代數思維來理解問題情境，代表即使小學的早期亦能在文字題的脈絡下培養代數思維。反之，即使已經學習了方程式等代數課程，若學生無法判斷兩個等價的列式，那麼其代數思維仍有待加強。換言之，代數思維能力是橫跨國小到國中長期發展的能力。認知診斷模式（cognitive diagnostic model [CDM]）能透過作答反應分析學生的潛在能力、推估其具備或不具備哪些認知屬性（如技能、概念等）；而試題反應理論（item response theory [IRT]）的垂直等化能將跨年級的學生能力定位在同一把連續量尺上，而水平等化則能把同年級多個題本的結果放在同一量尺，本研究採用跨年級、多複本的文字題解題列式之判斷作業，從 CDM 與 IRT 兩種角度探究學生的代數思維，並探討代數思維在不同年級的變化。

貳、文獻探討

一、算術思維與代數思維

學生在進行算術操作時，多以具體數值為出發點，透過對數值的運算求得結果（Kieran, 2004a; Kilpatrick et al., 2001; Radford, 2018）；因此算術思維被視為以求得答案為目的的思維方式。例如前文「小明與小華」題的求解，不論學生採用 8－3＝□ 或是 3＋□＝8 的列式，如果他是針對具體數字 3 和 8 進行運算，例如「8 扣掉 3 是多少？」或者「3 湊上多少會是 8？」都屬於算術思維。因此，並非能解決含有未知數的算式就具備代數能力。面對 3＋□＝8 若能從等號左右等價的角度看到「因為 3＋□ 和 8 一樣多，所以□等於 8 減 3」，這種思維方式就開始展現代數思維的特徵。因此，在某些含有未知數題目類型上，不是僅從能否正確解題就能區分算術思維與代數思維。

樣式一般化（generalization）與文字題解題（problem solving）的活動常被運用為算術思維過渡到代數思維的活動（Radford, 1996; Sibgatullin et al., 2002）。在尋找樣式一般化的過程中，雖然所觀察到的是具象的樣式或具體的數列，但變化的數量是一種變量，活動的焦點並非確切的數值結果，而在於藉由數值間的變化建構抽象的等式。而文字題解題需要列出求算未知數的算式，未知數可視為一種變量，學生可透過等式尋找未知數。Radford（1996）認為，變量和方程式的概念與樣式的一般化取向有著本質的聯繫，而未知數和等式的代數概念似乎與問題解決取向有著本質性的聯繫。

代數思維通常被視為包含了將算術操作一般化的認知歷程，這可從幾位學者對代數內涵之觀點加以了解。Kaput（1998, 2008）主張代數有多個交織的面向，其中一般化和符號操作是兩個核心，前者通常是（但不限於）對算術樣式的一般化與一般化的表示方式，後者是由符號系統的語法引導對符號的操作。此二核心之上建構出學校代數課程的三個主題：一是從操作與關係抽離結構與系統，二是對函數、關係、聯變的探究，三是建模語言的應用。Kieran（1996, 2004b）提出了另一種學校代數的理論模式，她描述了代數的三個相互關聯的主要活動：生成活動（generational activities）、轉化活動（transformational activities）、以及全域/元級活動（global/meta-level activities）。生成活動涉及代數式和等式的產生，包括文字題、形體樣式或數列、數字關係的規則等；轉化活動涉及在語法指導下的形式化操作，如整併同類項、因式分解、去括弧、解方程等；全域/元級活動涉及以代數為工具的活動，包括：解題、建模和預測、探究結構和變化、分析關係、一般化和證明等。Hodgen 等人（2018）認為 Kieran 模式的生成活動對應到 Kaput 核心一（一般化），而 Kieran 模式的轉化活動則對應到 Kaput 的核心二（符號操作）。

二、等價性及其發展

對於代數思維的內涵雖有上述不同理論主張，但都指出等號的意義與等價性在發展代數思維上的重要性。例如，Kieran（2004a, p. 141）認為算術思維過渡到代數思維時，重新

聚焦到等號的意義是五個重點之一，而 Kaput（1998, 2008）也認同等號意義與等價性是算術一般化到代數的關鍵。學習數學初期，學生習慣將等號視為「運算結果是⋯」的符號；對等號的認知是連結算式與結果的符號，亦即等號左邊為運算程序，右邊是運算結果。此種狹隘的等號意義理解，使學生在面臨 $9+4+3=9+\square$ 的問題時，容易寫出 $9+4+3=9+\boxed{16}$ 或 $9+4+3=9+\boxed{25}$ 的錯誤形式，影響代數思維的形成（McNeil, 2007）。因此等號意義的擴展被視為是代數學習的準備（Knuth et al., 2008），且實徵研究支持等號的理解預測兩年後的代數思維表現（Matthews & Fuchs, 2020），顯示發展代數思維必須轉換學生對等號意義的認識，建立等價性的概念。

等價性有兩個核心意義，一是相等，另一是可互換（interchangeable）（Fyfe et al., 2022）。掌握等價性不僅止於將等號理解為一種關係符號，還包括正確地編碼等式、辨識等式的兩邊，並將等式兩邊的數或式理解為數學物件。也就是不論 $4+3$ 在等式的左邊還是右邊，都能不僅解釋為將 3 加到 4 的操作過程，還能視 $4+3$ 為一種可被操作的抽象物件，並知道數與式可以用多種可互換的方式表示（McNeil et al., 2019），包括數與數（如 $9+4+3=9+\square$）、數與式（如 $x^2=9$）、式與式（$x^2+4=4x$）的互換。加法等式填空問題雖是檢驗小學生掌握等價性常見的測驗題型（Hornburg et al., 2022; McNeil et al., 2019），然因數學存在著各式各樣的運算，掌握等價性涉及能否正確編碼等式兩邊的數學物件，故絕非僅用加法等式就能完整評估。有些研究運用了包括減法或乘除法的算式（Matthews & Fuchs, 2020; Molina & Ambrose, 2008; Wardat et al., 2021），豐富了不同層次之等價性的面貌。

算術思維雖是代數思維的基石，但運算的操作慣性與等號意義的侷限性會阻礙學生發展代數思維。根據「改變阻力理論」（change-resistance account）（Byrd et al., 2015; Hornburg et al., 2022; McNeil, 2014）的觀點，學生受到早期運算經驗不斷強化的影響，認為等號右邊為左邊的運算結果，內化了此種算術思維的狹隘觀念；當學習代數課程時，固有的經驗阻礙對等號意義的重新認識、阻撓學生發展對數學等價性的理解，進而在代數學習上產生困難。McNeil（2007）以七至十一歲學生完成如 $9+4+3=9+\square$的等式來驗證該理論。發現七至十一歲學生等價性的表現隨年齡增加呈現 U 型現象，也就是至少答對一題加法等式填空題的學生，在七歲和十、十一歲的百分比顯著高於八、九歲的學生。她解釋原因在於，國小一、二年級學生剛開始接觸算術，學習經驗不足以干擾等價性的表現，於三、四年級時因大量算術的練習，受到算術經驗的抑制，導致對加法等價算式之問題的表現下降；直至五年級後，由於解題的回饋與多元的運算經驗，降低算術經驗對等價表現的抑制，使得等價表現有所提升。因此，及早提供代數活動的經驗，有助於防範固著在算術經驗而造成改變的阻力。

三、文字題列式求解的算術思維與代數思維

文字題是用文字呈現問題情境的數學題，發展文字題解題能力是數學課程的重要目標之一（教育部，2018）。然而文字題解題對學生而言較計算題來得困難許多。Mayer（1992）

將文字題解題分為問題表徵與問題解決兩個階段，問題表徵再細分為問題轉譯、問題整合兩項子階段，問題解決則再細分為規劃和監控、執行兩項子階段。於問題表徵階段，學生首先必須對文字陳述有基本語意的理解，並將外部文字問題轉譯成可理解的內在心理形式，建構問題情境中的連貫而一致的表徵，如：符號、圖形、示意圖…等；接著運用基模區分訊息的重要性、辨認關係、以符合邏輯的方式整合訊息，為後續問題解決歷程做準備。而問題解決階段，學生先針對所面臨的問題進行策略評估與規劃，擬定問題解決方案，將資訊轉換為數學結構，執行列式、運算，並在規劃過程中自我監控及糾正，不斷修改解決方案；最後進行算式解題。許多文獻都指出文字題解題的難點在於問題表徵階段（Hegarty et al., 1995; Krawec, 2014; Passolunghi & Pazzaglia, 2005），解題者必須運用基模知識建構心理模型，掌握問題的已知數與未知數的數量關係，方能進行後續的解題規劃與執行監控。國際學生能力評量計畫（Programme for International Student Assessment [PISA]）數學素養被界定為真實情境脈絡下解決問題的數學推理能力，並透過形成（formulate）、應用（employ）、詮釋與評估（interpret and evaluate）三個歷程不斷循環來實現（Organisation for Economic Cooperation and Development [OECD], 2018）。其中，形成是指將問題的情境脈絡轉化為數學結構；應用則是以數學概念、事實、程序和推理得出具體的數學結果；詮釋與評估是將所獲得的數學結果與情境脈絡結合，針對數學結果進行情境脈絡的解釋、衡量方案的可行性。PISA 中的數學問題脈絡情境多以文字呈現，若將 PISA 的三個歷程對應 Mayer（1992）的文字題解題階段，形成與問題表徵階段關係較緊密，而應用、詮釋與評估則與問題解決階段相關聯。

為了說明文字題解題歷程與算術思維、代數思維的關係，以下以單步驟加減文字題的改變題（change problem）為例。依據廣被引用的單步驟文字題分類，Riley 等人（1983）將單步驟加減文字題依其語意分成合併題、改變題、比較題三類，且每類又因未知數在基模中的角色不同而產生難度各異的題型。以改變題為例，其基模為「**起始量**經增加/減少**改變量**後，成為**結果量**」，而文獻顯示，結果量未知（文獻上簡稱為改變 1、改變 2）最簡單、改變量未知（簡稱改變 3、改變 4）難度居中、起始量未知（簡稱改變 5、改變 6）最為困難（Cummins et al., 1988; Riley et al., 1983）。結果量未知-減少（改變 2）的題目如「美美有 8 顆巧克力，給了小莉 5 顆，美美現在有幾顆巧克力？」只需順著情境改變的時序和語意列式為 8－5＝□，列式和求算答案都不算困難。起始量未知-減少（改變 6）的題目如「美美有一些巧克力，給了小莉 5 顆之後，美美現在有 8 顆巧克力。請問美美原本有幾顆巧克力？」若順著情境改變的時序和語意，應該列式為□－5＝8，但此時求算答案就較為困難。若學生尚未掌握等號的等價性，無法採取等號左右各加 5 來求算答案，就必須嘗試錯誤地湊出□的數值。而一般課堂上出現改變 6 的問題，通常會要求學生列式為 8＋5＝□。這樣的列式雖然有利於求算答案，但學生必須以逆轉時序與顛倒語意（「給了」變成「拿回來」）的方式理解問題，語意理解與推理能力必須夠好、工作記憶容量的要求也較高。

其它類型的單步驟加減文字題如合併題或比較題，或單步驟乘除文字題如等組、倍數比較、面積、直積等題型（Greer, 1992）亦有上述特性。難度較低的題型通常依著語意列式

後，會是未知數單獨在等號右邊的算式，而難度較高的題型若依語意列式，會出現未知數在等號左邊，需要掌握等量公理方才便於求算答案；反之，若要列出未知數單獨在等號右邊、易求答案的算式，則需要有較佳的認知能力。兩步驟文字題因為問題整合的需求更高，更容易產生列式或求解的困難。例如「建國的身高比曉樂高 12 公分，小英的身高比曉樂高 9 公分。小英的身高是 154 公分，那建國的身高是幾公分？」不論列式為□－(154－9)＝12，或是 154－9＋12＝□，在語意理解與推論或運算求解上，都相當挑戰。解題者若能判斷其中一個算式正確，代表具備問題表徵能力甚至解題規畫階段（Mayer, 1992）或者能執行形成歷程（OECD, 2018），本研究稱為具備「表徵轉換能力」，以前述改變 6 的「美美」題為例，若能辨識出□－5＝8 或者 8＋5＝□兩者之一為正確列式，就具備表徵轉換能力。若能判斷□－5＝8 和 8＋5＝□兩個算式都可以合理的呼應解題規劃，本研究則稱為具備「等價能力」。

以往探討學生代數思維的研究多採等式填空的計算題作業，並未提供問題情境（McNeil, 2007; Knuth et al., 2008; Wardat et al., 2021; Hornburg et al., 2022）。從前文可知，文字題解題可以在具有語意脈絡的情境下探究學生對算式之間等價性的掌握狀況，而且可以隨著學生年級的增加，將加減的問題擴展到更多元的數學問題上。本研究為了探究學生在等價性之代數思維上的差異，採用每一道文字題均提供三小題的列式，讓學生就各小題進行對錯的判斷。本研究安排了兩類的題組：一類在三小題列式中僅有一小題為正確，可以偵測學生的表徵轉換能力；另一類文字題則有兩小題正確，足可偵測學生的等價能力與表徵轉換能力；此一安排一則避免題組若固定都有兩小題正確會增高學生的猜測率，另則如改變 2 之類較簡單的文字題，合理的列式只有一種，故需隨題目特性彈性調整正確小題數量為一小題或兩小題。

四、認知診斷模式與試題反應理論

認知診斷模式是以多維度的二元向量來表示個體是否掌握了這多個潛在的認知屬性，並提供認知屬性之組型的訊息（吳慧珉等人，2015），例如本研究可用認知診斷模式以了解受測者是否具備表徵轉換以及是否具備等價能力，也能知道學生屬於兩種能力組合下的何種組型。目前 CDM 已有多種認知診斷模式被開發，其中 DINA 模式（deterministic input, noisy “and” gate model）是常被應用在數學教育研究的模式（吳慧珉等人，2012；Xu et al., 2023）。DINA 模式假設學生能否答對試題，除了受到是否具備相關的認知屬性外，亦受到疏忽及猜測兩個參數的影響。當學生具備該試題的所有認知屬性卻答錯該試題的機率，即為疏忽參數；當學生未具備該試題的所有認知屬性但答對該試題的機率，即為猜測參數。在 DINA 模式的假設下，若一道試題含有多個認知屬性，學生須具備該試題的所有認知屬性才能答對該試題。由於 DINA 模式符合數學解題的假設，且其模式簡單易懂，故本研究採用 DINA 模式來評估學生的表徵轉換、等價能力，及二者的組型。

試題反應理論是描述受測者能力、試題參數（如難度、鑑別度等），與作答反應的數學模式，旨在估計受測者潛在能力，且可藉由共同題或安排重複考生的測驗等化技術，將多個測驗題本連結，使多份測驗可在同一個量尺上進行比較（郭伯臣、王暄博，2008）。IRT 包含了許多不同模式，其中 Rasch 模式適用二元計分的試題，僅採用難度做為試題的參數，將受測者能力與試題難度建立在同一個量尺上，單位為 logit；能力與試題難度的差距決定受測者答對該試題的機率，當能力值高於試題難度值的差異越大，答對該題的機率越高（王文中，2004）。

五、本研究論點

以往代數思維的研究未見運用認知診斷模式探討學生潛在的認知屬性及其組型。本研究設計兩類的數學文字題算式判斷題組，用來偵測表徵轉換與等價能力兩種認知屬性；依據兩種認知屬性的有無，可將學生分成四種類型（詳見後文表 5），但基於表徵能力與等價能力的發展具有順序性，等價能力發展奠基於表徵能力之上，理論上不存在具備等價能力卻無表徵能力者，因此本研究預期以 DINA 能將學生區分為三種類型：困難者（答題錯誤或形態雜亂）、單一表徵者（只能正確辨識一小題列式），以及多元表徵者（能正確辨識兩小題列式者）。

以往文字題解題或是代數之等價能力的研究也少有橫跨多個年級以觀察其能力的發展現象。本研究以三至八年級共六個年級學生為對象，採用相同的文字題解題算式判斷作業，且試題內容配合各年段的學習程度，並在各年段題本間設有共同題，以便能垂直等化。為了確保銜接的試題參數具足夠穩定性，在共同題的選擇上，選取前後兩年段學生皆可作答、試題參數較佳的試題，並挑選對前一年段難度稍高，但對後一年段難度稍低的試題作為共同題。此外，本研究同一個年段內有多個複本試題，前述垂直等化的共同題也同時是水平等化的共同題（詳見後文圖 1）。故可透過 Rasch 模式對橫跨三至八年級學生進行列式判斷能力的估計。

綜合上述，為了瞭解三至八年級學生文字題能力在代數思維的表現，本研究運用文字題解題算式的題組，界定表徵轉換能力與等價能力兩種認知屬性，以探討以下兩個問題。

（一）三至八年級學生在困難者、單一表徵者、多元表徵者三種類型的百分比及其差異為何？

（二）三至八年級學生在三種類型上的能力值及其差異為何？

參、研究方法

一、受試者與有效資料

正式施測的受試者參考國小、國中學校別資料（教育部統計處，2016a，2016b），採分層取樣方式邀請北一區 3 個縣市、北二區 3 個縣市、中區 4 個縣市、南區 4 個縣市、東區及離島 3 個縣不同規模的學校參與，最後有 19 所國小及 20 所國中參與。國小以每校三至

六年級各 1 班，國中則每校七和八年級各 1 班的學生為對象。三至八年級各年級參與人數在 407 至 511 人之間，總計 2677 位學生，如表 1。

表 1
本研究正式施測之各縣市學校規模、校數，與人數

區域	校數／縣市	國小學校規模[a] 小	中	大	總計(人數)	國中學校規模[b] 小	中	大	總計(人數)
北一	臺北市	0	1	0	1 (203)	0	0	2	2 (112)
	新北市	2	0	0	2 (79)	1	1	1	3 (155)
	宜蘭縣	0	0	1	1 (85)	0	1	0	1 (48)
北二	桃園市	—	—	—	—	1	0	0	1 (40)
	新竹縣(市)	0	2	1	3 (295)	—	—	—	—
	苗栗縣	0	0	1	1 (96)	—	—	—	—
中	臺中市	1	0	0	1 (74)	1	1	1	3 (138)
	彰化縣	0	1	0	1 (102)	0	0	1	1 (59)
	南投縣	—	—	—	—	0	1	0	1 (55)
	雲林縣	0	1	1	2 (201)	0	0	1	1 (58)
南	嘉義縣(市)	0	0	1	1 (102)	0	0	1	1 (55)
	臺南市	1	0	0	1 (70)	0	1	0	1 (54)
	高雄市	1	0	0	1 (61)	2	0	0	2 (96)
	屏東縣	0	1	0	1 (98)	—	—	—	—
東＋離島	花蓮縣	0	1	0	1 (74)	1	0	0	1 (32)
	臺東縣	1	0	0	1 (50)	1	0	1	2 (98)
	澎湖縣	0	0	1	1 (87)	—	—	—	—
	總計	6	7	6	19 (1677)	7	5	8	20 (1000)

註：[a] 國小學校規模 6 班以下為小校、7~24 班為中校、25 班以上為大校。
[b] 國中學校規模 12 班以下為小校、13~36 班為中校、37 班以上為大校。

測驗的無效樣本比率約 1%，因此正式施測的有效樣本為 2,654 人。無效樣本的判定原則有三，包括：1.空白或作答不清楚的題數超過一半者。2.答對率在 1/4 以下，且答題具某種樣式（如：111222111222…等）者。3.學校提供的特教生名單。

二、研究工具

本研究使用自編的「數學文字題測驗」，數學文字題的組成包含文字描述的已知資訊（例如：小明有 438 元、甲買了一瓶沙拉油、…）、量的關係（小華給小明 5 顆糖、平均分給 3 個人、…）、及問句（小華有幾顆糖？每人可以分得幾個？、…）。數字類型含括整數、分數、或小數。答題方式採多重是非題題型，詳見「命題」。

（一）題型分類

本研究根據解題時會運用到的算式將三至八年級的數學文字題分成四種類別：一步驟加減、一步驟乘除、二步驟計算、一元一次應用，並將各類別再細分成數類，共計 25 種的

文字題型。測驗區分為 A、B、C 年段（分別是三和四、五和六、七和八年級），各年段有四個複本，以每個複本最多 20 題估算，各年段抽選 20 個題型預備命題。確認題型架構後，其後進行分年段的題本設計、題數估算與數字（整數、分數、小數）分配。

（二）命題

四名數學教師參與命題，題型採多重是非題。每道文字題搭配三個算式，作答時只要判斷列式是否正確，不用計算答案。表 2 為數學文字題命題之示例題，各年段以一題組為例，呈現數學文字題的命題樣式。每個列式搭配「①對」與「②錯」兩個選項，若認為算式正確，則選①；若覺得算式錯誤，則選②。每道文字題與三個算式的判斷作業稱為一題組。三個列式中「至少有一個是正確算式，及至少一個是錯誤算式」，其中，一小題正確的題組有 63 題（如表 2「豆花店」），兩小題正確的題組有 71 題（如表 2「陳爺爺」）。

表 2

數學文字題命題之示例題

年段	類別	題型	數字	示例題
A	一步驟加減	比較	整數	陳爺爺忘記自己今年幾歲，只知道陳爸爸比陳爺爺年輕 28 歲，陳爸爸今年 53 歲，陳爺爺到底幾歲？ $53+28=\square$ ………………… ①對 ②錯 $53-28=\square$ ………………… ①對 ②錯 $\square-28=53$ ………………… ①對 ②錯
B	一步驟乘除	倍數	分數	小樹豆花店製作豆花用掉 5 公升的糖水，美美豆花店製作豆花用掉 $4\frac{1}{3}$ 公升的糖水，小樹豆花店用掉的糖水是美美豆花店的幾倍？ $5\div4\frac{1}{3}=\square$ ………………… ①對 ②錯 $4\frac{1}{3}\div5=\square$ ………………… ①對 ②錯 $5\times4\frac{1}{3}=\square$ ………………… ①對 ②錯
C	二步驟計算	比例	小數	一台掃地機器人掃地的速度固定不變，若掃 10.5 平方公尺，花掉 32.5 分鐘，則 25.5 分鐘可掃多少平方公尺？ $10.5\div32.5\times25.5=\square$ ………… ①對 ②錯 $25.5\times32.5\div10.5=\square$ ………… ①對 ②錯 $25.5\times(10.5\div32.5)=\square$ ………… ①對 ②錯

經由測驗專家建議，各年段每個題型含平行題需命 5 題，因此 A、B、C 年段各命題 100 題組。各年段在分數與小數的學習程度不同：於 A 年段，分數只做同分母分數的加減列式，小數只做加減列式，且三年級到小數第 1 位、四年級到小數第 2 位；於 B 年段，可做異分母分數加減、分數的整數倍、分數乘以分數列式，及多位數小數加減、小數的整數

倍、小數乘以小數、小數除以整數列式；於 C 年段，分數和小數都可進行四則混合列式。因此在命題時整數、小數、分數的數字類型分配上有所不同。

研究者先舉數個範例題供命題老師參考。命題卡上包括文字題所屬年段、類別、題型、數字類型，及題目內容、三個列式、正確答案、難度等。於命題初期，召開會議，設定命題原則：

1. 相似類別須區分

「一步驟加減」中的「比較」是對兩物之比較，即題目有「…比…」的敘述；「改變」則是對同一標的物（人）前後之改變。

2. 不過於侷限題目內容

「一步驟乘除」中的「倍數」非僅限於幾倍的敘述，亦包含倍、打折、比、比例、百分率等概念。

3. 避免無效資訊

情境描述儘量符合學生經驗，避免出現多餘或無用的敘述。

4. 各年段須有難度差異

同一文字題型，若於各年段都有命題，難度或程度應符合 A < B < C。

5. 列式以等式呈現，並注意數字表示

列式都呈現完整等式，故框框「□」可出現在等號的左邊或右邊；選項列式都以題目有出現的數字為主，避免呈現換算或化簡後的數字；列式雖不計算答案，但實際答案需合理。

6. 錯誤列式非任意組合數字

可以從學生易出現的迷思概念（例如「倍」字就表示用乘法）、或具誘答性的列式解答（例如題目有「某數比 A 少 3」的敘述，錯誤列式則以「□－A＝3」表示）來設計。

（三）審題與修題

300 道題組分成 6 個審查題本，分別交由 6 位數學專家審查。評分包括：**1.內容**須符合受測年段的學習程度，數字類型設定及題型分類應適當，避免出現罕見字而影響學生閱讀。**2.題幹**應該是學生熟悉的情境，語義要清楚明白、語順要流暢，字數應適中，句子不宜過長。**3.平行題**的敘述應與範例題一致，以使難度相當。**4.正確列式**須無爭議性，每題組至少要有一個正確解答。**5.錯誤列式**應具備誘答力，每題組至少要有一個錯誤解答。審查結果與命題老師於會議討論，並依共識修題。

（四）測驗與計分方式

組卷以 20 分鐘能答完試卷為原則，且 A 年段於題目與選項均加上注音，以避免識字量及認字關係而影響到題目閱讀與選答。作答方式考量三、四年級學生不熟悉畫卡，故 A

年段為直接作答於題本上；B、C 年段則採畫記答案卡。

1. 預試

各年段僅組一個題本進行預試，目的在估計各年段的題數以及挑選共同題。預試採便利取樣兩所國小和兩所國中（國中小為大校、小校各一所），三至八年級人數分別為 56、51、50、48、46、47 名，共 298 人。A 至 C 三卷題本均為 15 題，難度分配約為易 24%、中 68%、難 8%；類別分配 A 年段約為一步驟加減 47%、一步驟乘除 20%、二步驟計算 33%，B 年段約為一步驟加減 33%、一步驟乘除 13%、二步驟計算 54%，C 年段約為一步驟加減 13%、一步驟乘除 13%、二步驟計算 54%、一元一次應用 20%。數字分配約為整數 60%、分數 20%、小數 20%。結果發現 A 年段平均 8 分鐘即答完，而 B、C 年段平均 14 分鐘答完，但有極少數人在時間到時未能完成作答。

刪除過於簡單的試題後，根據題組的 CTT 難度、鑑別度，選出正式測驗的 8 個共同題組，以對低年段較難、對高年段較易，及包含整數、分數、小數的題目為原則，如表 3。

表 3
數學文字題正式測驗各年段間所採用之共同題組

年段	類別	題型	來源年段	數字類型	題組 CTT 難度	題組鑑別度
A、B	一步驟加減	比較（被比較量未知）	B	分數	0.72	0.33
	一步驟乘除	等量（連續量）	B	小數	0.73	0.35
	二步驟計算	加乘/乘加	B	整數	0.75	0.31
	二步驟計算	減除/除減	B	整數	0.70	0.41
B、C	一步驟加減	改變（起始量未知）	C	小數	0.66	0.61
	一步驟加減	比較（參照量未知）	C	分數	0.63	0.60
	二步驟計算	減減/減減	C	整數	0.66	0.58
	二步驟計算	減乘/乘減	C	整數	0.68	0.71

2. 正式測驗

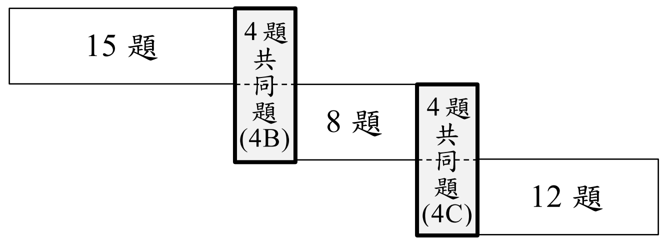
A、B、C 三年段各四個複本，納入預試選出的共同題同時做垂直等化與水平等化。依預試的學生作答情形決定本次各複本題組數，A 年段為 19 個題組（57 小題）、B 年段為 16 個題組（48 小題）、C 年段為 16 個題組（48 小題）。由於複本間皆為平行題或相同題目（共同題），且相同題型的小題題序均相同，因此各複本的難度理應相當。其中 B 年段各題本和 A、C 年段各題本分別各有 4 個共同題組，如圖 1 所示，這些共同題不僅為跨年段共用，也是同年段各複本共用，例如 A、B 年段合計八個題本會共用 4 個相同的題組。共同題的比例則是參考過去學者的建議，以大於題本題數的五分之一為原則（Holland & Dorans, 2006; Livingston, 2004）。故 A、B、C 年段的總題組數各有 60、36、52 題，共 148 個題組。施測後刪除品質較差的題目，留用 134 個題組。

圖 1

數學文字題各年段題本的題組數及共同題組配置

年　段	A 年段	B 年段	C 年段
每本題組數	19 題	16 題	16 題
該年段總題組數	60 題 （15×4＝60）	36 題 （4+8×4＝36）	52 題 （4+12×4＝52）

題組分配



3. 計分方法

首先，每一小題判斷正確即得 1 分，錯誤則為 0 分，以能檢視每一小題的鑑別度、難度與通過率；其次，以每一題組的三個小題全答對為 1 分，其中有一個小題判斷錯誤則為全錯，並以 0 分來計算，當學生能判斷文字轉譯成算式時，表示學生具備「表徵轉換能力」；當除了能列出算式之外，還能知道不同表達方式，表示學生具備「表徵轉換能力」及「等價能力」，藉此以檢測出學生文字題表徵及轉換能力。

（五）試題參數估計與測驗等化

為了將不同題本的結果放在相同量尺上進行比較，本研究採用 IRT 的同時估計法（concurrent estimation）進行試題參數估計與測驗等化，利用共同題將所有題本的試題作答反應放在同一個檔案中進行估計，減少了測驗間連結時產生的誤差。國內外許多文獻指出，採用同時估計法能獲得較佳的精準度（郭伯臣、王暄博，2008；Hanson & Béguin, 2002）。

當使用同時估計法進行測驗等化時，會將受測群體的能力分佈視為單一群體並估計其平均數與標準差，這對於跨不同年級且明顯為不同能力群體的垂直等化設計（vertical equating）較不適合，會低估困難題本的試題參數，且高估簡單題本的試題參數（DeMars, 2003）。因此，在垂直等化情境中為了降低上述偏誤，Wu 等人（1998）建議可將不同能力群體視為不同能力分布參數來進行同時估計，並以潛在迴歸（latent regression）模式來進行試題參數與能力估計。

在本研究中，為了精確估算各年級學生的代數能力值，因此除了正式測驗的作答反應資料外，納入系列研究中後續試題補充施測及常模建置施測的另外 68 個題組之作答反應，合併成一個 202 個題組的作答反應矩陣，進行 IRT 試題參數與能力估計，以便進行水平與垂直等化。矩陣內 1 與 0 的計分，以每一題組三個小題都答對為 1 分，其中有任一小題答錯則為 0 分。

（六）編製 Q 矩陣

本研究以認知診斷模式中的 DINA 模式評估診斷兩個認知屬性的數學文字題測驗。進行 CDM 時，藉由 Q 矩陣表示第 j 個試題是否需具備認知屬性 k，矩陣大小為 $J \times K$，以 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$表示受試者的二元精熟分數，若某個受試者的 $\alpha = (1, 0)$，表示他在第 1 個屬性是精熟的，而第 2 個屬性是不精熟的。因此本研究將 134 道題組分成具備表徵轉換能力（K_1）、具備等價能力（K_2）2 個認知屬性，每一試題即為 Q 矩陣的一列，Q 矩陣如圖 2 所示。

圖 2

兩個認知屬性之 Q 矩陣

$$\begin{array}{cl} \begin{array}{cc} K_1 & K_2 \\ \downarrow & \downarrow \end{array} & \\ Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow \text{第 1 題} \\ \leftarrow \text{第 2 題} \\ \leftarrow \text{第 3 題} \\ \quad \vdots \\ \quad \vdots \\ \leftarrow \text{第 132 題} \\ \leftarrow \text{第 133 題} \\ \leftarrow \text{第 134 題} \end{array} \end{array}$$

為了檢視學生的表徵轉換能力、等價能力，本研究每個題組的 3 小題設計為「至少有一小題是正確算式，及至少一小題是錯誤算式」。當僅有一小題為正確答案時，學生必須知道如何將文字轉譯成數學算式，因此能判斷學生是否具備「表徵轉換能力」；而當題組的答案模式有兩個正確答案時，學生可能僅知道如何列出數學算式，或者還知道問題可有不同的算式表達方式，因此可以判斷學生是具備「表徵轉換能力」，或是具備「等價能力」。作答型態與兩種認知屬性的對應情況如表 4 所示。

表 4

數學文字題於具備表徵轉換與等價能力的答案型態

標準答案範例			正確題數	標準答案範例			正確題數
○	×	×	僅有一小題	○	○	×	兩小題
作答反應			能力判定	作答反應			能力判定
○	×	×	$K_1=1$	○	○	×	$K_1=1, K_2=1$
				○	×	×	$K_1=1, K_2=0$
				×	○	×	
○	×	○	$K_1=0$				$K_1=0, K_2=0$
○	○	×		○	×	○	
○	○	○		○	○	○	
×	○	○		×	○	○	
×	○	×		×	×	○	
×	×	○		×	×	×	
×	×	×					

以表 2 中的「豆花店」及「陳爺爺」為例。「豆花店」題組中只有一個小題的算式是正確的，若學生能辨識出該小題正確，且判斷其它兩個小題錯誤，則顯示學生具有表徵轉換能力；而「陳爺爺」題組中有兩個小題的算式是正確的，學生能辨識出該兩小題的正確性並容許不同的表達方式，顯示學生具備表徵轉換及等價能力；若只辨認出其中一正確小題，且能拒絕錯誤小題，則顯示這位學生僅具備表徵轉換能力；其它組合的答案型態則代表學生既不具備等價能力、也不具備表徵轉換能力。

本研究運用 DINA 模式從學生各題的答題型態將學生區分成四種類型，如表 5 所示：(0, 0)代表「未具備表徵轉換與等價能力者」，(0, 1)代表「單具備高層次的等價能力，但無較低層次表徵轉換能力者」，(1, 0)代表「單具備表徵轉換能力，但無較高層次的等價能力者」，(1, 1)代表「兼具表徵轉換與等價能力者」。基於理論上不存在(0, 1)類型的學生（實際結果詳見「研究結果一」），因此將另外三類命名為困難者、單一表徵者、多元表徵者三種類型。

表 5
認知屬性與類型

認知屬性 (K_1, K_2)		表徵轉換能力 K_1 無	表徵轉換能力 K_1 有
等價能力 K_2	無	(0, 0)困難者	(1, 0)單一表徵者
	有	(0, 1)併入(0, 0)分析	(1, 1)多元表徵者

三、程序

由各班導師或數學老師擔任主試者，施測程序依研究者提供的指導語及注意事項進行，實施地點在原班教室，各班施測時間為 20 分鐘。施測時，由主試者先發下題本及答案卡，四個複本均採每班隨機發放。施測完成後，本研究彙整資料，針對 2,654 位有效樣本進行試題參數與學生能力估計，以便進行水平與垂直等化，並在 DINA 模式下，使用試題對應認知屬性的 Q 矩陣分析，依學生代數能力進行分類，以及運用 Rasch 模式估計學生文字題解題算式的判斷能力。

肆、研究結果

一、認知診斷與試題品質

為檢核 DINA 模式的適配度，本研究將所有題本進行 DINA 模式與 G-DINA 模式（generalized deterministic input, noisy “and” gate model，其放寬 DINA 的一些前提限制、擴

展 DINA 模式的廣義性；de la Torre, 2011）的適配度檢驗，並以 BIC 指標作為檢驗指標；當 BIC 的值較小，則代表該模型的適配度較好。結果 11 個題本皆以 DINA 模式適配度較好，僅 B 年段 1 個題本呈現 G-DINA 模式適配度較佳。因此本研究的試題與 DINA 模式相適配。DINA 分析的結果顯示，試題猜測參數的中位數為 .27（四分差為 .17），疏忽參數中位數為 .16（四分差為 .07），數值皆偏高。推測原因在於本研究的作業採用多重是非題，而是非題的缺點就是猜測度高，且學生不熟悉多重是非的題型，易導致試題有較高的疏忽參數值。DINA 認知診斷的組型顯示，表 5 四種類型中(0, 1)類型的學生人數如預期地極少，只佔全體樣本的 4%，可能因為猜測因素導致有極少數學生被歸為此類，因此後續將此類學生併入(0, 0)進行分析。

本研究三個年段所有題本之 Cronbach's α在 0.82 至 0.87 之間，顯示具有良好的信度，並以 IRT 之 MNSQ 做為試題的建構效度之指標。根據 Wright 與 Linacre（1994）的建議，MNSQ 在 0.6 至 1.4 的範圍內，代表試題具良好的適配度，而本研究 89%題組的 MNSQ 介於 0.6 至 1.4 之間，代表大多數題組與 Rasch 單向度模式相適配，測驗試題測量到相同的潛在特質，具有建構效度。而 Rasch 難度值平均為 0.12 logit，代表整體試題對受測者而言屬中等難度，能適當地檢測出學生的能力。

二、不同類型的百分比及其差異

三至八年級學生在三類類型的百分比與總人次如表 6。卡方檢定分析結果顯著，$\chi^2(10, N = 2654) = 804.18$，$p < .001$，年級與類型有呈現顯著關聯性。進一步進行事後比較，以檢驗不同類型的百分比在各年級間是否具有差異，表中以不同字母的下標表示差異達顯著。結果於困難者中，三至六年級各年級均有差異（$ps < .05$），而六、七、八年級的百分比無顯著差異，顯示於六年級開始，困難者百分比在 13%左右，呈現平緩的趨勢；在單一表徵者中，三至五年級逐年顯著增加，六年級的百分比卻降至與四年級相當，七、八年級的百分比則略增，超過四成百分比；至於多元表徵者，三年級的百分比佔兩成，顯著地低，四、五、七、八年級則佔三、四成百分比居次，而其彼此間無顯著差異，六年級的百分比則超過六成，顯著高於其它各年級。

表 6

三至八年級各類型的百分比及其差異

類型百分比（%）	三年級	四年級	五年級	六年級	七年級	八年級
困難者	78_a	46_b	23_c	11_d	$16_{c, d}$	12_d
單一表徵者	2_a	19_b	36_c	25_b	$43_{c, d}$	46_d
多元表徵者	20_a	35_b	40_b	64_c	41_b	42_b
各年級人數（人）	401	422	426	417	483	505

註：橫列各細格百分比的事後比較達 .05 顯著差異，即以不同字母的下標表示。

上述三類學生的百分比隨年級的變化大致如預期，亦即困難者的百分比隨年級增長而下降，單一表徵者與多元表徵者則上升，但有兩點值得關注。一是，六年級學生在整體趨勢中顯得特別地好，也就是困難者與單一表徵者特別少，而多元表徵者特別多。二是，若以多元表徵者作為代數思維在文字題列式判斷的一種體現，即使三年級也有兩成的學生展現這樣的能力，但已正式學習國中代數課程的七、八年級學生卻僅四成左右被歸為多元表徵者。

三、不同類型的能力值及其差異

Rasch 模式是依據每位學生的試題反應估計出單一的能力值，在本研究是能否判斷文字題解題算式的正確與否，因此估計的能力主要為表徵轉換；又因其中部分題組有等價的兩個正確列式，故該列式判斷能力也部分反映等價能力。三至八年級各類型的能力值見表 7 所示。類型（3）×年級（6）二因子變異數分析顯示，類型和年級的主要效果均達顯著，$F(2, 2636) = 2064.14$，$p < .001$，$\eta^2 = .61$；$F(5, 2636) = 75.69$，$p < .001$，$\eta^2 = .13$，且類型與年級交互作用達顯著，$F(10, 2636) = 17.96$，$p < .001$，$\eta^2 = .06$，因此接續進行單純主要效果與事後檢定。類型的單純主要效果在三至八年級全都顯著，分別為 $F(2, 2636) = 270.86$, 465.84、304.36、296.06、594.89、479.35，$ps < .001$，且三類學生的能力值在各年級的事後比較全都是困難者＜單一表徵者＜多元表徵者。年級的單純主要效果在三種類型也皆顯著，困難者、單一表徵、多元表徵的 F 值分別為 $F(5, 2636) = 20.86$、55.98、77.71，$ps < .001$，後續事後比較的結果在表 7 以不同字母的下標表示差異達顯著。其中困難者的三年級能力值顯著低於四至八年級；單一表徵者的三、四年級能力值顯著低於其它年級，其次為五至七年級，而八年級則顯著高於其它年級；而多元表徵者的三年級能力值最低，其次為四、五年級，再其次則為六年級，最高的七、八年級能力值顯著優於其它年級。

表 7
三至八年級各類型的能力值及其差異

平均能力值 (標準差)	三年級	四年級	五年級	六年級	七年級	八年級
困難者	-1.83_a (0.70)	-1.52_b (0.70)	-1.27_b (0.55)	-1.37_b (0.41)	-1.36_b (0.58)	-1.22_b (0.49)
單一表徵者	-1.31_a (0.55)	-1.05_a (0.58)	-0.30_b (0.49)	-0.33_b (0.46)	-0.20_b (0.51)	0.02_c (0.59)
多元表徵者	0.13_a (0.51)	0.69_b (0.69)	0.72_b (0.81)	1.00_c (0.82)	1.70_d (0.96)	1.69_d (0.92)
人數（人）	401	422	426	417	483	505

註：能力值單位為 logit，且橫列各細格能力值的事後比較達 .05 顯著差異，即以不同字母的下標表示。

上述三類學生的能力值如預期地，困難者的能力最低、單一表徵者其次、多元表徵者最高；且隨年級的變化也大致如預期，三類學生都隨著年級而能力值提升，但有兩點值得關注。一是，困難者的年級差異較不明顯，僅有兩個能力層次，即三年級顯著較差，其餘四至八年級的困難者能力沒有差異；單一表徵者的年級差異稍微明顯些，分成了三個能力

層次；多元表徵者的年級差異則更為明顯，分成了四個能力層次。二是，雖然上一小節顯示六年級學生在三類的百分比顯得很獨特，但從本小節的能力值來看，三類型的六年級學生能力值在年級間都屬合理。

伍、結論與建議

本研究以兩類是非題組界定出表徵轉換能力與等價能力兩個認知屬性，CDM 結果支持這兩類能力的組合僅有三種：兩種能力都不具備的困難者、僅有表徵轉換能力的單一表徵者，以及具備兩種能力的多元表徵者。回應研究問題一，不同類型的百分比差異方面，隨著年級增加而大致呈現困難者百分比下降、單一表徵者與多元表徵者百分比上升的趨勢，其中六年級學生顯得特別好，有超過六成的多元表徵者。此外，即使是國小三年級的多元表徵者也有兩成，但國中七、八年級學生的多元表徵者僅四成左右。回應研究問題二，不同類型學生在文字題解題算式判斷能力值的差異方面，在三至八各個年級內皆如預期地以困難者的平均能力值最低，單一表徵者居中，多元表徵者最高；類型內也大致如預期地隨年級越高而能力值越高，這代表同一類型的學生能力值並非一致的。其中，困難者的能力值差異較不明顯，僅分成兩個能力階層；單一表徵者則分成三個能力階層；多元表徵者分成四個能力階層。此外，三類型的六年級學生能力值與前後年級的差異都屬合理，並未如百分比的資料般顯得獨特。本文從以下四點討論研究發現。

首先，CDM 結果如預期地得出三種類型的學生，且 IRT 估計所得的能力值也如預期地困難者最低、單一表徵者居次、多元表徵者最高，而且測驗的信效度為可接受，代表文字題列式判斷作業可作為代數思維的一種評估方式。文字題列式判斷提供學生連結問題情境與各種可互換之合理列式的經驗，這與文獻上多半採用沒有情境的等式填空或對錯判斷作業（Kieran, 2004a; McNeil et al., 2019; Molina & Ambrose, 2008）不同，它們是從數字運算的事實來展現對等價性的理解。不同型態題型可以提供不同的學習經驗，有助於學生對等價性意義的掌握。

第二，三至六年級多元表徵者占 20%～64%（表 6）的結果，顯示國小階段已有部分學生掌握一道單步驟或多步驟文字題可有多種不同的列式解法，展現了掌握等價性的相等與可互換性的特徵。也就是三、四年級部分學生已能正確判斷改變 6「美美」題的列式可採 8＋5＝□，也可以用 □－5＝8，而五、六年級部分學生更能在已知面積與長、求算寬的文字題中，瞭解採 310.8÷21＝□ 或 310.8÷□＝21 均可，此結果符應 Blanton 等人（2015）、Radford（2018）、Carey（1991）的主張，國小即可培養學生代數能力，而判斷不同列式具備相等與可互換之功能的能力，也與我國數學課程在低年級已有加減互逆的學習內容、中年級則進一步學習乘除互逆的課程安排相呼應。

相對地，七、八年級單一表徵者和多元表徵者的比率都在 41%～46%（表 6），顯示雖然在國中大量代數課程中，在面對多步驟文字題和包含未知數的列式下，七、八年級學生

有四成只能判斷一種正確列式方式，另外四成則能判斷兩種正確的列式方式。由於本研究不同年級受試者接受的是經過等化的不同題本，題目內容包括晚近學習的內容，對學生而言，這類晚近學習的內容較為困難，尤其七、八年級的試題相較於其它年級多了代數符號的文字題與算式，其難度跨幅較大；而五、六年級的試題雖然也較三、四年級困難，但試題內容都同以數字或□呈現，使得三、四年級與五、六年級間的難度跨幅較小。因此七、八年級學生被歸為多元表徵者的比率未如預期，也屬合理現象。

第三，三至八年級困難者能力值差異小，僅分成三年級與四至八年級兩種能力層次，相較於分成三種與四種能力層次的單一表徵者和多元表徵者顯得成長遲滯，代表四至八年級有一群學生在文字題的表徵轉換能力上幾乎沒有學習；且困難者在六至八年級都維持大約一成的學生比率，並未進一步下降。這點就文字題解題教學而言，是一項警訊。

最後，七、八年級多元表徵者的比率顯著較六年級的少（表 6），但其能力值卻顯著較六年級的高（表 7），與第二點類似地，突顯了等價能力會隨等式涉及的數學內涵而呈多層次。如同 Fyfe 等人（2022）與 McNeil 等人（2019）所言，掌握等價性不僅有概念的成分，必須理解等號代表左右兩邊的數學物件相等，同時有技能的成分，必須要能編碼、辨識、操弄左右兩邊的數學物件。以第二點的兩道題目為例，面對改變 6 的文字題能表現出掌握等價性的能力較為容易，但在面積題要表現出能力則困難得多。由於六年級和七、八年級接受的是垂直等化後的不同題本，若單純從 CDM 分類後的類型百分比，會發現六年級在面對的文字題上能展現等價能力的比率較七、八年級的高，但六年級的試題難度相對於七、八年級的低，因此 IRT 估計出來的六年級多元表徵者的能力值就低於七、八年級。這顯現 CDM 與 IRT 可相輔相成，讓接受符應其學習內容之不同試題的不同年級學生，其認知發展能被適切地描述。

總結上述四點討論，顯示從 CDM 與 IRT 兩種資料面向可描繪長期發展之能力的類型與變化。CDM 能診斷學生特定能力是否精熟，但受限於不同年級學生能力與課程內容差異，難以用相同的試題進行跨年級測驗，因此研究大多以特定學科內容或年級為單位進行分析（Choi et al., 2015; Xu et al., 2023），鮮少跨年級甚至跨教育階段的調查，較難描繪一個長期發展的能力。IRT 則透過共同題或安排重複考生的方式進行等化，使不同測驗複本、不同年級學生數據可在同一個尺度中進行比較。雖然有部分實徵研究結合 IRT 與 CDM 的訊息，但多為單一年級的研究，很少有跨年級的調查（吳慧珉等人，2012；Abidin & Retnawati, 2019）。本研究採用具情境的文字題解題算式判斷作業探討橫跨三至八年級學生的表現差異，不僅可行，且提供了不同於無情境等式填空的作業。本研究三年級部分學生展現了等價能力，也支持國小中低年級就可及早提供代數學習機會的主張。

然而，本研究有以下兩點研究限制。一是多重是非題的缺點。多重是非題選項設計需考量誘答與多樣性，當題項出現明顯為互斥敘述時，例如在「陳爺爺」題組中，其中 53＋28＝□ 與 53－28＝□ 兩個選項為互斥的敘述，可能會成為學生判斷對錯的線索。另外，多重是非題高猜測度與高疏忽參數亦為其缺點，低能力學生容易因猜對答案而被高估；題組內三個小題必須全部判斷正確才視為答對，高能力學生容易因疏忽而被低估。即使作

業有猜測度、疏忽參數偏高的情況，然而本研究的工具信效度及結果大致與預期相符，顯示仍具一定的可信度。二是未直接檢驗學生對同一文字題兩個正確的解題列式之等價性的判斷。本研究多元表徵者可能分別判斷三小題的列式能否符合題意與解題的需求，但他們並未外顯地表示兩個正確的解題列式是相等的。因此，本研究並不能確定，多元表徵者能順利從一個正確列式轉譯成另一個正確列式。

此外，本研究也衍生出兩個未來研究建議。一是運用整合性更適配的 CDM 與 IRT 模式探討學生的數學能力發展。本研究使用 Rasch 模型以一維度的連續潛在變量來估計學生整合表徵轉換與等價能力的解題算式判斷能力，而以 DINA 模型將學生在文字題解題判斷能力反應型態分為表徵轉換與等價能力兩個具階層關係的認知屬性，而非獨立的二維度的能力。目前 CDM 模式已有可處理認知屬性的非獨立性（Köhn & Chiu, 2019; Leighton et al., 2004）的模式，亦即有設定能力間存在階層關係之模型可以處理如同本文表徵轉換與等價能力之階層關係，可在處理資料時直接排除(0, 1)類型，亦即本研究採用這類處理階層關係的 CDM 模式會更能搭配一維的 IRT。由於本研究為結合 CDM 與 IRT 處理實徵資料的初探研究，未考量高階的 CDM 與 IRT 模式，例如以多向度 IRT（multidimension item response theory [MIRT]）來搭配 CDM 的多個認知屬性，甚至採用題內多向度測驗（within-item multidimensional test）（吳宜玲等人，2021）估計出具階層性的多向度能力以搭配前述階層性 CDM（Köhn & Chiu, 2019; Leighton et al., 2004），是未來可以嘗試的方向。近年來有越來越多測驗模型企圖整合潛在連續變項與潛在類別變項，例如整合 Q 矩陣與 IRT（Tseng & Wang, 2021），或是整合 DINA 與 IRT（Hong et al., 2015; Hsu & Wang, 2015），這些都將是探究學生數學認知能力發展的利器。二是代數思維的多面向不只能分為表徵轉換與等價能力，也可以有其它不同理論觀點的分法，例如前文提到國中階段代數符號相關的等價能力就和數字運算的等價能力有相當大的落差，而加減的等價性也不同於乘除的等價能力，後續研究者可針對不同的理論架構與研究目的劃分代數思維的面向，並配合評量架構採用如 MIRT、高階 Q 矩陣等更適切的統計模型，以了解代數思維不同能力的意涵與發展。

誌謝

本研究承蒙科技部專題研究計畫（MOST 105-2511-S-003-039-MY3）經費支持，並感謝研究助理鄭鈴華、研究生鄭俊彥在資料收集與分析上的協助，特此致謝。尤其感謝審查委員與編輯委員提供的意見，幫助本文更臻完善。

參考文獻

王文中（2004）。Rasch 測量理論與其在教育和心理之應用。**教育與心理研究，27**（4），637–694。[Wang, W. -C. (2004). Rasch measurement theory and application in education and psychology. *Journal of Education & Psychology*, *27*(4), 637–694. (in Chinese)]

吳宜玲、楊心怡、吳昭容、陳柏熹（2021）。三至九年級學生數學運算能力等化測量與多向度分析。**清華教育學報，38**（2），111–150。[Wu, Y.-L., Yung, H.-I., Wu, C.-J., & Chen, P.-H. (2021). Multidimensional test equating the arithmetical abilities of third to ninth grade students. *Tsing Hua Journal of Educational Research, 38*(2), 111–150. (in Chinese)] https://doi.org/10.6869/THJER.202112_38(2).0004

吳慧珉、張育蓁、林宏昇（2012）。結合知識結構之 Q 矩陣設計於 DINA 模式之估計成效探究。**測驗統計年刊，20**（2），1–30。[Wu, H.-M., Chang Y.-C., & Lin, H.-S. (2012). The research in DINA model with different Q matrix designs incorporating knowledge structures. *Journal of Research on Measurement and Statistics, 20*(2), 1–30. (in Chinese)] https://doi.org/10.6773/JRMS.201212.0001

吳慧珉、鄭俊彥、施淑娟（2015）。認知診斷模式之理論與實務。**測驗學刊，62**（4），303–328。[Wu, H.-M., Cheng, C.-Y., & Shih, S.-C. (2015). Cognitive diagnostic model-theory and practice. *Psychological Testing, 62*(4), 303–328. (in Chinese)]

郭伯臣、王暄博（2008）。大型測驗中同時進行垂直與水平等化效果之探討。**教育研究與發展期刊**，**4**（4），87–120。[Kuo, B.-C., & Wang, H.-P. (2008). A simultaneous vertical and horizontal equating of large-scale assessments. *Journal of Educational Research and Development, 4*(4), 87–120. (in Chinese)]

教育部（2018）。**十二年國民基本教育課程綱要國民中小學暨普通型高級中等學校－數學領域**。作者。[Ministry of Education. (2018). *Curriculum guidelines of 12-year basic education for elementary, junior high schools and general senior high schools – mathematics*. Author. (in Chinese)] https://cirn.moe.edu.tw/Upload/file/27338/72246.pdf

教育部統計處（2016a）。**104 學年國民小學校別資料**。[Department of Statistics, Ministry of Education. (2016a). *School-specific data for the 104th academic year in elementary schools*. (in Chinese)] https://stats.moe.gov.tw/files/detail/104/104_basec.xls

教育部統計處（2016b）。**104 學年國民中學校別資料**。[Department of Statistics, Ministry of Education. (2016b). *School-specific data for the 104th academic year in junior high schools*. (in Chinese)] https://stats.moe.gov.tw/files/detail/104/104_basej.xls

Abidin, M., & Retnawati, H. (2019). A diagnosis of difficulties in answering questions of circle material on junior high school students. *Jurnal Penelitian dan Evaluasi Pendidikan*, *23*(2), 144–155. https://doi.org/10.21831/pep.v23i2.16454

Blanton, M., Stephens, A., Knuth, E., Gardiner, A. M., Isler, I., & Kim, J. S. (2015). The development of children's algebraic thinking: The impact of a comprehensive early algebra intervention in third grade. *Journal for Research in Mathematics Education*, *46*(1), 39–87. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.46.1.0039

Byrd, C. E., McNeil, N. M., Chesney, D. L., & Matthews, P. G. (2015). A specific misconception of the equal sign acts as a barrier to children's learning of early algebra. *Learning and Individual Differences*, *38*, 61–67. https://doi.org/10.1016/j.lindif.2015.01.001

Cai, J., & Knuth, E. J. (2005). Introduction: The development of students' algebraic thinking in earlier grades from curricular, instructional and learning perspectives. *ZDM–Mathematics Education*, *37*(1), 1–4. https://doi.org/10.1007/BF02655891

Carey, D. A. (1991). Number sentences: Linking addition and subtraction word problems and symbols. *Journal for Research in Mathematics Education*, *22*(4), 266–280. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.22.4.0266

Chesney, D. L., & McNeil, N. M. (2014). Activation of operational thinking during arithmetic practice hinders learning and transfer. *The Journal of Problem Solving*, *7*(1), 24–35. https://doi.org/10.7771/1932-6246.1165

Choi, K. M., Lee, Y. S., & Park, Y. S. (2015). What CDM can tell about what students have learned: An analysis of TIMSS eighth grade mathematics. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *11*(6), 1563–1577. https://doi.org/10.12973/eurasia.2015.1421a

College Board. (2000). *Equity 2000: A systematic education reform model*. Author.

Cummins, D. D., Kintsch, W., Reusser, K., & Weimer, R. (1988). The role of understanding in solving word problems. *Cognitive Psychology*, *20*(4), 405–438. https://doi.org/10.1016/0010-0285(88)90011-4

de la Torre, J. (2011). The generalized DINA model framework. *Psychometrika*, *76*(2), 179–199. https://doi.org/10.1007/s11336-011-9207-7

DeMars, C. E. (April 21-25, 2003). *Recovery of graded response and partial credit parameters in MULTILOG and PARSCALE* [Paper presentation]. American Educational Research Association Annual Meeting 2003, Chicago, IL. https://www.learntechlib.org/p/94949/

Domina, T., McEachin, A., Penner, A., & Penner, E. (2015). Aiming high and falling short: California's eighth-grade algebra-for-all effort. *Educational Evaluation and Policy Analysis*, *37*(3), 275–295. https://doi/10.3102/0162373714543685

Fyfe, E. R., Byers, C., & Nelson, L. J. (2022). The benefits of a metacognitive lesson on children's understanding of mathematical equivalence, arithmetic, and place value. *Journal of Educational Psychology*, *114*(6), 1292–1306. https://doi.org/10.1037/edu0000715

Greer, B. (1992). Multiplication and division as models of situations. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 276–295). Macmillan Publishing Co, Inc.

Hanson, B. A., & Béguin, A. A. (2002). Obtaining a common scale for item response theory item parameters using separate versus concurrent estimation in the common item equating design. *Applied Psychological Measurement, 26*(1), 3–24. https://doi.org/10.1177/0146621602026001001

Hegarty, M., Mayer, R. E., & Monk, C. A. (1995). Comprehension of arithmetic word problems: A comparison of successful and unsuccessful problem solvers. *Journal of Educational Psychology*, *87*(1), 18–32. https://doi.org/10.1037/0022-0663.87.1.18

Hodgen, J., Oldenburg, R., & Strømskag, H. (2018). Algebraic thinking. In T. Dreyfus, M. Artigue, D. Potari, S. Prediger, & K. Ruthven (Eds.), *Developing research in mathematics education: Twenty years of communication, cooperation and collaboration in Europe* (pp. 32–45). Routledge. https://www.educ.cam.ac.uk/people/staff/ruthven/9781351625418preview.pdf

Holland, P.W., & Dorans, N. J. (2006). Linking and equating. In R. L. Brennan (Ed.), *Educational measurement* (4th ed.) (pp. 187–220). Praeger.

Hong, H., Wang, C., Lim, Y. S., & Douglas, J. (2015). Efficient models for cognitive diagnosis with continuous and mixed-type latent variables. *Applied Psychological Measurement*, *39*(1), 31–43. https://doi.org/10.1177/0146621614524981

Hornburg, C. B., Devlin, B. L., & McNeil, N. M. (2022). Earlier understanding of mathematical equivalence in elementary school predicts greater algebra readiness in middle school. *Journal of Educational Psychology, 114*(3), 540−559. https://doi.org/10.1037/edu0000683

Hsu, C. L., & Wang, W. C. (2015). Variable-length computerized adaptive testing using the higher order DINA model. *Journal of Educational Measurement*, *52*(2), 125−143. https://doi.org/10.1111/jedm.12069

Kaput, J. J. (1998). Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by "algebrafying" the K-12 curriculum. In National Research Council (Ed.), *The nature and role of algebra in the K-14 curriculum: Proceedings of a national symposium* (pp. 25−26). National Academy Press. https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED429801.pdf

Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? In J. J. Kaput, D. W. Carraher, & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5−17). Lawrence Erlbaum Associates.

Kieran, C. (1996). The changing face of school algebra. In B. Hodgson, C. Alsina Català, J. M. Álvarez Falcón, C. Laborde, & A. J. Pérez Jiménez (Eds.), *8th international congress on mathematical education: Selected lectures* (pp. 271−290). S. A. E. M. "Thales".

Kieran, C. (2004a). Algebraic thinking in the early grades: What is it. *The Mathematics Educator*, *8*(1), 139−151.

Kieran, C. (2004b). The core of algebra: Reflections on its main activities. In K. Stacey, H. Chick & M. Kendal (Eds.), *The future of the teaching and learning of algebra: The 12th ICMI stud*y (pp. 21−33). Kluwer Academic.

Kieran, C. (2022). The multi-dimensionality of early algebraic thinking: Background, overarching dimensions, and new directions. *ZDM–Mathematics Education*, *54*(6), 1131−1150. https://doi.org/10.1007/s11858-022-01435-6

Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (Eds.). (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics*. National Academy Press. https://nap.nationalacademies.org/read/9822/chapter/1

Knuth, E. J., Alibali, M. W., Hattikudur, S., McNeil, N. M., & Stephens, A. C. (2008). The importance of equal sign understanding in the middle grades. *Mathematics Teaching in the Middle School, 13*(9), 514−519. https://doi.org/10.5951/MTMS.13.9.0514

Knuth, E. J., Alibali, M. W., McNeil, N. M., Weinberg, A., & Stephens, A. C. (2005). Middle school students' understanding of core algebraic concepts: Equivalence & variable. *ZDM–Mathematics Education*, *37*(1), 68−76. https://doi.org/10.1007/BF02655899

Köhn, H. F., & Chiu, C. Y. (2019). Attribute hierarchy models in cognitive diagnosis: Identifiability of the latent attribute space and conditions for completeness of the Q-matrix. *Journal of Classification*, *36*(3), 541−565. https://doi.org/10.1007/S00357-018-9278-6

Krawec, J. L. (2014). Problem representation and mathematical problem solving of students of varying math ability. *Journal of Learning Disabilities*, *47*(2), 103−115. https://doi.org/10.1177/0022219412436976

Leighton, J. P., Gierl, M. J., & Hunka, S. M. (2004). The attribute hierarchy method for cognitive assessment: A variation on Tatsuoka's rule-space approach. *Journal of Educational Measurement*, *41*(3), 205−237. https://doi.org/10.1111/j.1745-3984.2004.tb01163.x

Livingston, S. A. (2004). *Equating test scores (without IRT)*. Educational Testing Service. https://www.ets.org/Media/Research/pdf/LIVINGSTON.pdf

Matthews, P. G., & Fuchs, L. S. (2020). Keys to the gate? Equal sign knowledge at second grade predicts fourth-grade algebra competence. *Child Development, 91*(1), e14–e28. https://doi.org/10.1111/cdev.13144

Mayer, R. E. (1992). *Thinking, problem solving, cognition*. W. H. Freeman.

McNeil, N. M. (2007). U-shaped development in math: 7-year-olds outperform 9-year-olds on equivalence problems. *Developmental Psychology, 43*(3), 687–695. https://doi.org/10.1037/0012-1649.43.3.687

McNeil, N. M. (2014). A change-resistance account of children's difficulties understanding mathematical equivalence. *Child Development Perspectives*, *8*(1), 42–47. https://doi.org/10.1111/cdep.12062

McNeil, N. M., Hornburg, C. B., Devlin, B. L., Carrazza, C., & McKeever, M. O. (2019). Consequences of individual differences in children's formal understanding of mathematical equivalence. *Child Development*, *90*(3), 940–956. https://doi.org/10.1111/cdev.12948

Molina, M., & Ambrose, R. (2008). From an operational to a relational conception of the equal sign. Thirds graders' developing algebraic thinking. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 30*(1), 61–80. http://hdl.handle.net/10481/4721

No Child Left Behind Act of 2001, Pub. L. No. 107-110, 115 Stat. 1425 (2002).

Organisation for Economic Cooperation and Development. (2018). *PISA 2022 mathematics framework (Draft)*. OECD Publishing. https://pisa2022-maths.oecd.org/files/PISA%202022%20Mathematics%20Framework%20Draft.pdf

Passolunghi, M. C., & Pazzaglia, F. (2005). A comparison of updating processes in children good or poor in arithmetic word problem-solving. *Learning and individual differences*, *15*(4), 257–269. https://doi.org/10.1016/j.lindif.2005.03.001

Prediger, S. (2010). How to develop mathematics-for-teaching and for understanding: The case of meanings of the equal sign. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *13*(1), 73–93. https://doi.org/10.1007/s10857-009-9119-y

Radford, L. (1996). Some reflections on teaching algebra through generalization. In N. Bernarz, C. Kieran, & L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching* (pp. 107–111). Kluwer Academic Publishers.

Radford, L. (2018). The emergence of symbolic algebraic thinking in primary school. In C. Kieran (Ed.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-year-olds: The global evolution of an emerging field of research and practice* (pp. 3–25). Springer.

Riley, M. S., Greeno, J. G., & Heller, J. I. (1983). Development of children's problem-solving ability in arithmetic. In H. P. Ginsburg (Ed.), *The development of mathematical thinking* (pp. 153–196). Academic Press.

Sibgatullin, I. R., Korzhuev, A. V., Khairullina, E. R., Sadykova, A. R., Baturina, R. V., & Chauzova, V. (2022). A systematic review on algebraic thinking in education. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 18*(1), 1–15. https://doi.org/10.29333/ejmste/11486

Tseng, M. C., & Wang, W. C. (2021). The Q-matrix anchored mixture Rasch model. *Frontiers in Psychology*, *12*, 564976. https://doi.org/10.3389/fpsyg.2021.564976

Wardat, Y., Jarrah, A. M., & Stoica, G. (2021). Understanding the meaning of the equal sign: A case study of middle school students in the United Arab Emirates. *European Journal of Educational Research*, *10*(3), 1505–1514. https://doi.org/10.12973/eu-jer.10.3.1505

Wright, B. D., & Linacre, J. M. (1994). Reasonable mean-square fit values. *Rasch Measurement Transactions, 8*(3), 370–371. https://www.rasch.org/rmt/rmt83b.htm

Wu, M. L., Adams, R. J., & Wilson, M. R. (1998). *ACER ConQuest: Generalised item response modelling software*. ACER Press.

Xu, T., Wu, X., Sun, S., & Kong, Q. (2023). Cognitive diagnostic analysis of students' mathematical competency based on DINA model. *Psychology in the Schools, 60*(9), 3135–3150. https://doi.org/10.1002/pits.22916

陳玉芬、趙子揚、單維彰（2023）。
數學識讀文本教學對數學素養之影響－以負數單元為例。
臺灣數學教育期刊，10（2），27–54。
doi: 10.6278/tjme.202310_10(2).002

數學識讀文本教學對數學素養之影響－以負數單元為例

陳玉芬 [1]　趙子揚 [1]　單維彰 [2]
[1] 國立中央大學學習與教學研究所
[2] 國立中央大學師資培育中心

本研究旨在以實驗法檢驗「負數識讀文本」的實施成效。研究以準實驗兩組前後測設計，在新北市某市立高中召募四個班級共 91 名七年級學生進入實驗組，另外兩班共 45 名同年級學生進入對照組。實驗組在每週 5 節數學課中，持續四週進行每週 1 節的數學識讀文本學習活動；對照組則是四週當中，維持每週 5 節使用一般教科書的正常教學活動。本研究自行發展的研究工具有：「負數識讀文本」、「知行識評量規準」，以及據此規準設計的負數素養「前測」與「後測」。研究得到二項主要結果。第一，實驗組在負數識讀文本學習之後，在前後測之負數素養表現具顯著差異，其中在「識能理解」由 3.5%上升至 25.9%，「錯誤理解」由 11.8%下降至 2.4%。第二，本研究將前測作為控制變項之情況下，藉由多變量共變異數分析，檢驗「知」、「行」及「識」後測之結果，顯示實驗組在「識」後測之平均數，顯著高於對照組；而在「知」與「行」方面，兩組則無顯著差異。本研究將針對教學實驗結果，對識讀文本在教學上之應用提出建議。

關鍵字：數學識讀文本、準實驗法、數學素養

通訊作者：陳玉芬，e-mail：g9247019@gmail.com
收稿：2023 年 5 月 20 日；
接受刊登：2023 年 10 月 5 日。

Chen, Y. F., Chao, T. Y., & Shann, W. C. (2023).
Effect of mathematical text-based education on mathematics literacy: A Case study of negative number teaching units.
Taiwan Journal of Mathematics Education, *10*(2), 27–54.
doi: 10.6278/tjme.202310_10(2).002

Effect of Mathematical Text-Based Education on Mathematics Literacy: A Case Study of Negative Number Teaching Units

Yuh-Fen Chen [1]　　Tzu-Yang Chao [1]　　Wei-Chang Shann [2]

[1] Graduate Institute of Learning and Instruction, National Central University

[2] Center for Teacher Education, National Central University

This study empirically examined the effectiveness of using mathematical texts as a means of enhancing student literacy regarding negative numbers. A quasi-experimental two-group pretest–posttest design was adopted to recruit students from a public senior high school in New Taipei City. Specifically, 91 seventh-grade students from four classes were assigned to the experimental group, and 45 seventh-grade students from two other classes were assigned to the control group. Over a course of 4 weeks, the experimental group attended 5 math sessions per week, with 1 of the sessions dedicated to reading mathematical texts. By contrast, the control group continued with their routine learning activities using standard textbooks throughout the 4 weeks. This study developed the mathematical texts studied by the experimental group, the zhi–xíng–shì (knowledge–capacity–comprehension) evaluation criteria, and a pretest and posttest based on these criteria. Accordingly, the following two main findings were obtained: First, after learning with the mathematical texts, the experimental group demonstrated significant differences between their pretest and posttest scores in terms of negative number literacy. Specifically, their knowledge comprehension increased from 3.5% to 25.9%, and the error occurrence decreased from 11.8% to 2.4%. Second, after the pretest scores were controlled for, a multivariate analysis of covariance was conducted to assess the posttest scores in the knowledge, capacity, and comprehension dimensions. The results revealed that the experimental group's mean score for the comprehension dimension was significantly higher than that of the control group. However, their mean scores for the other two dimensions differed nonsignificantly from those of the control group. According to the experimental findings, suggestions are provided for the application of the developed mathematical texts in teaching.

Keyword: mathematical text, quasi-experiment, mathematics literacy

Corresponding author：Yuh-Fen Chen，e-mail：g9247019@gmail.com
Received：20 May 2023;
Accepted：5 October 2023.

壹、緒論

對於專家（數學家、數學教師等）而言，可以輕易編碼（陳述）與解碼（理解）各種類型的數學文本。舉例來說：$y = mx + b$，數學家閱讀時已直接認知為「變數 1＝常數 1 × 變數 2 ＋常數 2 」。但對一般學習者而言，可能只看到普通的英文字母且毫不相關（Dostal & Robinson, 2018）。就如同面對負數的初學者，對算式 $-(-1) = 1$ 這種接連二個「$-$」號但答案卻無「$-$」號的等式感到疑惑；或者雖然可以朗朗上口「負負得正」，在面臨 $2-(-5)$ 時卻難以想像變成 $2+5$；又或對於初次遭遇的「負」字，就認為是一種負面的數或不好的數，這些都意謂著「$-$」號在中學階段具有代數上的多元意義，而我們未給予適當的說明。再如「負號分離」(Detachment From the Minus Sign [DFMS]）的學習障礙，像 $4+8-2+5$，有的學習者會優先計算 $2+5$，得到 $4+8-7$，宛如「$-$」號不是針對 2 這數字；這種障礙也根源於代數結構的學習缺乏（Molina & Castro, 2021）。Kilhamn（2011）認為：若能在文本中有意識地透過適當的譬喻、觀察與溝通，在學習活動中有目的地學習，將有助於負數概念的理解。

「負數」是學生邁入國中學習階段遇到的第一個代數抽象概念新檻， 也是七年級階段要學習的新符號（Fuadiah et al., 2017），在現今七年級課程中，負數是被安排於「整數的運算」中，使得呈現之內容受到限制，其中內容包含了負數概念及四則運算，前者主要說明負數在生活中用來表示相對的概念，例如溫度的下降或是金融的負債，並利用數線操作之；後者則有「正數減負數」、「負數減正數」、「負數減負數」等各種組合的運算練習（洪有情，2022）。然而針對負號（「$-$」）的多元意義未做有效整合，就像符號「$-$」的兩種不同意義：分別讀作「負」和「減」，卻常因為這階段的學生只具有二元運算的減法概念，也就自然忽略負號的意義，進而影響後續的整數四則運算（Bofferding, 2014）。換言之，富有代數思維的負數學習，不論是負數的概念或是整數運算概念，從代數思維的觀點而言都意味著二種面向：其一是能否理解某些表達式術語之間的關係，如在讀 2 減負 3 時，是否可以正確表達成 $2-(-3)$，並且理解是 2 與負 3（單元符號）是減法（二元運算）的兩個物件？或者能否依據數學表徵設計可以應用的算術策略，好比可以依據 $7-(-3)$ 來陳述一個在生活中的真實情境並執行此數學算式的結果；其二是從結構整體性角度思考，以數學運算式而言，就是可利用數學表徵呈現其結構性，如算式的等價，而不僅只是逐步執行其步驟（Molina & Castro, 2021）。如：$-3-2-8$ 可以理解等價於 $-(3+2+8)$，不僅只是先計算 $-3-2=-5$，再計算 $-5-8=-13$。

108 課綱對於負數學習在第四階段的學習表現，只有一項指標：「n-IV-2 理解負數之意義、符號與在數線上的表示，並熟練其四則運算，且能運用到日常生活的情境解決問題。」其所對應的學習內容則有：「N-7-3 能使用『正、負』表徵生活中的量；相反數……」以及「N-7-5 擴充至含負數的數線；比較數的大小……」（教育部，2018）。然依據課綱「核心素養」所指的「知識、能力、態度」大目標，學習表現強調應以學生為中心，重視認知（求

知、應用、推理）與情意的學習展現（林福來等人，2013；國家教育研究院，2014）。但在教科書中，往往受限於編輯規範而無法具體實踐。以負數為例，「負」與「減」的差異——前者為單元運算，後者為二元運算，以及負號在對稱概念的學習，即應被重視；也說明現有教材的內容較著重於「學科學習目標」的知識內容與技能熟練與應用，較少提供認識負數與理解符號的學習機會。然而，在中學階段應多培養關聯性思考，尤其是在使用負號過程中的算式化簡過程，這樣才能減少發生錯誤（Vlassis & Demonty, 2022），且認識負數與理解符號是培養抽象概念與建立符號關聯等溝通能力的基礎知能，也是負數與正數學習的不同之處（林保平，2005；Fuadiah et al., 2017; Vlassis, 2008）。

為實踐 108 課綱「素養導向」的課程理念，林福來等人（2013，頁 30）建議以「知、行、識」作為 12 年國教素養導向教育的數學課程架構，以便「讓教科書編著者、教學者、評量者，都能了解課程設計的方向，使課程整體與實際執行之間能夠順利銜接」。簡單地解釋，「知」（to-know）即知道，「行」（can-do）是能做，而「識」（to-make-sense-of）則包含認識（understanding）等較高層次的認知、相關概念的連結，以及賞識（appreciation）等情意面向。研究者按此架構綜觀我國教材，「知、行」向度已有充分安排，唯「識」向度仍有努力的空間。也就是說，為提升數學領域的素養教學成效，仍需提供「識」向度的教材。

本文將「知、行、識」向度的學習表現分別稱為「知能」（knowledge）、「技能」（capability）和「識能」（sensibility）。為嘗試提供加強識能的教材，以 Bofferding（2014）所提的「語言譬喻」與「視覺操作」策略，研發「數學識讀文本」（mathematical text for understanding）。在負數單元，「視覺操作」的實踐方式為「數線操作」，此乃基於負數的特點之一，就是沒有可指認的物件情境，如+3 可以對應 3 個蘋果，但我們無法展示 −3 個蘋果；這時候「數線操作」與「語言譬喻」可以讓抽象的負數概念轉化成具體譬喻（Sfard, 1991）。

負數的教學研究歷時不墜。近年有些研究聚焦於提升負整數的運算能力，例如袁媛與許錦芳（2007）將科技融入負整數教學，針對低成就學生強化負數的加減運算練習，潘怡勳（2015）將遊戲融入教學，探討負數運算桌遊對學生學習成效之影響；有些研究探討負數的美感和價值，例如陳淑娟（2013）藉由數學史探討負數教學中的美感意涵。然而，少有運用「數線操作」與「語言譬喻」建立負數概念的研究文獻。

研究者認為現有教科書在「知、行」向度已有足夠教學，所以僅提供著重於識能的實驗教材：負數識讀文本，並用此文本進行教學實驗。為此目的，研究者依照「知、行、識」架構設計了負數單元的數學素養（以下簡稱「負數素養」）評量規準，並且據此規準設計了前測與後測評量試卷。前後測涵蓋「知、行、識」三個向度，同時在前後測試題亦有文字簡答題，將用做「負數的認識」（making sense of negative numbers）質性分析。本研究之「負數識讀文本」經由專家指導，在語言譬喻、聚焦主題、操作活動等內容上斟酌修正，並在逐年試教時期，依據學生與教師的回饋進行改善。基於此，本研究問題為：

（一）「負數識讀文本」是否能提升負數學習的素養表現？

（二）「負數識讀文本」是否能提升負數學習的知、行與識等各向度表現？

貳、文獻探討

一、知行識

首先界定本研究「知、行、識」之定義。「知」乃指學習內容的認識，包含一系列連貫的事實資訊，或非對即錯等事實區辨之學習內容（Wiggins & McTighe, 2005/2014）。例如，負數在數線上 0 的左邊、能夠從 $0, -\frac{2}{3}, -1, -0.0001, -1.5, 2$ 等數字中指認負數、知道用「-5」表示溫度零下 5 度等，皆屬於「知」。「行」是「能做」或「知道如何做」，可以說是單純的操作技能或是可以展示如何做的數學能力（單維彰，2018；Hiebert & Lefevre, 1986），例如 $3-5=-2$ 這樣的運算能力。「識」則指能利用習得的知識將生活情境中的問題轉 化成數學表徵，或是能運用理解的知識正確地陳述問題（單維彰，2019），例如能將正負數適當對應於情境中。

然而任何一種能力的學習都會有深淺不同，Hiebert 與 Lefevre（1986）即認為概念知識的最主要特徵就是要理解豐富的相關性，故將概念知識分為二個層次。第 1 層次為基本層（primary level），其知識的建構皆來自於相同的抽象概念層次，第 2 層次則是反思層（reflective level），它建構在更抽象的概念，而不僅僅只是片段信息的連接。本研究據此準則，將「知、行、識」分界出二個層次，上文所述之「知、行、識」定義即為基本的第 1 層，而反思的第 2 層則聚焦於知識間的連結。例如「知」的第 2 層次是能辨別符號的意義，即「減」或「負」之差異，表現在「二減負三」的聽說讀寫。「行」的第 2 層次則指可以執行 2 個以上操作步驟，或是能選擇較優之解題策略，例如能將 $-3-5-7$ 轉換為 $-(3+5+7)$ 得出正確答案-15。「識」的第 2 層次則指將片斷資訊整合評估與解決應用問題，包括能為正負混合的加減算式賦予符合經驗的意義，以及相信數學有益、認為數學美好等賞識態度。根據以上陳述，整理「知、行、識」表現內容之描述通則如表 1。在表格中，對應「知、行、識」的表現依序稱為知能、技能與識能。

表 1

「知行識」表現描述通則

類別	第 1 層	第 2 層
知能	屬於事實資訊（也包含一系列連貫的事實資訊）或非對即錯等事實區辨之學習內容。	對於符號意義的認識或是能擴展同層次之知識概念。
技能	能執行單步驟之運算程序的操作能力。	能執行多個概念間的轉換運算或能執行多步驟的加減混合運算。
識能	能運用所學知識應用於情境中的數量問題；能將情境問題轉換為數學式子的表徵。	能為執行的數學式子賦予符合經驗的意義，或是能以數學語句說明自己的論點，以及可以判斷解題的優劣，欣賞數學的價值。

二、數學識讀文本設計

識讀文本中負數概念引導乃參考 Sfard（1991）的具體化理論（theory of reification）。Sfard 認為數學概念的形成，有操作性（operation）與結構性（structure）二種過程。以「數」為例，孩童從操作性的點數（counting）開始，轉而學習以符號（印度—阿拉伯數碼系統）表達的數學物件（mathematical objects），最終形成結構性概念，例如先正整數，而後引進負整數並擴展成整數。

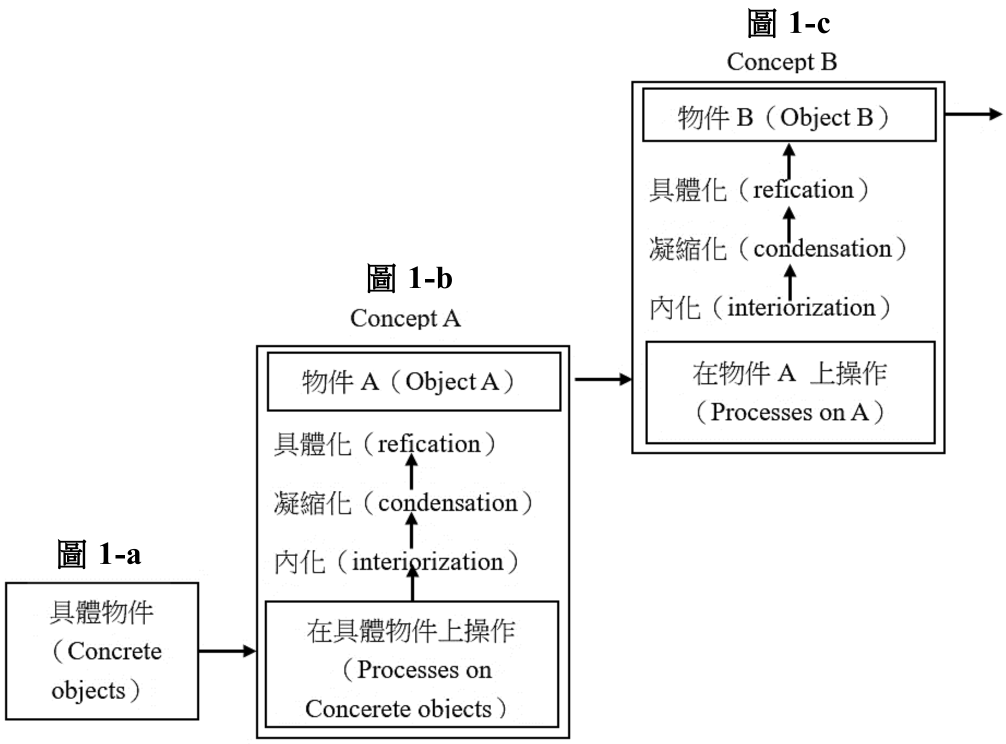
以學習負數的單元運算符號的意義為例，概念結構中的基本物件（Objects）即辨識負「一」號（欲表達相反或對稱概念），可從具體物件（實體或已經掌握的語言，如數線或負即相反譬喻）的操作經驗出發，如圖 1-a，經過具體操作而內化（interiorization），即因為數線的翻轉操作理解負號多了相反與對稱概念，如：理解了 -5 到 0 的距離與 $+5$ 到 0 的距離相等，或是可以熟練地表達 $-(-5)=5$，最終會產生一個新的物件 A，即對稱或相反概念，且在不需借助數線操作下完成；凝縮化（condensation）則是指可以排除多餘資訊或將資訊做分類，此階段會持續連接新概念的穩固，直到具體化形成，亦即可以突然有能力以全新的思維看待熟悉的物件，好比不僅是負數得到對稱新概念，甚至對於方位的變化亦能得到對應理解，其理解層次即如圖 1-b。

當物件 A 概念穩固之後，則可繼續進行新物件 B 的學習，如負數的運算，$3-(-5)$，此時新物件 B 就是「負與減的意義連結」（即一元運算與二元運算概念差異），但此學習是建立在物件 A 概念上開始操作，如圖 1-c。透過相同的具體物件（如數線或「負非減」與「負是後退」等語言譬喻）的操作，依舊經過具體操作而內化，到凝縮階段即已漸漸熟練操作，如：$3-(-5)=3+5$ 而游刃有餘，如：$-3-5-7$ 也能輕鬆轉變成 $-(3+5+7)$，我們就可以說這個概念已被具體化。然後可繼續往上至新物件 C 的學習，如圖 1-c 右邊的箭頭方向。

在 Sfard（1991）的概念形成理論中，會發現所有的概念發展都是有層次地依序前進，而且具體化不會在凝縮化或內化階段未完成前發生，且內化與凝縮化的過程是反覆修正漸進的；然而具體化則可視為瞬時固化，而成為一種靜態結構，然後就會將此做為基礎物件再向上學習。Sfard（2008）對此概念學習，指出數學物件的譬喻（metaphor of object）可作為形成數學概念的有效工具—這樣的譬喻就稱為「概念譬喻」，並認為譬喻層次的學習就是一種內在轉化。

此外，Dostal 與 Robinson（2018）則提出使用「視覺操作」不僅突顯概念間的關係性理解，也是有效的輔助教學策略。Dostal 與 Robinson 亦認為視覺能力是我們從這世界獲得訊息的最重要來源，重要的不僅是眼前看到什麼，而是看不到的還有什麼，而這亦是達到識能中關係性連結的策略之一。

圖 1
概念形成的一般性模組



註：引自"On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin," by A. Sfard, 1991, *Educational Studies in Mathematics, 22* (1), p. 22.

本研究採用的教材—負數識讀文本—即以「概念譬喻」與「視覺操作」作為核心策略，其中「概念譬喻」的實踐方式是語言譬喻，而「視覺操作」的實踐方式是數線操作。以下分別闡述這二種策略。

（一）概念譬喻

所謂的「譬喻」（metaphor）是一種思維現象，是指使用具體的描述（原始的定義域）透過適當的譬喻可以連結至抽象的定義（預想的對應域），可作為認知輔助工具，幫助我們建立或掌握新概念（Lakoff & Núñez, 2000; Sfard, 1991; Soto-Andrade, 2007）。以負數為例，當運算涉及負整數時，減法的含義會發生變化，因其結果是無法具體觀察的，但其目標是讓學習者能運用代數的概念處理整數的減法問題。此時的學習目標就是透過原始定義域（具體的數線操作與適當的語言譬喻），作為學習者能將負數以代數方式表徵的過渡橋樑，以連結至抽象的預想對應域（能處理有理數的減法，能以負號的多元意義進行溝通）（Altiparmak & Özdoğan, 2010; Dostal & Robinson, 2018; Vlassis, 2008）。

概念譬喻是詮釋一種符號或模型與概念之間的相關性，使之與個人內在無法看見的思維做連結（Lakoff & Johnson, 2003/2006）。例如文本引進負數的說法如下，它建立在正整數的舊經驗上，並以「物質」和「性質」作為正數與負數的語言概念譬喻：

> 計算「物質」的量，例如有多長？有多重？有幾人？這些「物質」量，最少就是「沒有」，不能比「沒有」更少；但「性質」的量不像「物質」，它不是具體的東西。例如冷熱，它是相對的性質，並不會「沒有」冷熱。於是，比空無還小的數出現了，稱為負數。

「性質」量雖然看不到，但在生活中仍有具體經驗，例如溫度計。透過具體物件的譬喻，進行負數概念的內化連結，亦能感受到即使抽象但仍能想像。接著鼓勵學習者舉其他例證（例如負債）作為從內化至凝縮的發展。然後，能陳述使用負號表徵的理由，以及接受負數在生活中的存在，即為其概念具體化的表現。

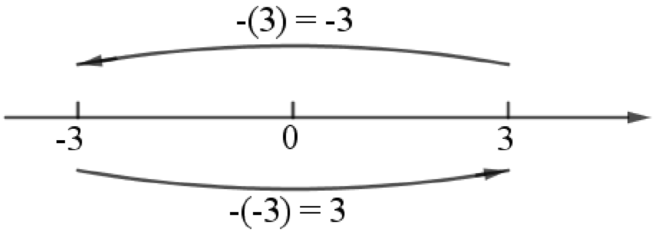
識讀文本的整體特色是重視數學概念與自然語言的連結（單維彰，2018）。因此，文本從一開始就強調「概念譬喻」與「視覺操作」，如「負非減」：提醒同學注意「－」號的兩個讀音：減、負，在學習的初期就關注讀音與書寫，是否可以將「$5-(-3)$」讀作「五減負三」？是否可以將「七減負二」正確記作「$7-(-2)$」？同時語言特徵也可以表現在一組一組的二元對立（binary oppositions），例如「負是後退」、「負是相反」，目的在利用對比差異進而得到概念的意義。這些譬喻不僅闡明正數與負數的對立概念，也提供理解負數之多元「方向」特性的機會（林芳玫、洪萬生，2009），例如正與反、上與下、前進與後退，同時也為負號的運算規則埋下伏筆，即負數加減的視覺操作。

（二）視覺操作

使用「視覺操作」可以突顯概念間的關係性理解，也是有效的輔助教學策略（Dostal & Robinson, 2018）。這種關係包含代數符號間的關係或是圖形中的關係，讓學習不再是盲目的服從，像背誦「負負得正」這樣的口訣（Baroody & Ginsburg, 1986; Gagatsis & Alexandrou, 2022）。但學生往往透過一知半解的負數運算口訣進行代數運算，因此而產生的錯誤反映的是對陳述性內容的不理解，而不是學生本身不具有代數處理能力（Kirshner & Awtry, 2004）。Dostal 與 Robinson（2018）認為視覺能力是我們從這世界獲得訊息的最重要來源，重要的不僅是眼前看到 什麼，同樣重要的是看不到的還有什麼，而這亦是達到識能中關係性連結的策略之一。 識讀文本之「視覺操作」搭配語言譬喻，聚焦於觀察與啟發數學直覺。利用溫度的變化引進包含負數的數線，以語言「負是相反」搭配操作活動，闡述此處「相反」的操作型意義是對稱於原點的鏡射，經過一些演練之後，明白「相反再相反就還原」，由此明白「負負得正」的意涵。如圖 2。

圖 2

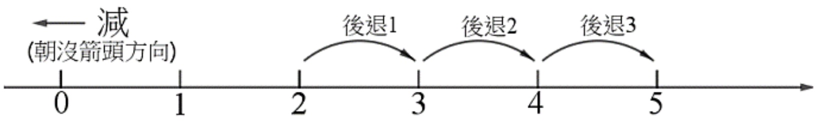
「負負得正」的視覺操作

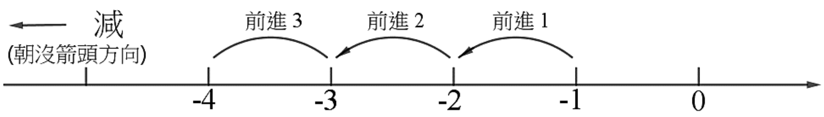


在數線上安頓正負數的位置之後，喚起舊經驗：加正數是向右走（即面朝箭頭方向，向前走），減正數是向左走（即面朝箭頭的相反方向，向前走），然後從「負是相反」引伸出「負是倒退」的語言譬喻，並實際操作為「加負數」是向右倒退，「減負數」是向左倒退。透過這樣的譬喻理解「$2-(-3)=2+3=5$」或「$-1-3=(-1)-(3)=-4$」，如表 2。

表 2

視覺顯著性與非視覺顯著性

<table>
<tr><th>視覺顯著性</th><th>非視覺顯著性</th></tr>
<tr><td>$2-(-3)=2+3$


(從數線上 2 的位置開始，面朝左後退 3 格)</td><td>$2-(-3)=2+3$</td></tr>
<tr><td>$-1-3=(-1)-(3)$


(從從數線上 -1 的位置開始， 面朝左前進 3 格)</td><td>$-1-3=-(1+3)$</td></tr>
</table>

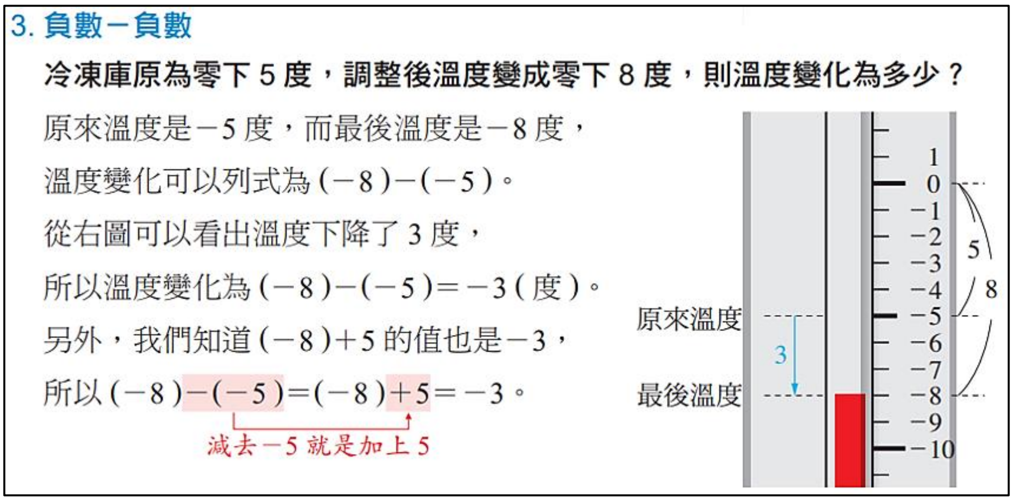
視覺顯著性（visual salience）即視覺上具有連貫性的規則（Kirshner & Awtry, 2004）。表 2 中，數線上位置的變化就是一種視覺顯著，透過「加或減」一個「正或負」數的對立譬喻與數線操作，可以由加減正數的數線操作擴展至加減負數的操作，一致性處理了「小減大」的正數相減情況，不需如教科書中針對整數相減情形分類處理。同樣的操作原理亦可引進負數的乘法，本文不再細表。但可以看出操作目的則如 Sfard（1991）所提之概念形成理論，是依序漸近由正負號的認識到負數運算處理，透過數線操作與概念譬喻循序完成，達到概念結構穩固。本節旨在識讀文本意欲透過語言的譬喻、觀察、溝通，進而從學習活動中有目的（有意識）地發展出的新概念，對引進的新符號，或擴充舊符號的意義亦使其延伸至新概念，以提升學生的識能（陳玉芬、單維彰，2021）

三、負數及相關識讀內容分析

Linchevski 與 Livneh（1999）認為負數學習的障礙區分為結構感的缺乏與對減法的限制性理解。Linchevski 與 Livneh 將結構感定義為能夠識別所有表達的等價形式，如：$237+89-89+67=237+67$，而不是 $237+89-89+67=237+89-156$。在小學階段，「取走」是減法的一種「不具符號」的概念操作，所以當國中生初次面臨「減負數」時，需要特別處理這種「減」的意義。本研究文本設計策略即在於結合結構和關係的特徵，目的在幫助學生克服結構感的缺乏和減法概念的限制。舉例來說，在語言譬喻中，「負非減」、「負是後退」、「負是相反」，即強調其在關係思維中，單元運算、二元運算、以及對稱概念的連結，強調該「負數」的整體性，再藉由數線操作進行運算，讓學習者可以「看到」符號意義的整體概念與操作結果。

舉例而言，七年級某版教科書的教學設計與本研究設計的文本類似，也採用溫度計作為實體操作物，如圖 3。其教學策略是引用舊經驗，將問題「從零下 5 度調整到零下 8 度，變化幾度？」寫成算式 $(-8)-(-5)$ 再從溫度計視覺操作得知「下降 3 度」而印證算式等於 -3，再根據 $(-8)+5$ 答案也是 (-3) 而歸納 $(-8)-(-5)=(-8)+5=-3$。而本識讀文本採用更「低階」的舊經驗：數線上的向前數、向後數，然後利用語言譬喻引進加減負數的運算規則，這裡相當於利用語言譬喻「偷渡」數學操作的定義，然後學生可以歸納「減負就是加」的現象，但是也可以演繹出這項結論。

圖 3
某版教科書上負號化簡示例


3. 負數－負數

冷凍庫原為零下 5 度，調整後溫度變成零下 8 度，則溫度變化為多少？

原來溫度是－5 度，而最後溫度是－8 度，
溫度變化可以列式為 $(-8)-(-5)$。
從右圖可以看出溫度下降了 3 度，
所以溫度變化為 $(-8)-(-5)=-3$（度）。
另外，我們知道 $(-8)+5$ 的值也是－3，
所以 $(-8)-(-5)=(-8)+5=-3$。
減去－5 就是加上 5

本研究採用的識讀文本，盡可能同時貼近語言直覺與數學思維，並突顯新物件與舊經驗的一致性利用概念形成與穩固，藉數線上的視覺操作而完成「－」號的多元意義，如表 3（Altiparmak & Özdoğan, 2010; Bofferding, 2014; Gagatsis & Alexandrou, 2022; Vlassis, 2008）。表格所列的三種意義，對應負數教學的三項目標：負數在數線上的位置，加減負數的二元運算，以及「取相反數」的單元運算。本研究設計的測驗，即涵蓋這三項教學目標。

表 3
「－」號多元意義

符號的意義	說明	示例
負號（negative） 單性質符號	正數：原點右側 負數：原點左側	3 即 $+3$ -3
減號（subtraction sign） 二元運算符號	加：向右進 減：向左進	$2+3$ $2-3$
相反（negation / opposite） 單元運算符號	取相反數 讀音也是「負」	$-(3)$ $-(-3)$

四、「知行識」評量規準

為實徵探測「負數識讀文本」及其教學活動設計的實施成效，本研究以負數內容範圍為限，設計評量工具；此評量工具之設計準則，參照國立臺灣師範大學心理與教育測驗研究發展中心（心測中心，2021）發展之「標準本位評量」，以學習者的學習成果對照於事先訂定的評量標準，評量的目的在於瞭解學習者在該領域中達到的狀態，藉此反映素養教育的重要參考指標。此評量架構的內容包含主題、次主題與表現描述。主題與次主題呈現學到哪些內容，學習表現又分為 A-E 五種表現等級，主要描述學習到何種程度，如圖 4。圖 4 說明學生在此準則下應盡可能達到對知識的理解掌握、程序技能的嫻熟，以及能應用並解決生活問題的態度。

圖 4
國民中學標準本位評量數學領域各等級表現描述通則

主題	次主題	A	B	C	D	E
		能分析問題，利用所學數學知識與能力，提出支持性的理由。	1. 能延伸、應用基本的概念。2. 能應用所學數學知識與能力解決問題。	1. 能理解基本的數學概念。2. 能作基本的數學運算。	1. 能認識簡易的數學概念。2. 能作簡易的數學運算。	未達D級

主題、次主題：
學到哪些內容

A-E 等級表現描述：
做到什麼程度

註：引自心測中心（2021）。**十二年國教課綱國民中學素養導向標準本位評量**（頁 17）。作者。

圖 5 則是針對課綱中對於負數學習表現之描述（n-IV-2），對照心測中心（2021）之表現描述通則所設定的評量標準。

圖 5

國民中學標準本位評量數學領域各主題評量標準

主題	次主題	A	B	C	D	E
7年級數與量	數與數線	能分析數量問題，並提出支持性的理由。	能利用數的運算規則，解決具體情境中的數量問題。	能理解並利用運算規則做正負整數的四則混合運算。	能認識負數，並能以「正、負」表示生活中性質相反的量。	未達D級

註：引自心測中心（2021）。**十二年國教課綱國民中學素養導向標準本位評量**（頁 18）。作者。

圖 6 即為本研究在「知行識」課程架構下，根據「標準本位評量」的 A-E 五種表現等級描述，針對負數學習表現之各項能力做更具體的層次描述。此評量規準將評量目標分為知能、技能、識能，並將每個目標分為二個層次，以呼應表 1 描述的通則。例如「知能」分為記憶、辨識、指認的第 1 層次，以及判讀算式、辨別正負的第 2 層次。

圖 6

「知行識」評量規準

主題	次主題	A	B	C	D	E
7年級數與量	數與數線	識2：能以數學語句說明自己的論點；能統整連結相關概念判斷解題的優劣，欣賞數學的價值。	識1：能將情境問題轉換為正負混合的算式；行2：能解決具體情境中的數量問題；能執行多步驟正負整數的加減混合運算。	知2：能正確聽說讀寫正負與加減混合的數學式；能判斷數式的正負性；行1：能執行單步驟正負整數加減運算或能比較負數大小。	知1：能記憶、辨識、指認負數符號及其在數線上的位置；能以「正、負」表示生活中性質相反的量	未達D級
例題說明 主題、次主題：學到哪些內容		針對以下的數學式子，描述一個在生活中有可能發生的情境。 $18-(-12)$ 可能發生的情境：＿＿ 識2 「識2」的表現等級 A	BNT 疫苗裝瓶之後，需從攝氏 8 度急速冷凍到零下 80 度。問：它上升還是下降了幾度？ 識1 或是 (1) $85+(-53)-(-9)$ 行 2 「識1、行2」的表現等級 B	下列這些數都屬於負數： 0、$-\frac{2}{3}$、-1、-0.0001、-22000000、-1.5 知 2 或是 $-7+3=-4$ 行1 「知2、行1」的表現等級 C	「負數」用數線表示時，它總是在數線的＿＿＿（填左邊或右邊） 知1 或是 「負數」如:＿＿＿＿＿，（列舉 3 個即可） 知1 「知1」的表現等級 D	未達D級

評量規準的兩層次設計，進一步呼應 Hoffer（2020）所提，除了要理解表層結構（surface structure），也要學習深層結構（deep structure）。例如能夠計算 $(-9)+(-6)$ 屬於第一層次表現，它是七年級學生的基本計算能力。但若可以將 $-9-6$ 這個減法算式轉換成兩個負數相加 $(-9)+(-6)$，故可採用較簡單的計算策略 $-(9+6)$，則表明學生已經超越簡單負數減正數的二元運算，進而建立新的概念結構，所以列為第二層次。

參、研究方法

一、研究對象

本研究對象為新北市立某所公立高中國中部的七年級學生，實驗組學生 91 人（4 個班，男 58 人、女 33 人），對照組為 45 人（2 個班，男 29 人、女 16 人），合計 136 名學生，二

組皆為 S 型常態編班，每週皆為 5 節的數學課。本研究採方便性取樣，即由研究者（數學教師 A）之授課年級為實驗組，在每週 5 節數學課中，於固定時間安排 1 節進行識讀文本教學實驗，由數學教師 A 授課並持續進行 4 週，其餘 4 節數學課則由其他的數學教師 C 或教師 D 教學，彼此獨立進行互不干擾；對照組學生則未介入任何識讀文本閱讀課程的干預教學，維持 5 節正常的負數課程學習，並使用一般教科書教學，5 節課皆由同一位數學教師 B 授課，數學教師 B 雖亦有擔任其他班級之數學識讀文本教學，但為減少教師教學方式的變量，本研究只針對數學師 A 授課班級列入研究對象，資料說明如表 4。

基於研究對象取得不易，為配合該校既定之課程設計，有二個班級並未安排彈性課程，故僅取此兩班作為對照組。惟於學期結束，研究者將在實驗組所有授課之課程內容交予數學教師 B，作為控制組學生課後之閱讀補充教材。

表 4

研究對象基本資料表

組別	相關班級	數學課節數／週	任課教師	參與人數
實驗組	4 個班	4 節數學課 (使用教科書)	其中 2 班的 4 節數學課為數學教師 C、另外 2 班的 4 節數學課為數學教師 D	男 58 人 女 33 人
		1 節彈性閱讀課 (使用識讀文本)	4 個班的 1 節彈性閱讀課，皆為數學教師 A（研究者）	
控制組	2 個班	5 節數學課 (使用教科書)	5 節數學課皆為數學教師 B	男 29 人 女 16 人

二、研究工具

本研究旨在探討識讀文本施行後實驗組對負數理解之相關素養之改變，基於此目的，本研究工具有四種，分別是：「負數識讀文本」、「知行識評量規準」、「負數素養前測」以及「負數素養後測」。「負數識讀文本」為本研究實驗組之主要教學工具；「知行識評量規準」則是作為實驗組與對照組在評量施測時在「知、行、識」向度表現上的評量依據；而「前測」與「後測」則是根據此評量規準而設計的評量工具。「前測」內容為二部分，一部份作為教學前，兩組學生對於負數的認識理解是什麼？將此質性回饋結果與後測回答作比較，作為回答本研究問題一，是否提升負數的數學素養表現；前測另一部份題目的設計則與後測相呼應，作為後測分析時共變項的依據，藉此回答本研究問題二，「負數識讀文本」是否能更有效提升負數學習的知、行與識等各向度表現。

（一）負數識讀文本

此套文本由研究團隊編撰，故無版權之虞。為確保識能實驗教材的嚴謹性，研究者乃自 2020 年起研發「數學識讀文本」經由專家指導，逐年試教並根據學生與現場參與教師回饋進行修正與改善，本實驗研究之識讀文本則為第三版之修訂內容。僅針對負數識讀文本單元的設計依據文獻的語言操作或視覺操作，分別示例說明預期達到「知、行、識」之不同層次。

1. 「知」能文本設計策略

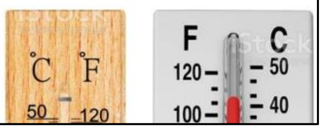
基於七年級學生剛接觸新課程並不適合整篇文本由學生自行閱讀，先由教師引導小段閱讀，強調黑體字之差異性，透過語言譬喻「物質」與「性質」的對比，讓學生感受什麼是比空無還小的數，如圖 7。此譬喻是學生日常生活中確實能感受之情境，也提供負數抽象概念的具體感受。

圖 7
知 1 層次使用的語言譬喻

比空無還小的數

♠小時候所知的正數或零，只能用來計算「**物質**」的量，例如有多長？有多重？有幾人？有多少？等等的問題。這些「物質」量，最少就是「沒有」，不能比「沒有」更少。例如一條繩子不能比 0 公尺更短，一張紙不能比 0 公克更輕，一間教室裡的人數不能比 0 人更少。

到國中，我們長大了，要遭遇「**性質**」的量。「性質」不像「物質」，它不是具體的東西。例如冷熱，它是相對的性質，並不會「沒有」冷熱。用攝氏溫標（C）來測量冷熱時，所得的溫度可能大於

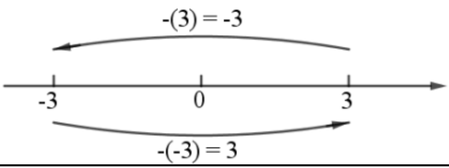


接著，圖 8 亦為本文本強調符號意義連結之目的，意欲透過「負即相反」之語言譬喻，再觀之視覺的數線操作變化，讓學習者不僅觀察負號在數線上的操作印證「負負得正」的具體結果，亦觀察圖形呈現對稱的變化，預期達到知 2 層次的連結反思概念。

圖 8
知 2 層次的語言譬喻與視覺操作

♠「**負**」即「**相反**」

在數線上，「負」就是「相反」的意思。就像與原點 O 的距離相等的兩個數，互為「相反數」。如下圖，$-(3)$唸作「負 3」，是 3 的相反數，簡記作 -3。而$-(-3)$是 -3 的相反數，那就是 3。所以$-(-3)=3$不過就是「相反再相反就還原」，就好像「向後轉」再「向後轉」就回到原來的方向，也就所謂的「負負得正」。



2.　「技」能文本設計策略

圖 9 說明負與減的差異，首先由最基本的負數加法開始，藉由學生對於數線操作正數的熟悉度，再強調正與負的相反特性，因為「加」是朝箭頭方向前進，所以「減」可以理解是朝箭頭的反方向，藉此觀察數線操作後的變化，以及「減」與「負」的差異，預期達到行 1 層次。

圖 9

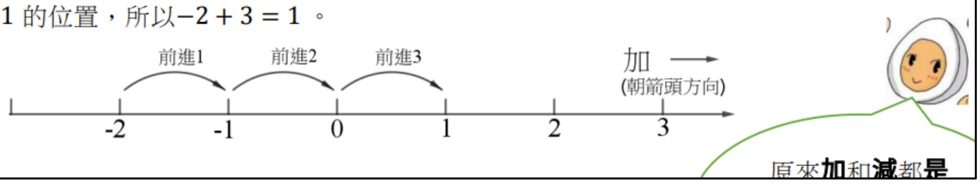
行 1 層次的使用語言譬喻與視覺操作

「負」非「減」

因為「負」和「減」恰好使用了同樣的符號「－」，害得很多同學剛開始學「負數」的時候，以為「負 1」和「減 1」是一樣的。不！**「負」是代表一個數的屬性**，例如「負 1」代表在原點 0 的左邊 1 個單位的「位置」，但是**「減」卻是代表兩個數的運算**。比方說，「加 1」是朝數線的箭頭方向前進 1 個單位，而「減 1」是朝數線的「沒箭頭方向」前進 1 個單位。

(1) $(-2)+3$　（妳／你會讀此算式嗎？**注意** $-2+3$ 和 $(-2)+3$ 是同樣意思的算式。）

數線上的動作：從運算元-2 在數線上的位置開始，朝**數線箭頭方向**前進 3 單位，到達 1 的位置，所以$-2+3=1$ 。



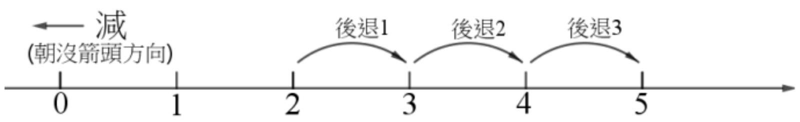
在熟悉行 1 層次的符號化簡操作與類題演練之後，$(-3)-(-2)$ 即屬於混合運算操作，學習者必須理解負與減的化簡以及負數運算二種操作能力，以預期達到行 2 層次的目標，如圖 10。

圖 10

行 2 層次使用的語言譬喻與視覺操作

(4) $2-(-3)$　（注意，因為－－接連在一起不容易讀，所以不寫$2--3$而寫$2-(-3)$）

這個算式讀作「2 減負 3」，代表著「**從 2 的位置朝沒箭頭方向**（這是「減」的意義）**倒退**（這是「負」的意義）**3 個單位**」到達 5，所以 $2-(-3)=5$ 。



(**原來：**「－」號與「－」號可以化簡成一個「＋」號)

3.　「識」能文本設計策略

運用所學知識解決生活中的應用問題，即達到識 1 層次。如圖 11 所示例題中，學生在(1)式中若回答 $20+25$ 或 $-25-20$ 都不能算錯，但若使用前式表示屬行 1，若用後式表示且回答正確則屬行 2；此外，在(2)式寫出答案中，若寫明「下降」則屬「識 1」。

圖 11

解決生活問題能力的識 1 層次

> 2. 疫苗裝瓶之後，從攝氏 25 度急速冷凍到零下 25 度。它上升還是下降了幾度？
>
> (1) 寫出數學算式並計算出答案。
>
> (2) 寫答案。（注意要寫上升還是下降，還要寫單位喔。）

接著圖 12 說明學生是否可利用正負號表徵或口語表達說明三兄弟、住宿老闆、服務生等彼此之間的金額流向？並運用自己的觀點說明問題的矛盾與不合理之處，以培養識 2 層次。

圖 12

解決生活問題能力的識 1 層次

> **「負」的應用：消失的一元**
>
> 友直、友諒、友多聞三兄弟到旅館住宿，服務生說要 30 元，所以他們每人出 10 元來付住宿費。剛好今天旅館特價優惠，住宿費減價，只要 25 元，於是老闆叫服務生把 5 塊錢找還給三位旅客。當服務生退還 5 塊錢給三兄弟時，友直建議付 2 元小費給服務生，剩下的 3 元三兄弟剛好可以平分，大家也覺得贊成就都同意了。到了晚上，友諒卻覺得很奇怪，他說消失了 1 元。他的理由如下。
>
> 三人各出 10 元減去服務生還給他們一人 1 元，等於三人各出 9 元。
>
> 所以 9 元 × 3 人 ＋ 給服務生的 2 元＝27＋2＝29 元。
>
> 怎麼不是最初的 30 元呢？還有 1 塊錢去哪了呢？

（二）「知行識」評量規準

評量規準目的在於發展一個能檢核學生更清晰的學習層次。表 5 即針對「知行識評量規準」中的知行識向度與層次做說明。

表 5

知行識學習表現之評量定義與範例

知能規準

知 0：未達知 1 層次。

知 1：能記憶、辨識、指認負數符號及其在數線上的位置；
能以「正、負」表示生活中性質相反的量。

知 2：能正確聽說讀寫正負與加減混合的數學式；
能判斷單元或二元運算的正負性；
能將正負與加減混合的數學式轉換為所需的正數加減算式。
以上指標可包含絕大多數適齡學生能熟練操作的正整數計算。

「知 1」層次
(1) 知道負數在數線上 0 的左邊
(2) 溫度零下 10 度用 -10 表示
(3) 能標示：　請在數線上標示出-1、-2的位置

「知 2」層次
(1) $3-(-2)$ 知道讀作：3 減負2
(2) $-(-2)=2$
(3) 負數包含了負整數、負分數、負小數

技能規準

行 0：未達行 1 層次。

行 1：能執行單步驟正負整數加減運算且不含減負者或能比較負數大小。

行 2：能執行減負運算；能執行多步驟正負整數的加減混合運算。

「行 1」層次
能算出：$-3+2$ 的值並無誤

「行 2」層次
(1) 能算出：$-3-(-2)$ 的值並無誤
(2) 能對$-3-5-7$進行化簡為 $-(3+5+7)$ 並計算正確

識能規準

識 0：未達識 1 層次。

識 1：能將正負數適當對應於情境中的數量；
能將情境問題轉換為正負混合的算式。

識 2：能為正負混合的加減算式賦予符合經驗的意義；
能以數學語句說明自己的論點；
可以判斷解題的優劣，欣賞數學的價值。

「識 1」層次
舉例說明一個生活中用-15表示的情境。

「識 2」層次
剛從遠洋捕獲的鮭魚在送上岸之後，需立刻從攝氏 25 度急速冷凍到零下 20 度。問：它上升還是下降了幾度？
(1) 根據題意寫出數學算式。（不必寫出單位。）(5%)

(2) 計算出答案並寫出答案。（注意要寫上升還是下降，還要寫單位喔。）(5%)

（三）負數素養前測

前測分為二部份，第一部份是對負數的想法與對負號的認識做文字描述，如：你認為負數是什麼？然後再依據所有的回饋資訊，依其文字敘述將其分為「識能理解」、「一般理解」、「錯誤理解」、「字詞誤解」以及「無法表達」五種等級，並以 5 至 1 分代表之，如表 6。其中「識能理解」表示能夠完整說明負數的特性，包含一元運算、二元運算、或具有對稱等相反數的概念，屬於最高等級 5；「一般理解」則是對於負數的正確基本認識，屬次高等級 4；依此類推，「錯誤理解」則指已懂得使用數學概念說明，只是理解不夠正確，屬等級 3；「字詞誤解」則是僅依照負數的字面解釋來說明，並無察覺任何的數學概念，屬等級 2；「無法表達」則代表對於負數概念完全無法理解，屬等級 1。表 6 則為此五等級之表述內容的分類說明。然後再與教學完成後的後測結果進行卡方檢定的前後測數據差異分析，檢核在教學前後對於「負數的認識」其理解變化，作為回應問題一的研究根據。

表 6
前測問卷對「負數的認識」理解分類表

理解分類	表述內容	等級
識能理解	性質符號／正數的相反數／相對概念／在數線的左邊／負非減／在原點 0 的左邊	5
一般理解	比 0 還小的數／小數減大數／減到不夠時／不是正數也不是負數	4
錯誤理解	不大不小的數／比 1 還小的數／不超過 1 的數／很小的數／除不盡的數／計算溫度／負整數／0 以下的整數／可以是正數也可以是負數	3
字詞誤解	就是一種數／不足/沒有東西還去借／負債／要花錢/一種不好的數字／負面的數字／「−」號要加在前面數字裡／負數就是數學中的一員	2
無法表達	很難的數／不知道／空白	1

第二部分，則為測驗題型，所有設計之題目皆會與後測問題對應，並將前測做為共變項，與後測進行共變項分析，作為回應問題二的研究根據。題目為負數概念的基本認識與計算，例如：用國字寫出 $-3-(-2)$ 的讀音、在數線上標示出 -2 和 0、計算 $-2-9-7$ 等，作為在後測分析時，判定共變量的效應以及共變量與因素之間的交互作用。

（四）負數素養後測

後測是學習者在識讀文本學習後，針對實驗組與控制組所做的評量。後測內容同樣也分為二個部份，第一部份分析在教學後對於負數認識的修正，與前測做學習後改變的比例分析，用來說明對於「負數的認識」之負數素養表現；第二部份的題目由三位專家針對試題部份依據「知行識評量規準」的「知、行、識」向度分類，所設計之題目與前測呼應。其題目信度考量，採用評分員信度法檢視評分者間同意度，先計算評分者間的相互同意度

（Pi），再求得平均相互平均值（P），最後歸類之結果依伯格納簡易信度公式計算信度（R ≑ .934，R＞0.8），相關公式如下（歐用生，1991）。信度計算結果如表 7。

- 相互同意度（Pi），$Pi = \frac{2M}{N1+N2}$ ，

  M：兩人共同同意的項目數；

  $N1$、$N2$：第一、二位評分員應有的同意數
- 平均相互同意度（P）

  $P = \frac{\sum_{i=1}^{n} Pi}{N}$ ，N：評分者相互比較的總次數
- 簡易信度（R）

  $R = \frac{nP}{1+[(n-1)P]}$ ，n：評分者總人數

表 7

知行識分類信度結果

評分員	甲	乙
研究者	.875	.750
甲	—	.853

註：平均相互同意值 P ≑ .826（約至三位小數）
信度 R ≑ .934（約至三位小數）

三、研究設計

實驗組與對照組皆於開學初 8 月 31 日施行前測，施測時間為 40 分鐘。實驗組與對照組之數學課程皆為每週 5 節課，每節 45 分鐘。實驗組從 9 月 6 日起實施每週 1 節的「負數識讀文本」閱讀，教學者即為研究者（數學教師 A），其餘 4 節為一般正常教學；對照組則為每週 5 節的一般正常教學（數學教師 B）。實驗組與對照組皆持續進行四週，課程實施流程如表 8，並於 10 月 18 日施行後測，施測時間為 40 分鐘。

表 8

實驗組負數識讀文本設計策略內容與實施流程

授課日期	文本策略	文本主題內容
9/6	語言譬喻、數線操作	負數符號意義、表示法；數線上的負數表示
9/13	語言譬喻、數線操作	負數概念摘要、澄清；表示法的熟悉度
9/20	語言譬喻、數線操作	負號的意義、數線上的負號加減運算、
9/27	語言譬喻、數線操作	數線上負號的乘法運算[註]；負數概念摘要、澄清；負號運算的熟練度

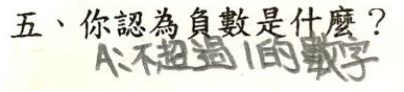
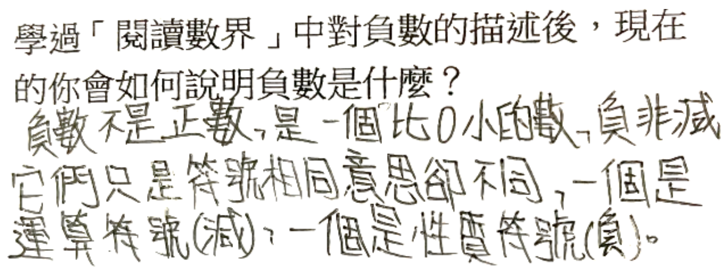
註：9/27 上課內容主要為負數加減運算的概念釐清及精熟練習，僅於最後 15 分鐘問學生「負號的乘法運算」是否也能利用數線操作完成？讓學生討論與思考，作為下一單元的課前學習動機。故 9/27 之授課不在本文研究範疇內，本研究僅針對 9 月 6、13、20 日的「負號加減運算」之教學活動。

四、資料分析

本研究資料分析分成二個部份。在研究問題一，即在前測與後測題目中，針對「負數的認識」設計文字回饋，將原始資料歸類為「識能理解」、「一般理解」、「錯誤理解」、「字詞誤解」以及「無法表達」5 種等級，故在前後測表現這類相依資料上，吾人採用 McNemar-Bowkert 法，來檢定各自兩組學生在前後測分類之分佈是否有顯著改變。表 9 為編號 S10717 學生於前後測針對「負數的認識」所寫內容之示例說明。

表 9

學生知行識前後測表現示例說明

前測對負數之識能表現	前後測對負數之識能表現
 五、你認為負數是什麼？ A:不超過1的數字	 學過「閱讀數界」中對負數的描述後，現在的你會如何說明負數是什麼？ 負數不是正數，是一個比0小的數，負非減它們只是符號相同意思卻不同，一個是運算符號(減)，一個是性質符號(負)。

說明：S10717 學生在前測時，只有單純從字面意思回答對負數的認識，但後測的表現，除了可以回答正確，也能寫出「（負號）符號相同意思卻不同」做輔助說明，同時描述的文字也更豐富完整。

研究問題二方面，在教學前對實驗組與對照組之前測資料，將進行獨立樣本 t 檢定，檢視實驗組與對照組在教學前，其負數概念表現是否有所差異？同時，本研究主要欲了解在控制前測分數的情況下，「知、行、識」三向度在後測上，兩組之表現是否達顯著差異，因此本研究將使用多變量共變異數分析（Multivariate analysis of covariance [MANCOVA]）進行分析。

肆、研究結果

一、「負數識讀文本」對負數素養表現之影響

根據學習者在前後測的簡答題中，針對「負數的認識」回饋，依表 6 的分類，以 McNemar-Bowkert 法檢驗兩組各自在前後測上，學習表現之差異（見表 10）。在實驗組方面，學生在前後測上分類百分比達顯著差異，$\chi^2(10, N = 85) = 37.133$（$p < .05$）；而在控制組方面，學生在前後測之分類百分比則無顯著差異。由兩組在前後測的分類百分比（見表 11），實驗組學生在介入前後在「識能理解」上從 2.4% 提升 25.9%，同時在「錯誤理解」及「字詞誤解」方面，分別從 11.8% 降至 2.4%，以及從 23.5% 降至 10.6%。

表 10

二組在「負數的認識」以 McNemar-Bowker 檢定學習前後的差異表現

組別／有效觀察值個數 N	數值 (χ^2)	自由度 (df)	漸近顯著性 (p)
實驗組／N = 85	37.133	10	< .001
控制組／N = 41	7.533	9	.582

表 11

前後測問卷對「負數的認識」理解分類百分比

組別	識能理解	一般理解	錯誤理解	字詞誤解	無法表達
實驗組（前測）	3.5%	36.5%	11.8%	23.5%	24.7%
實驗組（後測）	25.9%	40.0%	2.4%	10.6%	21.2%
控制組（前測）	9.8%	58.5%	4.9%	17.1%	9.8%
控制組（後測）	17.1%	56.1%	4.9%	17.1%	4.9%

二、「負數識讀文本」對提升負數學習的知、行與識各向度的表現

首先檢視兩組前測間是否有差異。由表 12 看出進行識讀文本教學前，實驗組前測平均分數顯著低於對照組平均分數，代表兩組在初始能力上即有差別，因此對於兩組在後測分數方面，我們將以前測分數做為控制變項進行後續分析。同時，我們也發現數學成就的段考成績，在兩組間的分數未達顯著差異，說明實驗組在每週少了一節正課的情況下，其數學成就未顯著低於控制組。

表 12

實驗組與對照組學生相關數學表現測驗一覽表

數學表現	組別（N）	總分	平均數（標準差）	平均數差（I – J）	顯著性
前測	實驗組 I（91）	19	7.11 (4.463)	–2.33	.004
	對照組 J（45）	19	9.44 (4.203)		
數學成就	實驗組 I（88）	100	60.68 (26.714)	–2.52	.595
	對照組 J（45）	100	63.20 (23.766)		

表 13
組別對後測的「知、行、識」各向度間之共異數變分析摘要表

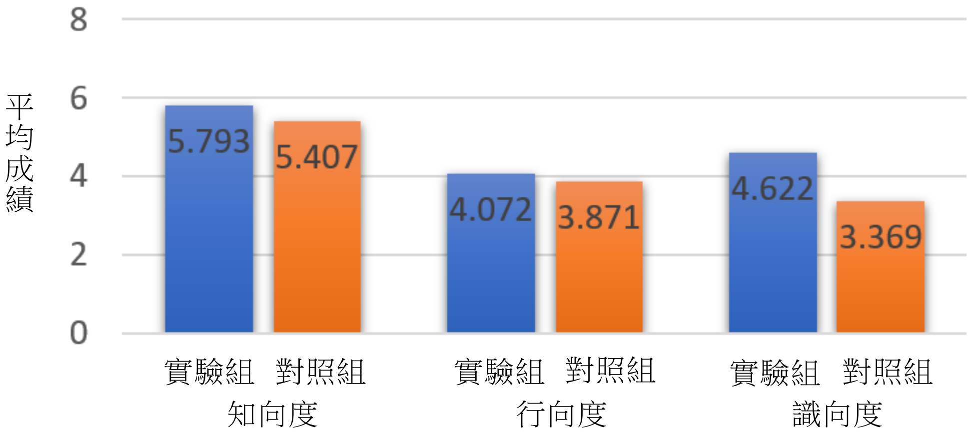
變異來源	依變量	*SS*	*df*	*MS*	*F*	顯著性
截距	知	289.878	1	289.878	144.892	.000
	行	99.956	1	99.956	56.432	.000
	識	53.768	1	53.768	18.431	.000
組別*前測	知	4.218	1	4.218	2.108	.149
	行	.007	1	.007	.004	.950
	識	5.097	1	5.097	1.747	.189
前測	知	62.892	1	62.892	31.436	.000
	行	68.717	1	68.717	38.796	.000
	識	139.990	1	139.990	47.986	.000
組別	知	5.770	1	5.770	2.884	.092
	行	.123	1	.123	.070	.792
	識	18.986	1	18.986	6.508	.012
誤差	知	234.076	117	2.001		
	行	207.238	117	1.771		
	識	341.322	117	2.917		
總誤差	知	4282.000	121			
	行	2243.000	121			
	識	2741.000	121			

本研究主要關注學生在識讀文本介入後，在「知、行、識」三個向度上是否較接受正常教學的學生佳。因此，我們以組別為獨變項、前測為共變項，進行 MANCOVA 分析。在變異同質性檢定方面，「知、行、識」的 Levene 檢定分別為 $F(1, 119) = 1.189$、$p = .278$；$F(1, 119) = 1.159$、$p = .284$；$F(1, 119) = .693$、$p = .407$，即未違反變異數同質性假定。由 MANCOVA 的結果，得到 Wilks' $\lambda = .921$、$F(3, 115) = 3.280$、$p < .05$、$\eta^2 = .079$，代表整體而言，兩組之間有所差異。接著再檢視個別依變項，見表 13。結果指出，「知」與「行」兩向度在組別上無顯著差異，而「識」向度在組別效果則具顯著差異，$F(1, 117) = 6.508$、$p < .05$）、$\eta^2 = .053$。「識」的組別效果方面，是在控制前測之情況下，模式估計之平均數在實驗組（$M = 4.622$）顯著高於控制組（$M = 3.369$），見表 14 及圖 13。

表 14
模式估計兩組在後測「知、行、識」各向度之平均數與標準差

測量變項	組別（*N*）	平均數	標準差	95%信賴區間	
				下界	上界
知	實驗組（85）	5.793	.157	5.481	6.104
	對照組（37）	5.407	.261	4.891	5.923
行	實驗組（85）	4.072	.148	3.779	4.366
	對照組（37）	3.871	.265	3.386	4.357
識	實驗組（85）	4.622	.190	4.245	4.998
	對照組（37）	3.369	.315	2.746	3.992

圖 13
實驗組與對照組後測的「知行識」各向度平均成績長條圖



伍、結論與建議

一、結論

本研究使用譬喻方式操作負數的多元概念，如：「負非減」、「負是倒退」、「負即相反」等多元譬喻，從學生回饋分析是很有提醒與強調的作用，比方說：「原來負與減是不同的，也更容易計算了」、「原來−1比−5大」、「負數不代表一定是不好」、「不用像以前要倒過來寫可直接計算」、「更加知道如何表現在數線上」、「現在能算更小的數了」。且針對「負數的認識」的識能教學目標上，透過表 10 與表 11 亦可看出，實驗組學習者面對一個全新的負數概念或符號時，表現在普通以下（含）者「錯誤理解」、「字詞誤解」、「無法理解」的修正率分別從 11.8%下降至 2.4%、23.5%下降至 10.6%、24.7%下降至 21.2%，而在「負數的認識」的識能表達，比例由 3.5%提升至 25.9%，說明識讀文本可以協助學生釐清抽象概念，這些都可作為負數學習在「識」向度以及數學素養的提升。

此外，本研究實驗結果，在施測前的前測分析、以及數學能力（該校第一次段考測驗成績）分析，實驗組表現皆低於控制組的表現，然在施行負數識讀文本教學後所做的後測分析，在控制前測表現下透過共變數分析後可看出實驗組在識能表現達顯著差異，且在表 14 的估計模式中，實驗組的後測「知、行、識」平均成績亦高於控制組，同時再以後測各「知、行、識」測驗示例，在「知」能檢測中，以聽寫為例，其中第一題表達正確率 88.8%，如表 15-(a)、第二題正確率 77.7%，如表 15-(b)，亦即此二題答對率皆超過 75%，而表 15-(c)則是二題皆錯之錯誤型式。

表 15
「知」能測驗示例回饋

(a) 第一、二題皆正確的表示法	(b) 第二題未能明確以括號分辨減與負的差異	(c) 答案皆錯類型
聽力測驗 班級:107 座號:02 第一題：−2+3 第二題：2−(−3)	聽力測驗 班級:107 座號:22 第一題：−2+3 +4 第二題：2− −3	聽力測驗 班級:105 座號:14 第一題：−1 第二題：5

「技」能測驗示例以$-3-5-7$ 與 $2-8+2$ 計算為例，第(2)題答對率 62.2%、第(3)題答對率 81.1%，如表 16-(a)；表 16-(b)則分別表示第(2)題及第(3)題答錯且為 DFMS 錯誤型示例說明，這些結果顯然對於學生常犯的計算錯誤有很大的修正功能。

表 16
「技」能測驗示例回饋

(a) 第(2)題未能明確以括號分辨減與負的差異	(b) 答案皆錯類型
(2) $-3-5-7$ $=-8-7$ $=-15$ (3) $-8+2$ $=-6$	(2) $-3-5-7$ $=7+3+5$ $=10+5$ $=15$ (3) $-8+2$ $=-10$

「識」能檢測示例則以描述「減」與「負」的差異，主要目的在於培養學習者能在學習之後，檢測自己的觀點或獲得的知識是否有所改變或修正，回答情形如表 17。

表 17
「識」能測驗示例回饋

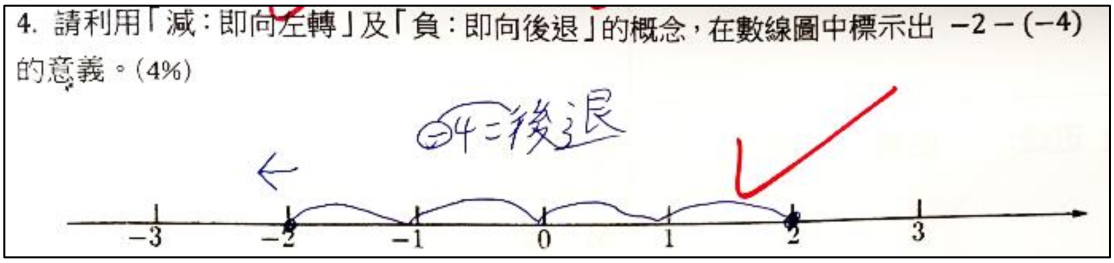
(a) 反映說明學生對於文本內容的理解	(b) 透過文字說明，已成功傳達「減」與「負」在二元或單元運算間的差異
(2) 承(1)，請寫出你覺得式子中，讀「減」或讀「負」的意義 負是向後退，減是向左轉。	(2) 承(1)，請寫出你覺得式子中，讀「減」或讀「負」的意義。 讀減是兩數相減，讀負是小於 0的數

據上述這些說明可推論透過本研究的語言譬喻與視覺操作的設計所發展之識讀文本教學，對負數的素養學習是可以有效改變的。

二、建議

在教學過程發現，學生雖然可以使用倒退概念用語，但仍無法使用數線完整表達負與減的差異，如圖 14。推究其原因，本實驗操作是與正課學習同步進行，因此應考慮學習者是否受到不同教學法的衝突？或是學生受限於表達能力，不知如何敘寫，故仍習慣於負負得正的減法口訣。對此之建議則是多增加手勢、肢體動作、語言搭配實際操作的表達機會，勿侷限於筆試。此外，必須提醒教學者：這些操作活動的目的，僅是作為符號運思的過渡工具，習得負數運算才是最終的學習目標。

圖 14
負數概念的具體數線操作回饋



值得一提的部份，在本識讀文本中有別於一般教科書內容，增加了聽寫（說）的知能教學活動。就像 National Council of Teachers of Mathematics（NCTM, 1989）的內容中，對「數學素養」的定義其中之一即是：學習用數學溝通（they learn to communicate mathematically）。因此學習正確表達與溝通亦是本實驗教學目的之一。比方說：能正確表示出讀音為「負 3 減負 2」的數學式子。此目的在於能正確表述與溝通，並提供對符號意義的進階認識，亦如 Vlassis 與 Demonty（2022）所建議，透過代數思維的發展可以使學生更加理解負數運算的意義。

本文僅探究「識讀文本」負數概念與加減的教學成效，至於乘除則有待另一份實徵研究來表明。此外，在本研究中也發展一份「知行識評量規準」，作為在學習識向度時可參考的一個評鑑準則，然若能再建立客觀之評分標準，建立向度的評分層次將使資料分析更為精確，此亦可作為下次研究改進的方向。對於更深層之識能培養，如：根據論述支持自己的論述或對數學價值的欣賞，雖然文本中以及課堂上皆有討論，但受限於上課時間有限，以及難以在測驗評量上做更為客觀之量化評論，此為研究有所限制之一。限制之二則是本研究基於方便性抽樣實驗，故僅止於該校一年級學生之實驗結果，無法做全面性推論。

誌謝

感謝兩位審查委員極具專業且耐心的指導與建議，使本文大幅聚焦並提高可讀性。本研究受科技部 110 年度專題研究計畫「概念譬喻」觀點發展數學識讀文本之研究」補助（MOST 1102511-H-008-001）。

參考文獻

Lakoff, G., & Johnson, M.（2006）。**我們賴以生存的譬喻**（周世箴，譯）。聯經出版社。（原作出版於 2003 年）[Lakoff, G., & Johnson, M. (2006). *Metaphors we live by*. (Chou, S.-C., Trans.). Linking. (Original work Published 2003) (in Chinese)]

Wiggins, G., & McTighe, J.（2014）。**重理解的課程設計**（賴麗珍，譯）。心理出版社。（原作出版於 2005 年）[Wiggins, G., & McTighe, J. (2014). *Understanding by design*. (Lai, L.-C., Trans.). Psychological Publishing. (Original work Published 2005) (in Chinese)]

林芳玫、洪萬生（2009）。數學小說初探：以結構主義敘事分析比較兩本小說。**科學教育學刊，17**（6），531–549。[Lin, F.-M., & Horng, W.-S. (2009). A preliminary study of math fiction: Comparisons of two novels through perspectives of structuralism and narrative analysis. *Chinese Journal of Science Education, 17*(6), 531–549. (in Chinese)] https://doi.org/10.6173/CJSE.2009.1706.04

林保平（2005）。正負數的概念及其加減運算。**科學教育月刊，277**，10–22。[Lin, P.-P. (2005). Concepts and addition-subtraction operations involving positive and negative numbers. *Science Education Monthly, 277*, 10–22. (in Chinese)] https://doi.org/10.6216/SEM.200504_(277).0002

林福來、單維彰、李源順、鄭章華（2013）。**十二年國民基本教育數學領域綱要內容之前導研究**（計畫編號：NAER-102-06-A-1-02-03-1-12）。國家教育研究院。[Lin, F.-L., Shann, W.-C., Lee, Y.-S., & Chen, C.-H. (2013). *The pilot study for 12-year basic education curriculum: Mathematics*. National Academy for Educational Research. (in Chinese)] https://shann.idv.tw/articles/102naer.pdf

洪有情（主編）（2022）。**國中數學第一冊**。康軒。[Hung, Y.-C. (Ed.). (2022). *Grade 7 math, book I*. Kst Education. (in Chinese)]

袁媛、許錦芳（2007）。資訊融入教學對國中資源班數學低成就學生學習影響之個案研究。**教育科學期刊，7**（1），36–57 。[Yuan, Y., & Hsu, C.-F. (2007). A case study of integrating technology into mathematics teaching and its effect on resource classroom students in junior high school. *The Journal of Educational Science*, *7*(1), 36–57. (in Chinese)] https://doi.org/10.6388/JES.200706.0036

國立臺灣師範大學心理與教育測驗研究發展中心（2021）。**十二年國教課綱國民中學素養導向標準本位評量**。作者。[Research Center for Psychological and Educational Testing. (2021). *Standard-based assessment of student achievement for elementary and junior high school students*. Author. (in Chinese)] https://sbasa.rcpet.edu.tw/SBASA/documents/Math.pdf?20200805

國家教育研究院（2014）。**十二年國民基本教育課程發展指引**。作者。[National Academy for Educational Research. (2014). *Development guides for 12-year basic education curriculum*. Author. (in Chinese)] https://ws.moe.edu.tw/001/Upload/23/relfile/8006/51083/c1f743ce-c5e2-43c6-8279-9cc1ae8b1352.pdf

教育部（2018）。**十二年國民基本教育課程綱要國民中小學暨普通型高級中等學校－數學領域**。作者。[Ministry of Education. (2018). *Curriculum guidelines of 12-year basic education for elementary, junior high schools and general senior high schools – mathematics*. Author. (in Chinese)] https://cirn.moe.edu.tw/Upload/file/27338/72246.pdf

陳玉芬、單維彰（2021）。符號語言學作為數學的教學進路初探—以負數的概念模型譬喻為例。**臺灣數學教師，42**（1），1–16。[Chen, Y.-F., & Shann, W.-C. (2021). Semiotics as an approach for mathematics teaching– Take metaphors on models of negative numbers as example. *Taiwan Journal of Mathematics Teachers, 42*(1), 1–16. (in Chinese)] https://doi.org/10.6610/TJMT.202104_42(1).0001

陳淑娟（2013）。負數史與負數教學中的美感意涵。**教育實踐與研究，26**（2），133–159。[Chen, S.-C (2013). The aesthetic value embedded in the negative number history and the negative number instruction. *Journal of Educational Practice and Research, 26*(2), 133–159. (in Chinese)]

單維彰（2018）。論知行識作為素養培育的課程架構—以數學為例。**臺灣教育評論月刊，7**（2），101–106。[Shann, W.-C. (2018). Nurturing literacy by a curriculum construct of knowing, doing and seeing– Take mathematics as an example. *Taiwan Educational Review, 7*(2), 101–106. (in Chinese)]

單維彰（2019）。素養導向教科書的宏觀與微觀設計：以七年級數學為例。**教育研究月刊，303**，66–80。[Shann, W.-C. (2019). Holistic and analytic views of literacy-oriented textbook design: Seventh grade math. *Journal of Education Research, 303*, 66–80. (in Chinese)] https://doi.org/10.3966/168063602019070303006

歐用生（1991）。內容分析法。載於黃光雄、簡茂發（主編），**教育研究法**（頁 229–254）。師大書苑。[Ou, Y.-S. (1991). Content analysis. In K.-H. Huang & M.-F. Chien (Eds.), *Research Methods in Education* (pp. 229–254). Shtabook. (in Chinese)]

潘怡勳（2015）。**探討桌上遊戲融入於數學教學對學生學習成效之影響**（未出版碩士論文）。義守大學。[Pan, I.-H. (2015). *Exploring the impact of the integration of mathematics in board games on the learning* (Unpublished master's thesis). I-Shou University. (in Chinese)]

Altiparmak, K., & Özdoğan, E. (2010). A Study on the teaching of the concept of negative numbers. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 41*(1), 31–47. https://doi.org/10.1080/00207390903189179

Baroody, A. J., & Ginsburg, H. P. (1986). The relationship between initial meaningful and mechanical knowledge of arithmetic. In J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (pp. 75–112). Lawrence Erlbaum Associates.

Bofferding, L. (2014). Negative integer understanding: Characterizing first graders' mental models. *Journal for Research in Mathematics Education, 45*(2), 194–245. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.45.2.0194

Dostal, H. M., & Robinson, R. (2018). Doing mathematics with purpose: Mathematical text types. *The Clearing House: A Journal of Educational Strategies*, *91*(1), 21–28. https://doi.org/10.1080/00098655.2017.1357409

Fuadiah, N. F., Suryadi, D., & Turmudi, T. (2017). Some difficulties in understanding negative numbers faced by students: A qualitative study applied at secondary schools in Indonesia. *International Education Studies, 10*(1), 24–38. https://doi.org/10.5539/ies.v10n1p24

Gagatsis, A., & Alexandrou, M. (2022). A review of the research in teaching and learning the negative numbers: An "action research" concerning the application of the geometrical model of the number line. *Didattica Della Matematica. Dalla Ricerca Alle Pratiche d'aula, 2022*(11), 9–32. https://doi.org/10.33683/ddm.22.11.1

Hiebert, J., & Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. In J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (pp. 1–27). Lawrence Erlbaum Associates.

Hoffer, W. W. (2020). *Developing literate mathematicians: A guide for integrating language and literacy instruction into secondary mathematics*. National Council of Teachers of Mathematics, Inc.

Kilhamn, C. (2011). Making sense of negative numbers. In J. Emanuelsson, L. Fainsilber, J. Häggström, A. Kullberg, B. Lindström, & M. Löwing (Eds.), *Voices on learning and instruction in mathematics* (pp. 227–234). National Centre of Mathematics Education.

Kirshner, D., & Awtry, T. (2004). Visual Salience of Algebraic Transformations. *Journal for Research in Mathematics Education*, *35*(4), 224–257. https://doi.org/10.2307/30034809

Lakoff, G., & Núñez, R. E. (2000). *Where mathematics comes from: How the embodied mind brings mathematics into being*. Basic Books.

Linchevski, L., & Livneh, D. (1999). Structure sense: The relationship between algebraic and numerical contexts. *Educational Studies in Mathematics, 40,* 173–196. https://doi.org/10.1023/A:1003606308064

Molina, M., & Castro, E. (2021). Third grade students' use of relational thinking. *Mathematics, 9*(2), 187. https://doi.org/10.3390/math9020187

National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics.* Author.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics, 22* (1), 1– 36. https://doi.org/10.1007/BF00302715

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing*. Cambridge University Press.

Soto-Andrade, J. (2007). *Metaphors and cognitive modes in the teaching-learning of mathematics.* ResearchGate. https://www.researchgate.net/publication/228583228_Metaphors_and_cognitive_modes_in_the_teaching-learning_of_mathematics

Vlassis, J., & Demonty, I. (2022). The role of algebraic thinking in dealing with negative numbers. *ZDM–Mathematics Education*, *54*(6), 1243–1255. https://doi.org/10.1007/s11858-022-01402-1

Vlassis, J. (2008). The role of mathematical symbols in the development of number conceptualization: The case of the minus sign. *Philosophical Psychology, 21*(4), 555–570. https://doi.org/10.1080/09515080802285552

徐偉民、張國綱、郭文金（2023）。
數學探究教學的任務與學生的回應：一位大學數學教師教學實踐歷程的觀察。
臺灣數學教育期刊，**10**（2），55–81。
doi: 10.6278/tjme.202310_10(2).003

數學探究教學的任務與學生的回應：一位大學數學教師教學實踐歷程的觀察

徐偉民 [1]　張國綱 [2]　郭文金 [1]
[1] 國立屏東大學教育系
[2] 國立屏東大學應用數學系

本研究旨在探討大學數學課程實施探究教學歷程中教師關注的任務與學生回應。採個案研究法，以 107 學年度上學期「數學探索」課程中的師生為對象，透過教學錄影與觀察、師生訪談、學生問卷和解題討論來蒐集資料。質性資料轉錄後進行歸類分析，量化資料以平均數來呈現，以不同資料與人員的比對來進行三角校正。結果發現，教師的數學探究教學在「佈題－解題」的歷程中展開，教師以挑戰性問題來佈題，以提問的方式來引導學生釐清並完成解題。從教師提問的焦點來看，其教學歷程較關注的是提供線索與搭橋、要求學生說明兩個任務，而教師關注的任務引發的學生回應聚焦在搜尋比對和解題。從學生訪談和問卷的結果來看，大都肯定與經歷了探究對數學學習的價值。

關鍵字：個案研究、教學任務、數學探究教學、學生回應

通訊作者：徐偉民，e-mail：ben8535@mail.nptu.edu.tw
收稿：2023 年 3 月 3 日；
接受刊登：2023 年 10 月 3 日。

Hsu, W. M., Chang, K. K., & Kuo, W. J. (2023).
Teaching tasks and student responses in an inquiry-based college mathematics course: A case study.
Taiwan Journal of Mathematics Education, *10*(2), 55–81.
doi: 10.6278/tjme.202310_10(2).003

Teaching Tasks and Student Responses in an Inquiry-Based College Mathematics Course: A Case Study

Wei-Min Hsu [1]　Kuo-Kung Chang [2]　Wen-Jin Kuo [1]

[1] Department of Education, National Pingtung University

[2] Department of Applied Mathematics, National Pingtung University

This study investigated teaching tasks and student responses in a college-level mathematics course taught through an inquiry-based approach in the fall semester of 2018. The case study method was employed, and data were collected from video footage and observations of classes, interviews with teachers and students, discussions regarding problem solving, and a questionnaire. Qualitative data were classified on the basis of the teacher's and students' performance, and quantitative data were gathered from the questionnaire. In addition, triangulation was conducted on the analytical results and data, which were gathered from multiple sources. The results of this study indicated that the teacher's inquiry-based mathematics instruction followed the process of "problem proposal and solution." Specifically, the teacher assigned challenging tasks to the students to spark their motivation for inquiry. He then adopted the strategy of posing questions to guide the students through problems that required clarification and solutions. Analyzing the teacher's questions, we found that the tasks assigned by the teacher were primarily related to "providing hints and bridging" and "asking for explanation." The students' learning process focused on the tasks of "searching and comparison" and "problem solving." According to each of the student's performance on the questionnaire and interview, most of them stated that the inquiry-based approach enabled them to understand the value of mathematics instruction.

Keyword: case study, teaching task, student response, inquiry-based mathematics instruction

Corresponding author：Wei-Min Hsu，e-mail：ben8535@mail.nptu.edu.tw
Received：3 March 2023;
Accepted：3 October 2023.

壹、研究動機與緣起

許多研究指出，以探究的方法來學習數學，對數學有較多的自信和正向的態度，並且更願意與他人合作、欣賞不同的觀點（Bonotto, 2013; Kuster et al., 2018; Makar, 2012）。但，教室內如何實施數學探究教學？實施的歷程為何？研究者提出了各自的觀點：Makar（2012）從生活的問題出發，指出數學探究是一個解決非結構性（ill-structured）問題的歷程，過程中非常依賴數學的思考和方法。所謂非結構性問題是指問題的敘述和/或解法都有一定程度的模糊性，需要透過協商討論才能界定所面臨的問題（Reitman, 1965）；Kuster 等人（2018）在回顧 11 篇相關研究後，指出數學探究教學強調的是主動學習，且透過非結構性但有意義的問題（ill-structured but meaningful problem）來進行；Allmond 等人（2010）從學習的觀點出發，指出探究教學要提供非結構性的問題，並引導學生發現與數學的連結、進行數學思考與推理，最後發展出解題的方法。以上的學者對於數學探究教學的主張雖略有不同，但都從真實數學教育（Realistic Mathematics Education [RME]）的觀點出發，指出數學探究教學的實施，首先教師要提供結構性較低或解法不明確的問題，而非關係明確、一看就知道解法的結構性問題，來引發學生進行探究與討論的需求；之後教師引導學生進行討論與釐清問題，並採用數學的思考與方法來解題。由此來看，數學探究教學的實施包含教師佈題和學生解題，而且在學生解題的歷程中來展開探究與學習，這呼應了 Silver（1997）對於探究導向數學教學的主張，因此可以從佈題和解題兩部分，來探討教學歷程中教師關注的任務與對學生的學習影響。

一般來說，大學的數學課傾向提供更制式的課程內容和更嚴謹的學習（Santos-Trigo & Camacho-Machin, 2009），但探究能力的培養是各教育階段數學教育的重點（Staer et al., 1998）。雖然探究能力的培養並非大學數學教育階段唯一的重點，但也是焦點之一，因為探究是未來世界公民所需具備的關鍵能力之一（Organisation for Economic Cooperation and Development [OECD], 2018）。所以過去有研究者開始在大學數學課中採用探究教學，例如 Rasmussen 與 Kwon（2007）在微分方程課程中，探討學生探究學習新主題的歷程；Wawro（2015）在線性代數課程中，探討學生學習矩陣定理時其臆測推理的歷程；Johnson 等人（2013）在抽象代數課程中，探討 3 位教授實施探究教學後的看法等。上述研究無論從教師或學生的角度來看，都肯定探究教學的價值，但並未明確說明教學歷程中的師生互動，尤其師生互動間進行的言談（discourse）是影響學習成效的關鍵（Sfard, 2008），且從師生間的言談可以了解教師探究教學中關注的任務及學生的回應。因此，本研究以師資培育大學開設「數學探索」課的師生為對象（授課教師為應用數學系教授），希望達成以下兩個研究目的：

（一）探討在「數學探索」課實施探究教學歷程中教師關注的任務與學生的回應。

（二）探討學生經歷數學探究教學後對探究學習數學的觀點。

貳、文獻探討

一、探究與數學學習

從數學知識形成的歷程來看，數學知識是社會建構的產物，不是既定的，也不是絕對的，數學知識本身充滿許多模糊與衝突，適合以探究的方式來學習（Borasi, 1992）；從數學素養或建模的觀點來看，數學探究是將真實世界的問題轉化成數學問題，透過數學化的方法來得出答案，再轉化到真實世界問題的解決（林勇吉等人，2014；OECD, 2018），過程中強調數學化的歷程和數學的思考與推理。無論從知識本質或素養的觀點來看，都強調探究是形成數學知識與解決問題的重要歷程。

而數學問題是學校數學教與學的核心，也是數學課程構成的基本單位（徐偉民，2013；Stein et al., 2007）。因此問題的類型是引發學生進行探究的關鍵，其中以非結構性問題較能引發學生探究的需求（Makar, 2012）。因為從真實生活的世界來看，學生未來面對的問題通常是模糊的，需要對問題的脈絡有深入的理解，需要進行協商討論來界定問題，且沒有單一的正確解法。但學校數學課程提供的問題通常是結構明確（well-structured）且過度簡化的問題，學生僅需花幾分鐘就可以得出單一的正確答案。學校數學提供的問題類型和生活中的問題不同，較無法引發學生進行探究的需求。因此 Makar（2012）認為數學探究是從非結構性問題開始，透過結構化的歷程和數學化的方法來探究問題，進而得出解決問題的答案。這樣的定義呼應了探究是歷程也是結果的觀點，且非結構性問題是引發探究的關鍵（Hähkiöniemi, 2013）。

Richards（1991）也強調非結構性問題對於數學探究的重要，同時強調歷程中需要經歷討論協商、提出猜想與驗證等歷程，呼應了 Makar（2012）提出的結構化和數學化歷程的觀點；Peirce 則從數學探究歷程中的推理歷程，提出會經歷想像（imagination）、聚焦（concentration）、一般化（generalization）的探究歷程（Campos, 2010），使個體在歷程中加深對於數學概念與背後涉及結構的理解。上述研究者的主張，使我們了解到教師要採用具有挑戰性的非結構性問題（以下將非結構性問題均稱為挑戰性問題），才能激發學生探究的需求；而在探究解題的歷程中，需要討論與釐清所面對的問題（問題所求），再運用數學的思考、推理、符號、運算等來完成解題。而且學生歷經數學探究的歷程，能加深對於數學概念的理解。

二、數學探究教學中教師關注的任務

雖然過去研究發現以探究方式學習數學，會提升學生的思考和信心，也擴展對數學概念的理解（如 Bonotto, 2013），但數學探究教學其實包含不同的教學取向，雖然共同特色是主動學習，但如何實施及實施過程中師生的任務並不明確（Kuster et al., 2018）。Kuster 等人（2018）從數學探究教學的 11 篇研究中（包括 Johnson, 2013; Johnson et al., 2013; Wawro et al., 2012 等），從 RME 的觀點出發，指出探究教學的特色是從喚起學生非形式化推理，

再逐步引導學生發展出形式化推理的歷程。這個歷程引發兩個探究教學的原則：「引發學生推理的方法」（generating students ways of reasoning）和「根據學生的貢獻來建立（形式化的數學推理）」（building on student contributions）。不過在推理歷程中可能只有少數學生發展出教師意圖得出的方法，所以教師要將學生發展出的推理和思考方法進行順序化，藉此來建立形式化的數學推理，並且讓所有學生理解，於是產生第三個教學原則：「發展共享的理解」（developing a shared understanding）。最後教師還要扮演中介者角色，讓學生從非形式化推理與方法過渡到的形式化的數學語言和符號，這即為第四個教學原則：「連結到標準的數學語言和符號」（connecting to standard mathematical language and notation）。Kuster 等人（2018）歸納上述四個探究教學原則後，進一步針對 K-16 年級的相關研究進行檢視，發現每一個原則都被運用在相關研究中，說明四個數學探究教學原則的普遍性。從上述數學探究教學的原則中，可以推論教師實施時可能關注的教學任務包括引發推理、建立貢獻、發展理解、連結符號等，以引導學生從非形式化的推理與語言，發展與連結到形式化的數學語言和符號。

若從探究教學實施的歷程來看，教師關注的任務略有不同。例如 Allmond 等人（2010）從 RME 的觀點出發，指出數學探究教學一開始教師需引導學生思考一個生活相關的議題，幫助他們將此議題連結到數學的觀點來思考。此時教學的焦點在協助學生「發現」生活問題和數學之間的連結；接著協助學生將生活問題轉換成數學問題，並「制定」數學探究與解題的方法；之後要引導學生「發展」推理的方法，必要時可以進行直接教學；最後提供機會給學生說明其結論形成的歷程，為自己的解法和推理歷程進行「辯護」。Allmond 等人（2010）以協助學生完成解題的歷程，提出教師關注的教學任務，同時也指出學生在過程中可能的回應與學習焦點，包括需要回顧來察覺過去所學的數學和問題之間的連結，在教師引導下制定出解題方法，進而發展解題推理來完成解題，及為自己解法合理性進行辯護等。這樣的觀點呼應了 Silver（1997）指出探究教學在佈題和解題之間展開的主張；而秦爾聰等人（2009）也從協助學生解題歷程的觀點出發，指出探究教學中教師需要喚起學生舊經驗與探究問題之間的連結、引導學生進行探究解題、提供學生說明探究的歷程與結果的機會、及回顧探究歷程所獲得的知識等。

雖然從探究教學原則和從協助學生解題觀點兩部分得出的教師任務略有不同，但探究教學是在佈題和解題之間展開（Silver, 1997），教師都需要協助學生將其舊經驗和探究的問題進行連結，才能在理解的前提下進行後續的探究解題；學生理解後在嘗試制定和發展解題方法時，教師也要引導學生發展推理的方法，確認學生推理的正確性，並根據個別學生的理解和推理來發展所有學生的共同理解；學生在進行回顧與為自己推理歷程進行溝通辯護時，教師需要將學生推理思考的歷程，加以順序化來連結到正式的數學語言和符號，得出可以類推到類似情境或問題結構的解題和推理方法。上述教師關注的任務，主要根據不同解題階段來進行引導，其目的在於協助學生完成探究解題。但不同解題階段教師如何引導？如何引導學生建立舊經驗與問題之間的連結？如何引導學生制定和發展解題推理？數學教學其實是針對數學問題進行師生言談互動的歷程（Sfard, 2008），包括教師的提問和學

生的回應。因此，可以從教師提問的焦點來探討教師關注的任務，也可從教師提問焦點來了解學生相對應的回應，包括如何建立連結與理解？是否發展與制定出解題的方法？是否有機會證明自己解題歷程與方法的有效性？此外，上述研究都是針對中小學，但大學數學的抽象性以及教學者的數學背景和中小學有不小的落差，大學數學課實施探究教學時教師關注的任務和中小學是否不同？令人好奇。

三、數學探究教學的相關研究

大學的數學教學偏向以講述與示範的方式，讓學生學習抽象且嚴謹的數學概念與推理，使得學生的學習成效不彰（Uhling, 2002），因此許多研究者開始採用探究取向的教學，希望營造支持及豐富的學習環境，使大學生更深入理解數學，同時具備生產性的傾向（productive dispositions）（Rasmussen & Kwon, 2007）。例如 Uhling（2002）在初等線性代數課程中，讓學生以探究的方式學習數學證明，結果發現數學證明的概念及結構能更堅實地嵌入學生的思考，並幫助未來的學習；Cilli-Turner（2017）以探究的方式讓大學生學習數學證明，並與非探究學習的學生進行比較，結果發現合作探究學習的學生，對「證明是一種智力的挑戰」、「證明在數學上是重要的交流工具」、及「有意願學習證明結構以了解數學語言並建立自己的證明」等有較高的信念；Rasmussen 與 Kwon（2007）以探究教學來實施微分方程課程時，發現學生在過程中透過參與討論、提出猜想、解釋和證明自己的想法來解決問題，而教師在過程中也在探究學生的思考，關注並仔細引導學生關鍵的想法，來進行連結與驗證其有效性；而 Cifarelli 與 Cai（2005）以主修中學數學教育的大學生和研究生為對象，設計開放性問題讓他們進行探究解題，結果發現學生在探究過程中能建構比較成熟的數學關係，發展比較抽象的問題描述，及進一步的構想新的問題。

上述研究有些是針對特定數學主題的課程，如線性代數、數學證明；有些是針對特定的對象，如針對主修數學教育學生。針對特定主題或對象的研究，都讓我們了解大學實施探究教學的可能與成效，使探究教學的實施也適用於更抽象數學學習的階段。但數學學習的成效其實來自師生間的言談交流（Sfard, 2008），包括教師的提問和學生的回應，而教師的提問其實反映了教師關注的任務。教師關注任務下進行的提問與學生的回應，是過去大學數學探究教學研究中較被忽略的面向，但卻是教學實施與成效的關鍵，加上國內大學數學探究教學的研究較少，因此需要有更多的研究投入，作為後續推廣的參考。

四、文獻的啟發

解題是數學教與學的核心，所以數學探究教學是在佈題和解題之間展開（Silver, 1997），因此問題的類型和解題歷程中教師的任務和學生的回應，是數學探究教學實施的關鍵。從探究與數學學習的文獻來看，教師要提供具有挑戰性問題，才能引發學生探究的需求；從數學探究教學原則與歷程的文獻得知（如 Allmond et al., 2010; Kuster et al., 2018），由於問題的複雜性與模糊性，教師佈題後的任務可能在於喚起學生的舊經驗，使其發現與新問題之間的連結，同時理解問題的內容與所求。此時教師可能透過提供線索，包括使用不同表

徵來協助學生進行連結，而學生需針對教師提供的線索進行舊經驗與新問題之間的連結，才能在理解的前提下進行後續的解題；學生完成連結之後，教師的焦點便在於引導學生制定出解法與完成解題推理。此時教師可能需要繼續提供線索來引導與協助學生思考，或以引導的方式協助學生發展自己的推理，同時根據部分學生的解題表現，請學生說明或自己說明來使所有學生的理解；完成解題後，為了要確認學生解題推理歷程的正確性，教師可能請學生對自己的推理歷程進行說明與辯護，同時將學生思考推理的歷程連結到對應的數學符號和語言，協助學生將解法推論到類似情境，提升對數學的理解。文獻中得出師生互動歷程中的任務與反應，可作為本研究相關工具發展與後續資料分析的參考。

參、研究方法

一、研究方法與對象

本研究採個案研究法，透過觀察一位大學數學系教授的教學歷程，來探討數學探究教學歷程中教師關注的任務與學生的回應，並了解學生對於以探究學習數學的觀點。師生教學歷程中的任務與回應，從教學錄影中師生互動對話的內容進行歸類；學生對探究在數學學習的價值，則透過問卷和訪談來了解。

參與本研究的對象為某國立師培大學應用數學系 A 教授，以及修其「數學探索」課的大學生。A 教授有 20 年的教學經驗，長期以來協助該校師培中心開設普通數學的課程，或師範學院時期開設數學解題的課程。他在師培數學課程（如普通數學）的教學上，都以提問和小組合作討論的方式進行，因為他認為數學學習的焦點不在於公式記憶與反覆練習，而在於概念的理解，而且要透過解釋與說明才是真正的理解。例如他請學生思考並說明為什麼 $-(-1)=1$？請學生思考並說明自然數和全數的個數哪一個比較多？等。上述兩個問題的內容，從 Makar（2012）對問題類型的歸類來看，可能偏向結構明確的問題，但是 A 教授的焦點不在於讓學生以「規則」或「一般觀點」來解題或解釋，而以提問的方式來協助學生釐清自己的迷思，並引導學生去「探究思考」與「說明」問題背後的數學原理或概念，才能達成「真正的理解」。A 教授對於數學教學的觀點與實施，的確讓學生經歷了探究思考與理解的學習歷程，甚至改變學生對於數學和數學學習的觀點（徐偉民、張國綱，2010）。因此，他的數學教學以佈題和小組解題討論的方式來進行，過程中透過提問和對話來引導學生解題思考與推理，要求學生說明推理歷程與結果，並連結到數學語言和符號來進行類推。A 教授教學中強調學生的主動探究和討論、說明與釐清解題推理思考、以及數學符號的連結與類推等，呼應了 Kuster 等人（2018）對數學探究教學的觀點。因此當 A 教授在 107 學年度上學期開設「數學探索」課程前，便主動向研究者表達參與研究的意願，因為這門課開設的目的，是希望將過去師培數學課程的教學實施，延伸到通識數學課程中，讓更多不同背景的學生能經歷數學探究、討論、推理思考與類推的歷程，來建立數學概念的理解。

在研究開始前（2018 年 5 月），A 教授與研究者便進行數次的討論，分享他過去數學教學的經驗與學生的反應、個人教學理念、在數學探索課程中可能設定的學習主題、教學實施與評量方式等，讓研究者更了解他在課程與教學上的規劃；同時 A 教授也針對未來研究可能進行的方式提出疑問，例如：如何進行錄影和錄音？如何蒐集學生小組討論的資料？…等。整體而言，教學的規劃與實施由 A 教授決定，研究者則負責規劃研究資料蒐集與分析，但不參與課程內容的決定，也不提供教學實施或評量的建議。意即，本研究並非事先設計好教學的主題、問題和教學實施，而是觀察一位大學數學系數學教授如何實施其所認定的數學探究教學。研究執行的時間從 2018 年 9 月到 2019 年 1 月，有 26 位來自不同科系的學生修習「數學探索」課程。其中 23 位來自數理相關科系：20 位來自理學院和資訊學院、3 位來自商學院（因商學院的課程與數理相關，所以歸為數理相關科系），另外 3 位來自社發系和教育系。在考量學生背景下，A 教授先以數理相關科系學生進行分組，其中 7 組有 3 位、1 組有 2 位，接著再將非數理背景的 1 位學生分到僅有 2 位學生的組別，另 2 位進行隨機分組。分組後有 6 組是 3 位學生，2 組 4 位。A 教授的分組是希望數理背景的學生，可以引導該組有更多的探究思考與討論。扣除學校活動與節日，本研究共進行 15 次（週）的課程，每次兩節課。

二、課程內容與教學實施

A 教授在課程實施前便蒐集修課學生的背景，了解他們就讀的科系，以便進行課程的規劃。考量學生來自不同的學院和主修，A 教授在數學主題的選擇上，兼顧了與生活相關與較抽象的數學主題，包括從生活相關的利率主題開始，再從虛擬的旅館問題進入到抽象的無窮主題，再逐漸進入到近代數學的部分，例如尺規作圖來從體擴張（Field Extension）的觀點了解三等分任意角的不可能、從同餘引伸出群（Group）論等。考量到學生進行探究時需要較長的時間去思考與討論，所以整學期的課就設定這四個學習主題。而在數學問題的類型上，A 教授認為只要具有挑戰性、不是一看就可以透過公式或有固定解法的問題，就能引發學生探究的需求。而且引發學生探究的需求，除了問題本身的結構性外，A 教授認為還包括學生是否具備或學習過相關的數學知識，以及教師如何進行提問。以利率問題為例，如果學生沒有學習過等比級數的概念，複利的問題對他們而言就能引發探究的需求。即使他們學習過相關概念，但改變提問的方式，例如學生熟悉的問題是銀行提供固定的利率、每月存若干元、定期存滿後的結果，A 教授會改為「向銀行借錢，若干年後還清，銀行借出年利若干，則每月要還多少錢？」的提問，他認為反向化的提問也能引發學生進行探究。甚至進階到早期民間流行的「標會」情境，來提問「會首」如何決定最低標的問題，透過逐漸增加挑戰性的提問，來引發學生探究的需求。

除了真實生活的問題外，A 教授在教學中也會設計虛擬情境的問題，例如德國數學家 David Hilbert 提出的旅館故事（Strogatz, 2010），讓學生思考無限概念的應用：

> 我今天來講個故事，我們坐了時光機，坐到公元五千年之後，那時候人類的科技已經可以在太空中進行太空旅行，老師在太空中建立了一個太空旅館，但因為老師很忙，所以沒辦法經營。因此必須雇用一個人，要找一個經理來經營這個旅館，年薪一百萬美金。但經營我的旅館有幾個條件。我的旅館建立時有無限多個房間，每一個房間都已經住了一個客人，那現在要把旅館交給你，我有幾個要求：第一，每個房間只能住一個客人；第二，任何時候都不能讓房間空出來，一定要安排每個房間都要有客人住；第三，客人來的時候不能拒絕客人，一定要想辦法安排給他住。有沒有人願意接受挑戰？今天來了一個客人，他說他想要睡覺，如果你是經理你會如何安排給他一個房間？現在討論一下你會怎麼安排房間。（1024 錄影）

雖然上述的旅館問題是一個虛擬的問題，但是學生都有旅遊和住宿的經驗，而且在討論旅館問題的前一周，A 教授先讓學生去思考與討論自然數和全數集合中元素個數是否一樣多（1017 錄影）？而且在旅館問題出現之前，也複習上周大家討論的結果，尤其強調當幼兒還沒有數量大小比較的概念時，會採用 1 對 1 對應的方法來進行比較，之後才提出旅館問題讓大家思考與討論。也就是說，A 教授在課程中設定的四個數學主題，會設計各主題相關的挑戰題（不一定與生活相關），但都會提供相關的線索與舊經驗的連結，以協助學生進行後續解題的思考與探究。他上課的主題與問題範例如表 1。表 1 中的四個問題，從問題的結構性來看，除了利率主題一開始的問題偏向結構性問題外，其餘都屬於非結構性問題，且對學生而言都具有挑戰性。但利率問題 A 教授認為透過不同的提問方式，以及逐漸增加難度的提問，可以引發學生探究的需求。A 教授希望透過表 1 問題的設計，讓學生了解未來生活會面對的問題，以及學習與理解近代數學中的抽象概念，包括高中時學過的無窮概念、古希臘尺規作圖難題（任一角三等份，數學家已證明無解）、同餘概念等，透過提問引導來理解相關的數學概念與系統。

表 1

「數學探索」課程主題、概念內涵與問題範例

主題	概念內涵	問題範例
利率	從房貸還款真實情境中探究利率概念	現在買房子要跟銀行貸款，想想看如果跟銀行借了四百萬元，用 20 年還完，你每個月要固定還給銀行多少元？
無窮	從安排房客住宿問題中探究無窮概念	太空旅行時旅客入住旅館的問題
尺規作圖	從尺規作圖問題中探究有理數和無理數的作圖方式	一個 60°的角能不能用尺規分成三等份？
同餘	從餘數相同問題中探究同餘和分割概念	假設有一個整數 $m > 0$，現有任意整數 a，現在考慮 $a \div b$ 會有甚麼情形？$a \div m = q \ldots r$，也可以寫成 $a = mq+r$，這個 r 會有幾個？也就是有幾個不同的 r？

在教學實施上，A 教授為了要引發學生多元的思考與討論，各組由不同學院的學生組成（但都有數理相關科系的學生），一組 3~4 人，共 8 組。教學時 A 教授先呈現挑戰題，

再由各組進行討論解題，學生解題時他會巡視各組解題的情況，透過提問來引導各組思考解題的線索，並根據各組的解題表現來和學生對話。學生若有解題的方向或結果，A 教授通常會進一步要求學生解釋與說明，並邀請學生上台分享其思考推理的過程與結果，接受大家的提問並為自己的解法辯護；若學生沒有解題方向，A 教授會提問相關問題，或將問題簡化來引導學生思考。A 教授的教學實施，主要是認為教學的目的在培養學生數學探究的能力，而且是透過提問來引導學生進行探究及確認解答的歷程，藉此讓學生了解數學的方法、結構及概念，同時也提升學生提問的能力。因為只有讓學生有學習與觀摩如何提問，才能打破過去被動學習數學的習慣，主動對未知或挑戰的數學問題進行探究。而在學習評量上，為鼓勵學生盡可能地參與討論與探究，不要害怕犯錯且做大膽的假設（A 教授對數學學習的基本觀點），所以不採紙筆測驗，從上課參與、各組探究討論歷程與結果的逐字稿、課後作業（若上課中未完成解題的，即為課後作業且允許查資料）三部分來評分。

表 2
「數學探索」課程主題、教學實施與評量方式

主題（週次）	實施方式	評量方式
利率（第 2～4 週） 無窮（第 6~10 週） 尺規作圖（第 11~14 週） 同餘（第 15~17 週）	順序如下： 1. 呈現挑戰題 2. 提問引導 3. 各組（內）討論 4. 各組上台發表並接受提問和辯護	1. 上課參與情形 2. 小組討論的歷程與結果（逐字稿） 3. 課後作業

註：第 1 週課程說明、第 5 週國慶日放假、第 18 週學生上台發表。

三、研究工具

（一）教學觀察：教師提問觀察表與學生回應觀察表

教學觀察有兩個主要的焦點：一是以教師為焦點，聚焦在觀察教師教學時提問的內容，因為 A 教授的提問有其特定的目的，從提問內容的分析可以了解他教學中關注的任務。例如，如何提問來引導學生進行舊經驗與問題之間的連結？如何提問來引導學生確認自己的解題思考與推理等；二是以學生為焦點，觀察教師提問後學生的回應。例如，如何在教師的提問下進行連結？如何在教師的引導下制定出解法等。教師提問參考探究教學的原則（Kuster et al., 2018）、教學歷程（如 Allmond et al., 2010）可能引發的任務、A 教授習慣的教學方式來設計，包括提供線索與連結、要求說明、順序化等面向（表 3），其中要求說明的部分包含了引發學生的推理和發展學生的理解；而學生的回應則對應 A 教授的教學歷程，包括提供線索讓學生進行新舊經驗之間的搜尋和比對、要求說明使學生聚焦在制定解題方法與發展解題、解題中/後請學生為自己的方法進行辯護和證明等面向來設計（表 4）。教師提問和學生回應觀察表均以教師的提問為單位，根據實際的對話內容來進行歸類，再輔以師生對話的質性資料，了解數學探究教學歷程中教師關注的任務與學生的回應。期待透過

表 3 和表 4 分析的結果，來補足過去針對大學數學探究教學研究中，較缺乏從師生言談的內容與關注的任務進行分析的不足。

表 3
教師教學提問觀察表

類別	子類別	提問
T1 提供線索與連結	T1-1　了解問題或相關名詞嗎？說說看。	☐
	T1-2　以前遇過類似的問題嗎？可以用甚麼方法來解？	☐
	T1-3　試著將問題簡化來思考可能的解法。	☐
T2 要求說明	T2-1　確定問題簡化後的解法，可以解決原來的問題？	☐
	T2-2　你如何想出這個方法的？你如何得到結果的？	☐
	T2-3　你確定這樣的結果是正確的嗎？請說明。	☐
T3 順序化	T3-1　可以把過程和結果用一般數學的形式來表示嗎？	☐
	T3-2　可以將方法應用到其他類似的問題上嗎？	☐
	T3-3　請完整說明你整個思考與推理的過程。	☐

註：A 教授實際提問內容不一定和上述範例相同，相近的提問便在空格中打勾。

表 4
學生回應觀察表

類別/子類別	學生回應類別範例	提問
S1 搜尋和比對	T:　怎麼把這個問題跟上面那個問題連結起來？ S:　還在想…	☐
S2 解題		
S2-1 制定解題方法	T:　有點摸到邊了，討論看看想法有沒有錯？ S:　數列呈現等差，可以用等差級數去推。	☐
S2-2 發展並完成解題	T:　要看你列的式子公式對不對？然後才能夠談。 S:　我是把每一年利率就是第一年是…	☐
S3 證明與應用	T:　每個自然數都可以找到偶數來對應嗎？ S:　畫一條斜率為 2 的數線，取上面所有的整數點。	☐

註：上述學生回應的範例來自實際上課資料，以打勾來記錄。

（二）訪談大綱

訪談主要在了解學生對探究在數學學習過程中扮演的角色和價值，以及 A 教授在教學歷程中對於關注任務的觀點與其教學背後的思考。訪談均採半結構式訪談，訪談大綱的編製說明如下。

1. 學生訪談大綱

學生訪談大綱是根據 Cilli-Turner（2017）的研究發現來編製。該研究指出學生在探究學習歷程中體驗到包括：探究對數學學習的重要性、更確認解題過程與結果的正確性、更清楚解釋數學知識的形成、是一種智力的挑戰、有助於相互溝通及發現新的解法、有助於解題歷程與結果的形式化和一般化、增強數學學習信心及正向態度等。訪談從和學生過去學習經驗比較的問題出發，逐漸詢問在本研究中體驗到探究扮演的角色與價值。訪談大綱

的內容如表 5。考量資料的豐富性與多元性，由 A 教授推薦表達能力較好且來自不同學院的學生，共 13 位，在課程結束後（學期結束前）徵詢學生可進行訪談的時間後安排面對面訪談，每次訪談人數在 3~4 位，每位訪談時間約 30 分鐘，約 2 小時，訪談次數共 4 次。為了解學生學習歷程中真實且較深入的想法，由一位參與教學錄影的研究人員（數學教育博士）進行訪談，同時考量學生過去以探究學習的經驗可能不多，體驗到探究學習的角色與價值需要較長的時間，所以決定在課程結束後進行訪談，讓學生完整經歷後再與過去的學習經驗進行比較。

表 5

學生訪談大綱

訪談大綱內容
1. 以探究的方式來學習，和過去數學學習的經驗有何不同？
2. 在過程中經常感覺到挑戰嗎？是來自那些方面的挑戰？
3. 如何克服這些挑戰？克服之後會覺得更了解數學的概念或應用嗎？會增加面對數學學習的信心嗎？
4. 透過探究可以更確定自己的推理與解題過程是正確的嗎？
5. 透過探究可以更清楚與他人溝通解題思考與推理的過程嗎？
6. 探究對數學的學習是重要的嗎？可以讓人更有自信來面對較難的數學問題嗎？會以正向的態度來面對數學學習的挑戰嗎？

2. 教師訪談大綱

教師訪談大綱是根據 A 教授教學中關注的任務，從提供線索與連結、要求說明、順序化等三個面向來進行編製，如表 6，以了解其對教學任務的觀點與背後的思考。由於 A 教授長年以來都採探究教學的方式，對自己的教學歷程和思考非常熟悉，所以僅在學期結束後進行一次約 1 小時的訪談。

表 6

教師訪談大綱

提供線索與連結
1. 確定學生理解問題及問題中的名詞或概念，有助於學生進行探究嗎？
2. 當學生面對挑戰題時，你如何連結他們過去學習的相關經驗或概念？
3. 當學生無法進行搜尋與連結時，你會怎麼作？
4. 當學生有初步的連結時，你會不會要求學生進行確認與解釋？
5. 你認為協助學生去聯想與解題有關的公式或定理是重要的嗎？
要求說明
1. 你如何協助學生簡化問題？簡化問題是必要的嗎？
2. 學生簡化問題後，你會要求他說明簡化後與原問題之間的異同嗎？
3. 你會要求學生確認並解釋他的結果是正確的嗎？學生若無法清楚表達時，你會怎麼作？
順序化
1. 在探究過程中，你如何協助學生把他們不完整的想法串連起來？
2. 你認為探究之後要以更一般化的形式來呈現解題的結果嗎？
3. 證明自己解題過程和結果的正確性是重要的嗎？
4. 探究的結果應用到類似的問題或情境是重要的嗎？

（三）問卷

問卷是指探究在數學學習中的角色／價值問卷，在課程結束後施測，以了解所有學生對於探究在數學學習過程中扮演的角色與價值，同時比對訪談的資料，更完整了解學生經歷探究學習後的感受。問卷根據 Cilli-Turner（2017）的結果來編製，每個角色或價值均設計 1 題，採 5 點計分，得分愈高表示學生更能感受到探究對數學學習的價值和重要性，問卷內容如附錄 1。

四、資料蒐集與分析

（一）教學觀察錄影與各組解題紀錄

觀察與錄影主要在蒐集 A 教授探究教學時提問的內容及引發的學生回應。由於 A 教授採小組討論解題的教學方式，所以安排兩台攝影機，一台置於教室後方，針對他與全班的互動進行錄影；一台跟著 A 教授移動，記錄他與各組學生的互動。觀察錄影的資料轉錄成逐字稿後，針對教師提問的類型（表 3）、提問後學生的回應（表 4）來歸類。由於教師的提問往往會引發學生的回應，所以表 3 與表 4 的歸類是同步進行，由兩位主修數學教育且具有分析經驗的研究人員（碩士生）來進行：先由研究者說明表 3 和表 4 的內容與定義，再由兩位分析人員針對一次上課的內容進行試行分析，不過分析時會搭配各組學生紀錄的逐字稿（各組均放置一支錄音筆，要求學生轉錄解題過程中的討論，包括與 A 教授的對話），因為有時無法從兩台攝影機的錄影資料中，完整紀錄各組學生對於教師提問的回應，因此針對一次上課的內容進行分析時，會同時搭配該次上課中某一組學生的討論逐字稿共同分析，進行交叉比對避免重複歸類計數，分析後針對結果進行討論與釐清，再選擇另一次上課的內容與一組學生的討論逐字稿，採用歐用生（2000）提出的公式進行評分者信度的計算（$P = 2M / (M1+M2)$，M 為共同同意項目數，$M1$ 和 $M2$ 為各自歸類數）。以 12 月 19 日的教學錄影資料為例，結合第四組學生的逐字稿，以「教師提問與學生回應」為一個分析單位來進行表 3 和表 4 的歸類分析。結果兩位分析人員分別認定有 19 和 20 個可分析的單位，其中 17 個單位的歸類結果相同，帶入公式得出評分者信度為 .87，顯示有良好的信度。兩位分析人員針對分析單位認定與歸類不同處進行討論與確認後，再進行所有錄影資料的分析，共分析 15 份教學錄影的資料（每份兩節課），以及 98 份的各組學生討論逐字稿。兩位分析人員進行歸類時以表 3 和表 4 的類別為依據，且發現都可以歸類到表 3 和表 4 的類別中，而資料來源的編碼則以「日期－來源」呈現，其中日期以「月－日」來呈現。

（二）訪談與錄音

訪談包括對學生和教師的訪談，均採半結構式，全程進行錄音，將錄音的內容轉成逐字稿後進行編碼與分析。資料來源編碼的方式和錄影與逐字稿資料相同，而歸類分析則參考 Cilli-Turner（2017）的發現，從重要性、確認、解釋、智力的挑戰等探究學習的價值等

類別來進行歸類；教師訪談資料的分析則不進行歸類，而是從中來了解教師教學背後的思考，包括為何採探究方式進行教學？教學過程中為何關注某些任務？…等。雖然本研究參考相關研究發現來進行訪談資料的歸類，但仍保持開放態度，由資料本身來形成類別。訪談資料與觀察資料的分析人員相同，同樣經歷試行分析和歸類、比較與討論的歷程。兩位分析人員針對一次的訪談資料進行分析來建立信度，結果兩位分析人員分別認定有 16 和 17 個可分析單位，其中 16 個單位的歸類結果相同，帶入公式得出評分者信度為 .96，顯示具有好的一致性，兩位分析人員針對分析單位認定不同處進行討論與確認後才進行所有訪談資料的歸類分析。本研究共分析 14 份的訪談錄音的逐字稿（13 位學生和 A 教授的訪談），而學生的訪談也都能歸類到 Cilli-Turner（2017）發現的探究價值中。

（三）問卷

問卷採 5 點計分，非常不同意得 1 分，不同意得 2 分，依此類推。問卷的目的在了解學生經歷探究學習後，對探究在學習中扮演的角色和價值的觀點，所以不做進一步考驗分析，僅以平均數來呈現各向度的得分，分數愈高表示愈認同探究對學習的價值。

總結來看，本研究蒐集的不同資料都有各自處理與分析的方法，且透過不同人員、方法、資料等進行三角校正，來確認分析結果的可信性與可靠性。例如，透過觀察和訪談資料的比較，來了解教師教學歷程中關注的任務；從訪談和問卷資料來了解學生對探究學習數學的觀點；從不同人員的試行分析來建立評分者信度等。因此，本研究的結果具有可靠性與可信性。

肆、研究結果與討論

一、探究教學歷程中教師關注的任務與學生的回應

（一）教師較關注「提供線索與連結」與「要求說明」任務

表 7 是從 15 份教學觀察量表中，得出 A 教授教學時提問的歸類結果。由於 A 教授在佈題後便進行小組討論解題，此時他會巡視各組解題的情況並與各組互動。所以同一個問題，可能會有多次的提問（共有 8 組），所以才會有 193 次的提問。從整體提問的類別來看，A 教授在探究教學時較關注「提供線索和連結」，佔了全部提問的 47%（91/193），其次是「要求說明」，佔全部的 44%（84/193），「順序化」只佔 9%（18/193）。這可能有兩個原因：一是因為學生不熟悉以探究的方式來學習數學，二是 A 教授採用的問題具有挑戰性。這兩個原因和學生過去熟悉「講述－示範」的方式，或是習慣解決結構明確的問題有很大的不同，所以無法立即找出解題的方法。因此使得 A 教授在教學歷程中有較多的提問在解題思考的線索或喚起舊經驗，讓學生在新問題和舊經驗/知識之間建立連結，以便進行後續的解題推理與思考。若進一步從不同的學習主題來看，則發現 A 教授在利率和同餘主題教

學時有較多的提問（各有 56 和 55 次），在無窮和尺規作圖主題時的提問較少（各有 42 和 40 次），這可能因為學生在利率和同餘主題上有較多的先備知識，所以引發較多的師生互動。

表 7

教師教學提問統計表

類別	子類別	合計	總計
T1 提供線索和連結	T1-1	44	
	T1-2	14	
	T1-3	33	91
T2 要求說明	T2-1	13	
	T2-2	62	
	T2-3	9	84
T3 順序化	T3-1	12	
	T3-2	4	
	T3-3	2	18
總計			193

再從各提問類別的子類別來看，發現在提供線索和連結類別中，A 教授最關注的在於確認學生是否了解問題（T1-1，約佔該任務的 48%，此類別在各主題中佔的比例也最高）。他透過持續的提問來確認學生是否了解問題中的相關名詞，以便在概念理解前提下來構思解決方法。例如，在利息問題時詢問與確認學生對於複利的理解程度：

問題：你借了一萬塊錢，一年的利息是多少？1%。那你如果要分兩期，複利的話你要怎麼還？
A：什麼叫複利？
S：複利就是這筆錢算完之後呢…這個數字要再乘一次這個，就是它會越滾越大這樣。…（持續提問相關概念）
A：…你先想想看複利…我借你一萬塊…我一年要算兩次利息，那麼一年之後你會欠我多少錢？
S：首先利息方面的話，如果分兩次還，這邊應該是…（0919 錄影）

除了確認學生對相關概念的理解外，A 教授也以提問來喚起學生過去曾學過的相關概念（T1-2），包括在同餘主題時詢問學生是否記得中學時學過的相關概念與符號、在尺規作圖時詢問平行線的性質：

問題：用 m＝11，比如說我是 23 跟 34 有什麼關係？這個 1、12、23、34、45 像這些東西啊，他們中間有什麼樣關係？這些數字有什麼關係？
A：都是 11 的倍數＋1，對不對？…我們用一點數學的方法來描述…a 除以 11 會怎麼樣？餘數會是 1…b 除以 11 也是 1…數學的方法來描述這兩個有什麼關係？也就是說 11 可以寫成什麼東西呢？≡這個符號是什麼意思？記不記得？高中有沒有學過？…（1219 錄影）

問題：這邊有一個平行線，你能不能畫得出來？你怎麼去用直尺跟圓規畫出平行線？
A：現在證明這兩條直線是平行的時候，你要利用什麼？我們學平行的時候有些什麼樣的性質？回憶一下，你們以前國中在學平行有什麼性質？（1121 錄影）

當學生了解相關名詞與喚起舊經驗後，A 教授經常「提醒」學生試著將問題簡化來思考可能的解法（T1-3）。例如在旅館問題中，當確認學生了解無限概念後，請學生把問題想像成自然數和全數個數比較的問題，讓學生從討論中去發現透過數字的移動及 1 對 1 的對應，可能是解題的關鍵：

問題：Hilbert 的旅館問題

A：上個禮拜我要你們討論什麼是無限大、無限多，什麼是最後？也就是說任何一個數字後面還有數字，所以沒有止境、沒有最後，就叫做無限。好，那現在到旅館了，你怎麼把自然數和全數做一個對應？把你們剛剛討論的結果套用在上面。

S_1：就 1、2、3、4 每個都往後…1 號移到 2 號，2 號移到 3 號。

S_2：1 去對到 2，2 對到 3…（1024 錄影）

在利息問題中，學生面對「每個月去銀行存一萬塊錢，年利率是 6%，存 20 年之後可以拿多少錢？」的問題時，A 教授也透過簡化問題：「如果覺得 20 年太多一下想不出來…可以將問題簡化…把這個 20 年弄成 3 年 2 年…看是不是會得出一個很有規律的東西…」（0926 錄影），協助學生發現可能的解法。當學生簡化問題並想出解法後，A 教授便會要求學生說明，包括要求說明如何從簡化問題來確定解法（T2-1）、要求說明如何想出解法並說明推理的過程（T2-2）。其中，要求學生說明解題思考推理過程佔的比例最高（T2-2，約佔該任務的 74%），而且是佔所有提問子類別中出現次數最多的，而且在利率、無窮、尺規作圖和同餘主題中佔的比例也最高，分別佔了 74%、78%、92%和 65%。例如在利率主題中，A 教授問：「貸款你要怎麼還？」當學生寫出他們的算法後，A 教授持續追問算式怎麼來的？算式中的數字代表什麼？如果改變利率時算式有什麼改變？…等問題，學生針對 A 教授的提問來說明他們思考推理的過程和結果（0926 錄影）；在無窮主題中，當學生提出 1 對 1 的方法來安排「無限多團、每團有無限個旅客入住」的問題後，A 教授先問「這是怎麼來的？」接著持續追問如何進行 1 對 1 的房間配對。當學生表達不太清楚時，A 教授會以範例，例如「第 10 團第 21 號旅客會住哪一號房？」來請學生說明他們的思考與推理（1031 錄影）；在同餘主題中，當學生想出可以表示同餘的方法和符號後，A 教授持續追問該方法與符號的意義與正確性，以確定學生真的了解方法或符號代表的意義：

問題：現在我有 0、1、2、3、4，0 除以 5 餘數是多少？0；1 除以 5 餘數是多少？1；2 除以 5 餘數是 2；3 除以 5 餘數是 3；4 除以 5 餘數是 4。那我問你去把所有的整數，跟 0 同餘的這些數，跟 1 同餘的是？跟 2 同餘的是？跟 3 同餘的是？跟 4 同餘的是？你通通都把它抓出來，你看看會是什麼樣子。

A：你們做出來了嗎？

S：就是 5N、5N-1、5N-2、5N-3……

A：什麼叫 5N、5N-1、5N-2、5N-3？

……

S：5N 就是那個，同餘 0 的話就是 5N，N 是任意實數。

A：N 是什麼？N 是任意整數嗎？

S：任意自然數。

A：任意自然數，然後呢？

S：5N-1 就是同餘 4，5N-3 就是同餘 3……
A：為什麼要這麼麻煩呢？為什麼要用減的呢？
S：也可以用加的。
A：5N+1 同餘什麼？
S：同餘 1。(1219 錄影)

由於 A 教授較關注學生解題思考與推理的過程，所以在要求學生確認或證明自己結果的正確性上（T2-3），所佔的比例最低，僅在無窮和同餘的主題有此類別的提問。例如，請學生上台說明他們所得出公式的正確性（1114 錄影），或是直接提問：「你能不能證明你的結果？」(1219 錄影）讓學生有機會來說明與確認結果的正確性。在整個教學歷程中，A 教授較少出現順序化的任務，尤其在學生解題後請他們依序說明整個思考歷程的類別上（T3-3），僅出現 2 次，分別在無限和同餘單元，請學生針對所得出的公式進行整個思考歷程的說明（1114、1226 錄影），其餘兩個主題並未出現此類別。

A 教授的教學主要透過提問的方式來進行，因為他過去的教學經驗：「我教學那麼久，我的感覺就是學生第一個沒有自信，第二個缺乏溝通的能力…第三個他們缺乏用數學工具解決問題的能力」(0111 訪談)，使得他的教學以提問的方式來進行，希望透過歷程中的討論、溝通與說服，使學生真正理解數學並學習應用數學來解決問題：「以後碰到這個問題的時候，你（指學生）就會直接聯想有這個工具可以用」(0111 訪談)。A 教授教學中的提問目的有：

1. 促進學生新舊經驗之間的連結，以便進行後續解題的思考與探究。

> 我會提問…然後讓他們去思考…我會提醒他可以用前面所做的題目試試看，能不能跳到我們這邊的問題？有什麼關係？讓他們去探索…在尺規作圖的時候，我就會先讓他們去複習以前尺規作圖的經驗，有些人會忘記我就會提醒他們說，你那時候做過什麼圖？（0111 訪談 A 教授）

2. 協助學生進行解題的反思與連結。

> …學生如果有盲點，不對的時候。就會針對他的盲點提出疑問，讓他去思考他的解釋是錯的...太瑣碎的問題要怎麼樣去連結？…我在巡視的時候…看他們碰到什麼東西…沒辦法去思考的時候，我就會去提醒他們說，想想看你的問題。(0111 訪談 A 教授)

3. 培養學生把自己的思考歷程與結果說明清楚的能力。

> …我會提問…讓他們去討論，在討論的過程中，會有說服的過程…探究出來結果能說服別人。(0111 訪談 A 教授)

不過當學生對於問題中的名詞不熟悉或不清楚時，A 教授會：

> …先針對這些名詞進行解釋…看看他們前面有沒有這些類似的經驗…如果他們沒有的話，我會提供一些情境讓他們去體會。(0111 訪談 A 教授)

整體來看，A 教授的教學主要透過提問來引發學生思考、推理、討論和說明，雖然學習主題不同，但都較關注建立學生對問題理解的任務上，包括對問題內容與可能解法的理解，因為題意的理解是後續解題的基礎；此外他也較關注學生解題歷程中發展的推理和思考，以確認其推理思考的正確性，並作為後續提問與引導的基礎，這呼應了 A 教授對數學學習的主張。

（二）學生的回應聚焦在「搜尋和比對」與「解題」

表 8 是 A 教授對全班及各組提問時，學生進行回應的歸類統計結果。從表 8 來看，學生在面對挑戰題時，大部分聚焦在對學過的知識或經驗進行「搜尋和比對」，佔全部的 47%；其次是在搜尋和比對完成後的「解題」，包括「制定解題方法」和「發展並完成解題」，佔全部的 45%；而「證明與應用」的比例最低，佔全部的 8%。這樣的結果可能是受到教師教學的影響：A 教授教學時最注重提供線索與連結（佔 47%），其次是要求學生說明如何制定與發展出解題方法（佔 44%），較少進行解題歷程的回顧、證明與應用（佔 9%）。

表 8
學生回應統計表

類別	子類別	合計	總計
S1 搜尋和比對			83
S2 解題	S2-1	58	
	S2-2	21	79
S3 證明與應用			14
總計			176

另外，學生進行探究解題時之所以較關注搜尋與比對，可能是因為要試圖發現與問題相關的知識和經驗，以便進行後續的解題。例如在利息主題中，有學生試著從單利的概念來思考複利的計算：

> 單利就是固定的利息費用，假裝老師剛剛說貸款 4,000,000，利率一年是 12%，通常都是用年率來算，以一年來算的話，我們會付 480,000 的利息。複利的話會比較麻煩，一般來講就是錢滾錢的那種…算一年利息 480,000，我們要加回去本金。（0919 第一組逐字稿）

在無限旅館問題中，有學生從函數一對一的對應關係，來思考如何「挪出空房」給來的旅客：

> $S_{8\text{-}1}$：我覺得不能用原本的觀念去看，要用編號。所以我們就假設說現在每個房間都是滿的，有客人來就多一間房間，利用函數一個 x 對應一個 y，每出現一個 x 就有另一個相對應的數。
> $S_{8\text{-}2}$：那如果每個人往右移，客人住一號房，一號房住二號 二號房住三號 以此類推。
> $S_{8\text{-}1}$：好像也可以，如果以數列來說，移過去一個那就會有一個空房了。（1024 第八組逐字稿）

在發現問題與相關知識的連結後，便聚焦在「制定與發展」解法。例如第一組了解複利的計算需將利息加上本金後，便在討論中制定出複利的解法：

$S_{1\text{-}1}$：每個月存一萬塊...過了一個月，一個月是 0.5%，所以這個時候的本利和是本金加利息等於 10000*0.5%+10000，所以是等於 10050；然後第二個月的時候你又再存 10000 進去，你存進了一萬塊所以你第二個月存款利息，存款總共多少？

$S_{1\text{-}2}$：20050

$S_{1\text{-}1}$：對，所以這個時候就是 20050，所以就是再過一個月，是不是又有利息進來所以再乘於 0.5%，所以是這裡的本利和就是 30150，所以就是他會一直加一直加利息進去…這裡的話公式是比較難一點，通常如果是算到最後一年…本金是 10000*(1+0.5%)然後我們一年有幾期…（0926 第一組逐字稿）

在同餘問題中，有學生試著用舉例的方式來找出規律，以得出解法：

$S_{4\text{-}1}$：我剛才試 a = 1，b = 8 他們 mod 7 都餘 1，假設 c = 5 時，再乘以 c 分別為 ac = 5, bc = 40，mod 7 後餘數皆為 5，所以當 ac ≡ bc 時，a ≡ b 成立。

$S_{4\text{-}2}$：那這樣餘數是 1 的都可以，那就 0 的會不一樣?

$S_{4\text{-}1}$：沒有，假設 a = 0，b = 7，mod 7 都為 0，c = 5 時，ac = 0，bc = 35，他們 mod 7 還是 0。

$S_{4\text{-}2}$：對耶，那這樣我們算一下 m = 12，c = 10，A 你試第一個，C 你試第二個，$S_{4\text{-}3}$ 你試第三個，看看這樣的結論對不對。先找出 a-b 是 12 的，再去看規律。（1226 第四組逐字稿）

學生完成解題後對自己解法進行證明與應用的機會較少。從各組解題討論的逐字稿來看，只有在利息和同餘主題中進行了證明與應用的任務，而且大都試著以數學算式來證明解題方法與結果的普遍性，而非僅限於解特定情境的問題。例如在利息問題中，有學生以等比的公式來得出普遍性的解法（雖然以 240 個月為例）；在同餘問題中學生完整地寫出一般式來證明，並獲得 A 教授的肯定。兩組學生討論的內容如下：

$S_{3\text{-}1}$：所以公式是套用等比級數的公式

$S_{3\text{-}2}$：我發現他有一個規律，假設 10000 設 X，(1＋6%/12)設 Y，那第一個月就是 XY，第二個月是(XY+X)×Y=XY^2+XY，第三個月是(XY^2+XY)×Y=XY^3+XY^2+XY，所以總和以上 3 個月可以簡化把 X 提出，變成 X(Y+Y^2+Y^3+...+Y^{240})（0926 第三組逐字稿）

$S_{7\text{-}1}$：那就是 $\frac{c(a-b)}{m}=k, k \in Z$，然後(m, c) = d，m = dm1，c = dc1

$$\frac{\mathrm{d}c_1(a-b)}{\mathrm{d}m_1}=k$$

$$\frac{c_1(a-b)}{m_1}=k$$

m1|a-b

A　：嗯，沒錯，就是這樣（1226 第七組逐字稿，也把 A 教授的回饋記錄下來）

二、學生在經歷探究教學後肯定探究對數學學習的價值

表 9 是 26 位學生在問卷各向度的平均得分。除了「學習的信心」平均得分較低是 3.81 外，其餘向度均超過 4.00，其中以「解釋」的平均得分最高（4.73），其次是「確認」（4.58）。這顯示學生在經過一學期的探究學習後，認為透過探究可以更清楚地解釋數學的概念和原理、更能確認解題過程的正確性、認為整個歷程是一項「智力的挑戰」（4.50）、有助於了解數學知識的結構（「形式化」平均 4.50）。

表 9

學生在問卷中各向度的平均得分表

向度	重要性	確認	解釋	智力挑戰	溝通	發現	形式化	學習信心	正向態度
平均	4.38	4.58	4.73	4.50	4.31	4.39	4.50	3.81	4.08

再從來自不同科系的 13 位學生（以 S_1-S_{13} 來代表）訪談內容的歸類結果來看，受訪的學生都表示以探究來學習數學，和過去以示範記憶為主的學習經驗非常不同，過程中能感受探究的歷程是一項智力的挑戰，一方面是因為過去缺乏探究的經驗，一方面是因為問題的難度或本身的數學能力所產生，但只要克服過程中的挫折，便可以提升解題的成就感。學生表示：

> S_3：現在這個（*指這次的學習經驗較有挑戰性*），以前的很簡單，背公式就好。（1218 訪談）
>
> S_6：我本身數學就比較不好，現在這個因為要一直動腦，之前就比較不用，所以會覺得有點吃力，而且越後面教的越來越抽象。（1218 訪談）
>
> S_2：以這學期來說，比較有挑戰性的是「無限」那個部分，剛開始是想不出來，不過有小組成員討論、查資料…找到一個小方向後自己再去做更深入的理解。雖然有得到提示，可是靠自己去把剩下未知的部分探索出來，再以自己的方式去教不會的同學，這樣會比較有成就感。挑戰性會伴隨著挫折感，但如果真的解決了挑戰就會有成就感。（1218 訪談）

在歷經探究時遭遇的挑戰、挫折、及歷經自發性地分享和討論後，使他們未來較有信心去面對困難的問題，因為可以運用學到的多元思考、推理等探究的方法來解題，並會以正向的態度來面對學習的挑戰。學生表示：

> S_7：有（*指有信心面對較難的問題*），會想到以前學過怎麼探究，就會想到老師以前教我們怎麼探究，要從哪個方面下去看，再去著手。（1218 訪談）

S_{12}：會啊（*指會有信心*）！因為以前…老師是會推導一些公式，講完之後可能也忘記了，老師就會說只要背最後的結果就好，所以真的不會去記中間的東西，但如果慢慢推導，一步一步慢慢理解出來之後，反而會比較好。（1226 訪談）

S_3：我覺得會（*指正向態度面對數學學習*），學習一個新的東西就會很開心，對我而言是這樣啦，我就會熱衷去學這些沒看過的知識。（1218 訪談）

S_4：應該是可以（*指正向面對數學的挑戰*），因為這算是自發性的學習，而不是一直被動的接受。（1218 訪談）

大部分受訪學生都認同探究對於數學學習的重要，因為透過探究可以加深對數學概念的理解與印象、透過討論與分享可以了解自己思考與推理的歷程與他人的差異、檢驗與確認自己解題方向或方法的正確性等。探究比以背誦的方式好多了，因為探究使他們更確認自己與他人的思考歷程，提升對於數學的理解與後續的學習。學生表示：

S_7：…數學一定要經過探究…如果只是用背的，稍微轉換一下就無法應付，一定要透過探究去理解它。（1218 訪談）

S_4：蠻重要的，因為沒有去探索，印象就沒有很深刻。（1218 訪談）

S_{12}：很重要，因為如果死記硬背的話，可能剛開始考試的時候會記得，但是過了一段時間就會完全忘記…，但如果…一步一步慢慢理解討論探究出來的話，就還可以記得剛開始怎麼討論出來的…下次用到的時候還會有印象。（1226 訪談）

S_8：…大家都會彼此討論…就會說我覺得這個角度不對，你錯在哪？少考慮了什麼？這樣可以更確定自己是對的。（1219 訪談）

S_2：把自己的想法提出來和大家一起討論，雖然自己是錯的，但也可以讓其他人知道這是錯的，可以往其他方向想，就不會一直往這個錯誤的地方想。（1218 訪談）

此外，大多數受訪學生也肯定探究的歷程有助於與他人進行溝通，包括彙整或統整不同的想法、釐清自己的思考與盲點等。數學溝通不但讓自己的解題思考更有邏輯，而且對解決困難問題非常有幫助。學生表示：

S_6：…跟同學討論或老師講解後，就知道自己錯在哪裡。（1218 訪談）

S_3：…你的組員討論…每個人意見都不同…過程中有人的方法就會附著他人的方法，把那些方法統整起來。…比較難的問題，可能自己想不出來，但你會有一些想法，可以跟別人分享，別人可能就能看出你的盲點，所以我覺得探究比較重要的就是在這一塊，解題這一塊。（1218 訪談）

S_2：…經過自己的探究，那當然跟別人解說時會比較清晰…探究的話，切入點不同，可能也會去探索周邊的點，別人問你問題的時候，就可以更理解這個概念的其他概念，經過探究的話，你的解說會比較有邏輯。（1218 訪談）

S_{13}：…我們這組都蠻厲害的，他們都會算…都會一起討論、拼湊然後答案就出來了。（1226 訪談）

也有少數學生認為 A 教授問的問題未來可能用不到（如 S_{11}），或認為應該要有一定程度的知識後再進行探究才會有趣（如 S_1），所以對探究的重要性感受並不深；也有學生表示

因為組員過於內向而很難進行有效的溝通（如 S_1），或是認為自己程度較差，聽不懂老師或組員講的內容，而較難體驗到溝通的價值（如 S_5）。但整體來看，受訪學生都表示體會到和以往不同的學習經驗，且大都肯定探究對於數學學習的價值。

三、討論

檢視 A 教授數學探究教學的歷程，雖然符合 Silver（1997）的主張，即在「佈題－解題」之間展開，並強調討論、共同探究、說明思考歷程與結果等活動，但對教學中使用的數學問題上，A 教授和過去研究的主張有些不同。過去研究的觀點，如 Allmond 等人（2010）、Kuster 等人（2018），都從 RME 的觀點出發，強調適合探究教學的問題是生活相關，且相較於教科書中的問題，是屬於結構不明確、無固定解法的問題，需要學生進行探究思考後才能得出解題的方法與結果。但上述研究的主張對象是中小學生，對於大學生而言，A 教授認為只要問題具有挑戰性，或是學生的先備知識不足，包括並未真正理解，都是適合讓學生進行探究思考的問題，不一定要與生活相關，而且關鍵在於教師如何提問和引導。這樣的觀點其實和 Cilli-Turner（2017）、Santos-Trigo 與 Camacho-Machin（2009）針對大學生進行探究教學的研究相似，即數學性或結構性的問題，只要具有挑戰性，就是適合進行探究的問題。由此來看，適合進行數學探究的問題，從實施的對象（中小學生、大學生）和研究者背景（數學教育家、數學家）來看，可能有不同的觀點。不過數學探究教學的實施，除了問題本身之外，關鍵還在於教師的教學實施。如同 Henningsen 和 Stein（1997）發現高認知的問題，可能因為教師的教學實施，使學生以低認知的方式來學習，而缺少讓學生進行高層次思考與探究的學習機會。由此來看，數學問題的結構性或與生活化，並非是探究教學實施的唯一判準。從 A 教授實施的歷程和主張，對照相關的研究結果，擴展了我們對於數學探究實施的觀點。

在教學的實施上，從教學歷程或聚焦的教學任務來看，A 教授的教學大致符合 Kuster 等人（2018）提出的探究教學原則和 Allmond 等人（2010）的探究教學歷程。不過 A 教授的教學實施並非完全讓學生自行探究解題，而是過程中透過持續性提問來引導與協助學生完成，包括透過提問來引導學生舊經驗與問題之間的連結、透過提問來引導與協助學生制訂與發展解題方法、透過提問來確認學生推理的合理性等。A 教授強調以提問來促進學生進行數學探究的作法，呼應了 Lim 等人（2020）的研究，而且他認為只有透過提問和對話才能了解學生的理解程度，才能引導學生發展出解題推理的方法，同時讓學生習慣以提問和對話進行數學的探究與學習，才能打破學生過去被動與記憶的數學學習方式，建立穩固且真正的數學理解。這樣的結果讓研究者可以進一步思考教師提問的重要，進一步探討在教師提問與學生回應間進行的數學言談（Sfard, 2008），對學生進行數學探究的影響。

若再從 Peirce 對數學探究教學的推理歷程（Campos, 2010）來看，A 教授的教學主要經歷的是「想像」（新舊經驗的連結）和「聚焦」（解題）兩個階段：在想像階段，A 教授關注任務的是提供線索與連結，使得學生的回應聚焦在搜尋和比對；在聚焦階段，A 教授

關注的任務是要求學生說明解題歷程的思考與推理，使得學生聚焦在制定解題方法和發展解題推理與結果，以回應 A 教授的要求。A 教授的數學探究教學，較關注的是建立學生新舊經驗的連結、協助學生發展解題的思考推理兩個任務，較少關注將學生的推理與思考連結到正式的數學語言和符號。這樣的結果可能是考量到學生的背景與設定的目標，因為學生來自技職與高教體系的系所，數學背景與程度差異不小，所以 A 教授將目標設定為希望學生經歷數學學習中的思考與推理，並發展出真正的理解（0111 訪談）；加上學生對探究學習的方式不熟悉以及問題的挑戰性，使 A 教授的教學聚焦在建立學生新舊經驗的連結和發展解題的思考推理的任務上。A 教授教學中關注的任務影響了學生回應的焦點，使學生較少有機會來證明自己解題推理歷程的合理性與應用性。

最後從 A 教授關注的教學任務中，讓我們了解探究教學歷程中關注學生數學理解與推理的重要，因為以理解方式學習數學，歷程中強調學生的思考推理，並運用其推理進行引導與對話，凸顯以學生為中心的數學教學（Artzt & Armour-Thomas, 2002），也可培養以數學推理為核心的數學素養（OECD, 2018）。若能多些關注將推理歷程與結果進行一般化的應用，將可更符合探究教學的主張。回顧 A 教授探究教學實施的歷程，雖然與過去針對中小學進行探究教學研究的主張不完全相同，但擴展了對於適合進行數學探究問題的觀點，了解到問題類型與教學實施是影響學生進行探究的關鍵，其中教師的提問扮演著關鍵的角色。A 教授的探究教學歷程與關注的任務，是考量學生數學背景與設定目標的結果，同時也展現了大學數學探究教學實施的獨特性與多樣性。

伍、結論與建議

本研究發現 A 教授的數學探究教學，圍繞著「佈題－解題」的歷程來實施，歷程中較關注提供線索來建立學生新舊經驗間的連結，以及要求學生說明解題思考的歷程。由於 A 教授教學中關注的任務，使學生的回應較聚焦在內在的搜尋與比對，以及解題方法制定與發展解題推理上。A 教授過去的教學經驗、對學生數學學習背景的理解、教學目標的設定，影響了他教學歷程中關注的任務與實施方式。在經歷一學期的探究教學後，學生大都能體驗並肯定探究學習的價值，包括能更清楚地解釋數學的概念、能確認過程與答案的正確性、能建立正向的態度等。

本研究根據研究發現提出以下建議供後續研究者或教師參考。首先，由於 A 教授個人的教學經驗與目標的設定，使他在探究教學中關注提供線索和要求說明兩個任務，但不同教師背景或不同目標設定，是否會呈現不同的探究教學樣貌？教師關注的任務和學生的回應是否不同？另外，本研究針對的數學探索是偏向結構較鬆散的大學數學通識課程，對於更抽象性與系統性的數學系數學專業課程，如微積分、線性代數等，數學探究教學的實施是否不同？教師關注的任務是否有所差異？甚至相同任務（如要求說明）是否會因數學主

題的不同而有差異？這些都值得進一步探討；其次，本研究發現 A 教授透過提問來引導學生進行探究，不同類型的提問是否引發不同的思考與探究？哪一種提問類型較能促進學生進一步的討論與探究？也值得探討，因為提問是引發學生後續探究的關鍵；最後，本研究雖然發現探究教學實施後，能讓學生肯定探究對於數學學習的價值，但對學生的解題表現有何影響？特別在結構不明確問題的解題表現上，值得進一步探討，以更深入了解探究教學的成效。

誌謝

本研究感謝國科會提供經費協助（計畫編號：MOST 108-2511-H-153-008），以及 A 教授與修讀「數學探索」課學生的參與，使本研究得以完成。本文論點為作者所有，不代表國科會。

參考文獻

林勇吉、秦爾聰、段曉林（2014）。數學探究之意義初探與教學設計實例。**臺灣數學教師，35**（2），1–18。[Lin, Y.-C., Chin, E.-T., & Tuan, H.-L. (2014). Mathematical inquiry and its teaching examples. *Taiwan Journal of Mathematics Teachers, 35*(2), 1–18. (in Chinese)]

徐偉民（2013）。國小教師數學教科書使用之初探。**科學教育學刊，21**（1），25−48。[Hsu, W.-M. (2013). An exploratory study of mathematics textbook use by elementary school teachers. *Contemporary Journal of Science Education, 21*(1), 25−48. (in Chinese)] https://doi.org/10.6173/CJSE.2013.2101.02

徐偉民、張國綱（2010）。師資培育數學課程對國小教師數學教學意象影響之研究。**當代教育研究季刊，18**（4），41−77。[Hsu, W.-M. & Chang K.-K. (2010). The influence of mathematics curriculum of teacher education on the mathematics teaching image of elementary school teachers: A Case study. *Contemporary Educational Research Quarterly. 18*(4), 41−77. (in Chinese)] https://doi.org/10.6151/CERQ.2010.1804.02

秦爾聰、林勇吉、林晶珮、段曉林（2009）。數學探究教學對數學解題能力提升之個案研究。**科學教育研究與發展季刊，55**，83−116。[Chin, E.-T., Lin, Y.-C., Lin, C.-P., & Tuan, H.-L. (2009). The influence of mathematics inquiry teaching on mathematical problem solving abilities: Four 7th grade students case study. *Research and Development in Science Education Quarterly, 55*, 83−116. (in Chinese)]

歐用生（2000）。內容分析法。載於黃光雄、簡茂發（主編），**教育研究法**（頁 229−254）。師大書苑。[Ou, Y.-S. (2000). Content analysis. In K.-H. Huang & M.-F. Chien (Eds.), *Educational research* (pp. 229−254). Shtabook. (in Chinese)]

Allmond, S., Wells, J., & Makar, K. (2010). *Thinking through mathematics: Engaging students with inquiry-based learning* (Books 1-3). Curriculum Press.

Artzt, A. F., & Armour-Thomas, E. (2002). *Becoming a reflective mathematics teacher: A guide for observations and self-assessment.* Lawrence Erlbaum.

Bonotto, C. (2013). Artifacts as sources for problem-posing activities. *Educational Studies in Mathematics, 83*(1), 37–55. https://doi.org/10.1007/s10649-012-9441-7

Borasi, R. (1992). *Learning mathematics through inquiry*. Heinemann.

Campos, D. G. (2010). Peirce's philosophy of mathematical education: Fostering reasoning abilities for mathematical inquiry. *Studies in Philosophy and Education, 29*(5), 421–439. https://doi.org/10.1007/s11217-010-9188-5

Cifarelli, V. V., & Cai, J. (2005). The evolution of mathematical explorations in open-ended problem solving situations. *The Journal of Mathematical Behavior, 24*(3–4), 302–324. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2005.09.007

Cilli-Turner, E. (2017). Impacts of inquiry pedagogy on undergraduate students conceptions of the function of proof. *The Journal of Mathematical Behavior, 48*, 14–21. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2017.07.001

Hähkiöniemi, M. (2013). Teacher's reflection on experimenting with technology-enriched inquiry-based mathematics teaching with planned teaching unit. *The Journal of Mathematical Behavior, 32*(3), 295–308. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2013.03.007

Henningsen, M., & Stein, M. K. (1997). Mathematical tasks and student cognition: Classroom-based factors that support and inhabit high-level mathematical thinking and reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education, 28*(5), 524–549. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.28.5.0524

Johnson, E. (2013). Teachers' mathematical activity in inquiry-oriented instruction. *The Journal of Mathematical Behavior, 32*(4), 761–775. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2013.03.002

Johnson, E., Caughman, J., Fredericks, J., & Gibson, L. (2013). Implementing inquiry-oriented curriculum: From the mathematicians' perspective. *The Journal of Mathematical Behavior, 32*(4), 743–760. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2013.03.003

Kuster, G., Johnson, E., Keene, K., & Andrew-Larson, C. (2018). Inquiry-oriented instruction: A conceptualization of the instructional principles. *PRIMUS, 28*(1), 13–30. https://doi.org/10.1080/10511970.2017.1338807

Lim, W., Lee, J. E., Tyson, K., Kim, H. J., & Kim, J. (2020). An integral part of facilitating mathematical discussion: Follow-up questioning. *International Journal of Science and Mathematics Education, 18*(2), 377−398. https://doi.org/10.1007/s10763-019-09966-3

Makar, K. (2012). The pedagogy of mathematical inquiry. In R. M. Gillies (Ed.), *Pedagogy: New developments in the learning sciences* (pp. 371−397). Nova Science Publishers.

Organisation for Economic Cooperation and Development. (2018). *PISA 2021 mathematics framework (Draft)*. OECD Publishing. https://www.oecd.org/pisa/sitedocument/PISA-2021-mathematics-framework.pdf

Rasmussen, C., & Kwon, O. N. (2007). An inquiry-oriented approach to undergraduate mathematics. *The Journal of Mathematical Behavior, 26*(3), 189–194. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2007.10.001

Reitman, W. R. (1965). *Cognition and thought: An information-processing approach.* Wiley.

Richards, J. (1991). Mathematical discussions. In E. von Glasersfeld (Ed.), *Radical constructivism in mathematics education* (pp. 13–51). Springer. https://link.springer.com/content/pdf/10.1007/0-306-47201-5_2?pdf=chapter%20toc

Santos-Trigo, M., & Camacho-Machin, M. (2009). Towards the construction of a framework to deal with routine problems to foster mathematical inquiry. *PRIMUS, 19*(3), 260−279. https://doi.org/10.1080/10511970701641990

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing.* Cambridge University Press.

Silver, E. A. (1997). Fostering creativity through instruction rich in mathematical problem solving and problem posing. *ZDM−Mathematics Education, 29*(3), 75−80. https://doi.org/10.1007/s11858-997-0003-x

Staer, H., Goodrum, D., & Hackling, M. (1998). High school laboratory work in Western Australia: Openness to enquiry. *Research in Science Education, 28*(2), 219−228. https://doi.org/10.1007/BF02462906

Stein, M. K., Remillard, J., & Smith, M. S. (2007). How curriculum influences student learning. In F. K. Lester, Jr. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 319−369). Information Age Publishing Inc.

Strogatz, S. (2010, May 9). *The Hilbert Hotel.* New York Times. https://archive.nytimes.com/opinionator.blogs.nytimes.com/2010/05/09/the-hilbert-hotel/

Uhling, F. (2002). The role of proof in comprehending and teaching elementary linear algebra. *Educational Studies in Mathematics, 50*(3), 335–346. https://doi.org/10.1023/A:1021245213997

Wawro, M. (2015). Reasoning about solutions in linear algebra: The case of Abraham and the Invertible Matrix Theorem. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education, 1*(3), 315–338. https://doi.org/10.1007/s40753-015-0017-7

Wawro, M., Rasmussen, C., Zandieh, M., Sweeney, G. F., & Larson, C. (2012). An inquiry-oriented approach to span and linear independence: The case of the Magic Carpet Ride sequence. *PRIMUS, 22*(8), 577-599. https://doi.org/10.1080/10511970.2012.667516

附錄 1：探究在數學學習中扮演的角色／價值問卷

價值	問題	非常不同意	不同意	尚可	同意	非常同意
重要性	探究在數學學習的過程中扮演著非常重要的角色	□	□	□	□	□
確認	透過探究可以更確認數學過程與結果的正確性	□	□	□	□	□
解釋	透過探究可以更清楚地解釋數學的概念和原理/原則	□	□	□	□	□
智力的挑戰	探究的歷程是一項智力的挑戰	□	□	□	□	□
溝通	透過探究有助於數學學習過程中與他人的溝通	□	□	□	□	□
發現	透過探究可以發現新的數學觀念或想法	□	□	□	□	□
形式化	在探究的歷程中可以更了解數學知識形成的脈絡與結構	□	□	□	□	□
學習信心	透過探究的方法可以增加我學習數學的信心	□	□	□	□	□
正向態度	透過探究的方法可以讓我以更積極的態度來學習數學	□	□	□	□	□

《臺灣數學教育期刊》稿約

2013.04.03 編審委員會會議通過
2013.09.27 編審委員會會議修訂通過
2014.09.04 編審委員會會議修訂通過
2017.03.17 編審委員會會議修訂通過
2021.04.09 編審委員會會議修訂通過
2022.04.08 編審委員會會議修訂通過

壹、《臺灣數學教育期刊》（*Taiwan Journal of Mathematics Education*）（以下簡稱本刊）是國立臺灣師範大學數學系及台灣數學教育學會共同發行之期刊，內容以出版數學教育領域相關議題的原創性論文為宗旨。

貳、本刊歡迎符合宗旨的多元型態學術論文，類型如下：

一、實徵論文（research report）：透過資料收集與分析來探究理論或檢驗假設。

二、回顧性論文（review article）：整合相關之實徵研究，並提出批判性或創發思考的評析。

三、學術瞭望（academy observatory）：針對國內外數學教育理論、議題、新知、研究成果、實務發展、改革趨勢，進行說明、分析、評論、反思或建議。

四、書評（book review）：以導讀、討論、分析、闡釋，或比較，來介紹並評論數學教育領域新出版的重要書籍。

參、撰寫文別及字數如下：

一、實徵性論文與回顧性論文：可以中文或英文撰寫，中文稿件字數以20,000字、英文10,000字為上限（包含論文全文、中英文摘要、圖表、附註、參考文獻、附錄等），並需經正式審查流程（請參見第捌項之說明）。

二、學術瞭望與書評：以中文5,000字為原則，由編輯室邀稿。不經正式審查，但需通過編輯委員會議。

肆、本刊每年發行兩期，分別於四月、十月出刊，並採電子和紙本方式發行。全年徵稿，隨到隨審。

伍、本刊所刊之文稿須為原創性的學術論文之文稿，即未曾投遞或以全論文形式刊登於其他期刊、研討會彙編或書籍。若文稿在送審後自行撤稿，或出現一稿多投、修正稿回覆逾期、侵犯著作權等違反學術倫理等情況，將依下列規則處理：

一、來稿一經送審，不得撤稿。因特殊理由而提出撤稿申請者，案送主編決定；非特殊理由而自行撤稿者，一年內將不再接受該作者的投稿。

二、若文稿被發現一稿多投、侵犯著作權或違反學術倫理等情況，除文稿隨即被拒絕刊登外，一切責任由作者自負，且本刊於三年內不接受該作者來稿，並視情節嚴重程度求償。

三、作者應於發出文稿修正通知的三週內回傳修正稿及修正回覆說明書，逾期視同撤稿。若有特殊情況請先與本刊聯絡。

陸、未經本刊同意，已發表之文章不得再於他處發表。投遞本刊之學術論文須經編審委員會送請專家學者審查通過後予以刊登，被刊登文章之著作財產權歸國立臺灣師範大學數學系及台灣數學教育學會共同擁有，文責由作者自負。投稿至《臺灣數學教育期刊》之文章，若經編輯委員推薦且經作者同意，可轉稿至《臺灣數學教師》。

柒、中文文稿格式請參考本期刊論文撰寫體例的說明或已發行之文稿，若為英文撰寫之文稿、引用英文文獻以及數學符號、公式等請參考APA第七版出版手冊。投稿時應注意下列事項：

一、填寫投稿資料

(一) 文稿基本資料。

(二) 通訊作者之姓名、服務單位、職稱、通訊地址、聯絡電話和電子郵件地址。一位以上作者時，非通訊作者只需填寫姓名、服務單位和職稱。

(三) 任職機構及單位：請寫正式名稱，分別就每位作者寫明所屬系所或單位。

(四) 頁首短題（running head）：中文以不超過15個字、英文以不超過40個字元為原則。

(五) 作者註（author note）：說明與本篇研究相關的資訊。

二、除文稿正文外，還需包含中英文摘要，相關規定請詳見《臺灣數學教育期刊》論文撰寫體例。

三、若為修正稿，遞交修正的文稿（上述第伍項第三點之資料）上請以色字標示修改處，並需依審查意見逐項說明修改內容或提出答辯。

捌、本刊審查流程分為預審與正式審查兩個階段：

一、預審：不符合本刊宗旨、品質要求，或撰寫體例者，逕行退稿或退回請作者修改後再上傳。

二、正式審查：為雙向匿名審查，除基本資料表外，不得出現任何足以辨識作者身份之資料，包括請先省略誌謝。

玖、文稿透過線上投稿系統（http://tjme.math.ntnu.edu.tw）方式投遞。當文稿被接受，作者需在本刊提供的著作財產權讓與同意書上簽名，以掃描檔或紙本方式寄回。作者應負論文排版完成後的校對之責。被接受刊登之文稿，作者需提供文獻之doi，以及中文參考文獻之英譯資料。被接受刊登的英文文稿，作者需自行負責檢查文稿中的用詞、語法、拼寫、含意和邏輯的正確性，編輯委員僅負責格式上之校對。

壹拾、期刊助理聯絡郵箱：TJME.taiwan@gmail.com

《臺灣數學教育期刊》研究論文撰寫體例

2013.04.03 編審委員會會議通過
2013.09.27 編審委員會會議修訂通過
2014.09.04 編審委員會會議修訂通過
2017.03.17 編審委員會會議修訂通過
2022.04.08 編審委員會會議修訂通過

本期刊原則上依循美國心理學會（American Psychological Association）的撰寫格式，中文文稿請參考下面的說明或本刊已發表的文稿，若為英文撰寫之文稿、引用英文文獻以及數學符號、公式等請參考 APA 第七版出版手冊。文稿請使用 Microsoft Word 98 以上之繁體中文文書軟體處理。除另有規定外，中文字型一律採用新細明體，英文字型一律為 Times New Roman。

壹、撰稿格式

一、**稿件順序：**投稿除需要附上作者基本資料表檔案外，中文稿件內容依序為中文摘要頁（含關鍵字）、英文摘要頁（含關鍵字）、正文（包括圖、表、附註、誌謝、參考文獻）以及附錄（若無必要可省略）；英文稿件之撰寫順序相同，唯中英文摘要頁位置對調。

二、**稿件版面：**以單欄版面橫向印列的A4規格紙張，上下左右各留2.5公分空白，除基本資料表頁外每頁需加註頁碼。文稿字數（包含摘要、正文、圖表、附註、參考文獻、附錄等）中文以20,000字為上限，英文以10,000字為上限。

三、**中文文稿的中文摘要在前，英文摘要在後**：中文摘要頁內容包括論文題目（粗體20級字、置中）、摘要（不分段，限500字以內）、與關鍵字（以五個為上限，並依筆畫順序由少到多排列）。英文摘要頁內容包括 Title（bold, 20 pt, central）、Abstract（不分段，限300字以內）及 Keywords（字詞及順序須與中文關鍵詞相對應）。

四、**英文文稿的英文摘要在前，中文摘要在後：**英文摘要頁內容包括 Title（bold, 20 pt, central），Abstract（不分段，限300字以內）及 Keywords（以五個為上限，並依字母順序排列）；中文摘要頁內容包括論文題目（粗體20級字、置中）、中文摘要（不分段，限500字以內）及中文關鍵詞（字詞及順序須與英文關鍵詞相對應）。

五、**字級與行距：**除各項標題、表之註記與另起一段之引文外，內文不分中英文均為12級字，單行行距。

六、**字型與符號：**除另有規定外，中文字型一律採用新細明體，標點符號及空白字為全形字；英文字型一律為Times New Roman。

貳、正文規格

一、**正文內容：**原則上包括「緒論」、「文獻探討」、「方法」、「結果」、「討論」與「參考文獻」等六部分，「緒論」含研究動機與目的、假設或研究問題等內容。前述格式為原則性規定，作者可依論文性質斟酌改變。

二、**標題的層次、選用次序與字體**：

(一) 標題請用字簡明，勿用句號或冒號。若逢頁尾最後一行，應移至次頁首行。第一級標題為「緒論」、「文獻探討」、「方法」、「結果」、「討論」與「參考文獻」等，各層次標題選用次序為：壹、一、(一)、1、(1)、A 最多以六個層次為原則。

(二) 第一層次標題置中，其餘靠左對齊。第一、二、三、四、五層次標題請使用粗體。第一層次標題使用 16 級字，第二層次標題使用 14 級字，其餘 12 級字。

(三) 第一、二、三層次標題為單行間距，並與前後段距離均為 1 行；第四、五、六層次標題為 12 點最小行高，並與前後段距離均為 0.5 行。

(四) 第五、六層次標題內縮 1.5 字元，而第六層次標題加上底線。

壹、16級字、粗體、置中

一、14級字、粗體、靠左對齊

(一)12級字、粗體、靠左對齊

1. 12級字、粗體、靠左對齊

(1)內縮1.5字元、12級字、粗體、靠左對齊

A.<u>內縮1.5字元、12級字、底線、靠左對齊</u>

三、**英文統計符號：**須用斜體字，例如*F*(1, 53) = 10.03, *t*, *F*, *M*, *SD*, *N*, *r*, *p*等。希臘字母則不要斜體，例如：α, β, ε, η。

四、**資料分析結果的有效位數須全文一致：**恆小於「1」的數值，例如*KR20*, α, *p*等統計數值的個位數字「0」請省略。

五、**誌謝與附註：**

(一) 誌謝應力求簡短扼要，置於正文之後。誌謝二字為 16 級字、粗體、置中。誌謝文另行起、第一行內縮 2 字元、12 級字。

(二) 附註應置於參考文獻之前，每項附註均另起一行，並以阿拉伯數字編號，依順序排列。

參、文獻引用格式

一、注意事項

(一) 引用文獻時，必須有作者姓名（中文作者姓名全列，英文作者僅列姓氏）及論文年份（中文文獻及英文文獻均使用西元年份）。

(二) 相同作者在同一段中重複被引用時，第一次須寫出年代，第二次以後，在不造成混淆的情況下年代可省略。若在不同段落中重複引用時，則仍須完整註明。

(三) 本文中引用之文獻必須在參考文獻中列出。

二、引用部分文獻內容

若引用特定文獻時，資料來自於特定章、節、圖、表、公式，須標明特定出處；如引用整段原文獻資料，須加註頁碼。中文以「頁」表示；西文單頁為“p.”、兩頁以上為“pp.”。

範例：吳昭容（2019，頁9）或（洪萬生，2006，頁167）
(Dubinsky, 1991, p. 102) 或 (Heath, 1956, pp. 251-252)

三、作者人數為一人、二人、三人以上或機構：

(一) 作者人數為一人

中文格式 作者（年代）或（作者，年代）
英文格式 Author (Year) 或 (Author, Year)

範例：劉柏宏（2021）或（劉柏宏，2021）
Heinz (2015) 或 (Heinz, 2015)

(二) 作者人數為二人。每次引用均須列出全部作者，在行文中，以「與」連接；在括號和參考文獻中，中文以頓號「、」，西文以“&”連接。

中文格式 作者 1 與作者 2（年代）或（作者 1、作者 2，年代）
英文格式 Author 1 與 Author 2 (Year) 或 (Author 1 & Author 2, Year)

範例：蔡政樺與秦爾聰（2021）或（蔡政樺、秦爾聰，2021）
Yang 與 Idris (2021) 或 (Yang & Idris, 2021)

(三) 作者人數為三人以上。

1. 僅需要寫出第一位作者，後面再加上「等人」或 「et al.」。
2. 若作者縮減後與其他文獻會產生混淆（第一作者與年代皆相同），請將作者逐一列出至可區辨者。
3. 若僅最後一位作者不同，則每次引用時都要將所有作者列出。

範例 1：呂鳳琳等人（2018）或 （呂鳳琳等人，2018）或 Green 等人(2014)
Sherry et al. (2010) 或 (Sherry et al., 2010)

範例 2：Hong、Hwang、Liu 等人（2014）
Hong、Hwang、Tai 等人（2014）

範例 3：Mullis、Martin、Foy 與 Arora（2012）
Mullis、Martin、Foy 與 Drucker（2012）

(四) 當作者或作者之一為機構。第一次引用應寫出機構全名，並以中括號註明慣用之簡稱，第二次之後即可使用簡稱替代。

範例：行政院國家科學委員會（國科會，2011）或（行政院國家科學委員會 [國科會]，2011）
National Science Council (NSC, 2011) 或 (National Science Council [NSC], 2011)

四、**同一作者不同著作：**在文章中引用同一作者在同一年的多篇著作時，應在年代後加註 a, b, c……以茲區別。

範例：（教育部，2009a，2009b，2009c，2009d）

五、**引用相同姓氏作者：**當兩筆西文文獻之第一作者同姓時，須引用全名，且採「名在前姓在後」方式書寫。

範例：A. J. Bishop（1985）和 E. Bishop（1970）都認為……。

六、**同時引用多筆文獻：**依作者姓名筆畫（英文用字母）排序；若同時有中英文作者，則先列中文作者。不同作者之間用分號分開，相同作者不同年代之文獻用逗號隔開年代。

範例：（陳學志、賴惠德、邱發忠，2010；Lai et al., 2013; Yen & Yang, 2016）

七、**引用翻譯文獻：**採用（原作者，原著出版年代/譯本出版年代）或原作者（原著出版年代/譯本出版年代）的標示方式。

範例：Skemp (1987/1995) 或 (Skemp, 1987/1995)

八、**間接引註：**當引用之觀念或陳述，來自第二手資料時，應將原始資料和第二手資料同時註明。在括號中首先列出原始作者與年代，接續中文以「引自」註明第二手資料之作者與年代，並說明出處頁碼；或直接引出第二手資料之文獻。

範例：（Garner, 1988，引自蘇宜芬、林清山，1992，頁246）
（引自蘇宜芬、林清山，1992，頁246）

九、**直接引述：**引文超過中文 80 字（西文 40 字），則須另起一段，並改為標楷體 10 級字，左右縮排 2 字元，與正文間前後空一行，且在引文前後無需用引號。

範例：

Schoendfeld (1992, p.335) 有一段話可以用來討論：

> 數學從其創生之始就是一種社會活動，在此活動中一群訓練有素的實踐者（數學科學家）從事組型的科學—基於觀察、研究和實驗，有系統地試圖要決定一個公理化或理論化之系統中的規律的性質和原理（此為純數學），或者從實在世界物體中抽象出來之系統的模式（此為應用數學）。數學的工具是抽象、符號表徵、和符號操作。然而學會運用這些工具，其意義乃謂一個人以數學方式思考而非如一個工匠使用工具。以數學的方式思考就是：（1）形成數學觀點—珍視數學與抽象的歷程，並偏愛其應用，（2）發展此學科的工具的能力，並應用這些工具以協助我們理解結構—數學的建構意義（mathematical sense-making）。

肆、圖與表格：

一、圖與表格均配合正文出現。圖和表格標題需分為上、下兩行，置左。圖表序在上行，以阿拉伯數字序碼，且需粗體；圖表名在下行，精簡命名，不粗體。

二、若有資料來源，應於圖表下方附加說明，同時可視需要加以註解，圖表中文字可用簡稱，若簡稱尚未約定俗成或未曾在正文中出現，則須於圖表的註解中列出全稱。

三、表格之製作以簡明清楚、方便閱讀為原則，頂端與底端採用粗線（1.5pt）繪製，中間與兩邊不必畫線。

四、每一個圖表的大小以不超過一頁為原則，如超過時，須在續表之表序後加上（續）/ (continued)，但無須重現圖表名，如：表1（續）或 Table 1 (continued).。

五、圖和表格內容若有解釋的必要，可作註記。註記與圖表之左邊界切齊，列在圖、表之下方，每註另起一行，按編號順序排列，句末須句號。

(一) 一個註解：中文稿件以「註：」表示；英文稿件以「*Note.*」表示（*Note.*為斜體）。

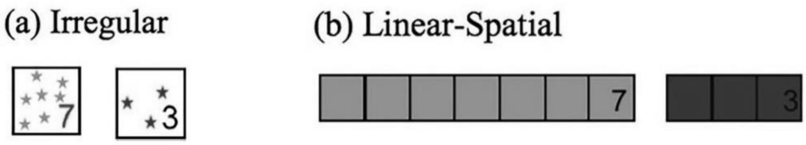
(二) 一個註解以上，註解順序依序為：

1. 一般註解：限定、解釋或提供表、圖的相關資訊（以「註」表示）。
2. 特別註解：特定的某個直欄、橫欄或個別的條目有關（以上標「a、b、c」分段表示）
3. 機率註解：指出顯著性考驗的結果（以「$^*p < .05$. $^{**}p < .01$. $^{***}p < .001$.」表示）。

圖例：

圖 2

兩種不同的表徵(a)不規則排列的表徵(b)線性排列的表徵



引自 “Materials count: Linear-spatial materials improve young children's addition strategies and accuracy, irregular arrays don't,” by J. Schiffman and E. V. Laski, 2018, *Plos One*, *13*(12), p. 4.

表例：

表2

實驗教學前兩組學生的作文成績比較（獨立*t*考驗）項目

項目	控制組		實驗組		兩組平均差[c]	*t*值
	平均數	標準差	平均數	標準差		
內容[a]	5.25	1.03	3.73	1.08	1.52	4.57***
組織[a]	5.23	.95	3.85	1.07	1.38	4.31***
文法[a]	5.44	1.08	4.17	1.18	1.27	3.53*
語辭[a]	5.39	1.08	4.15	1.13	1.24	3.55**
整體[b]	21.32	3.81	15.90	4.18	5.42	4.28***

註：控制組與實驗組受試者各20名。

[a] 各項目的滿分為10。

[b] 整體分數為四個分項的得分加總。

[c] 兩組平均差＝控制組平均數－實驗組平均數。

*p <.05. **p < .01. ***p < .001.

伍、參考文獻格式

一、注意事項

(一) **排序方式：**正文中引用過之文獻，必須全部列舉在參考文獻內，且不得列出未引用之文獻。中文文獻依作者姓氏筆畫順序排列，外文文獻則依作者姓氏字母順序排列。每個作者第一行由第一格開始寫，第二行中文內縮三個字；英文內縮六個字母。

(二) **標點符號：**中文文獻應使用全形的標點符號，英文文獻則使用半形的標點符號，在半形標點符號後須空一格半形空格書寫。

(三) **英文名稱之大小寫：**期刊篇名與書名除了第一個、冒號之後或專有名詞之第一個字母大寫外，其餘均使用小寫。期刊名稱除了介系詞與連接詞外，每個字的第一個字母大寫。

(四) **中文姓名英譯寫法：**中文姓名的英譯若有”-”（例如：Li-Li Huang），則寫法為Huang, L.-L.；若沒有（例如：Lung Hung Chen），則寫法為Chen, L. H.。此部分請作者在投稿前自行確認原始參考文獻為何種用法。

(五) **多人文章**

1. 作者為一到二十位：須全列出作者姓名，如果為英文文獻，須在最後一位作者前加上「&」。
2. 二十一位（含）以上作者群：僅列出前十九位與最後一位作者姓名，中間以「…」連接。

(六) **接受刊登之稿件**

1. 作者應提供參考文獻之數位物件辨別碼（DOI），格式請使用「https://doi.org/xxxxx」。
2. **中文參考文獻皆須英文化**，附加於該筆中文文獻之後，並置於方頭括號 [ ] 內。
3. 若中文參考文獻已有相對應英文翻譯，請以現成的英文意譯為主；沒有相對應英文翻譯時，有些作者姓名在學術界已有慣用拼法，有些名詞（如：數學）也已有通行或正式的拼法，請採用通行或官方拼法，請勿自行音譯。

二、期刊論文

(一) 已發表：

中文格式

作者名（年代）。篇名。**期刊名，卷數**（期數），頁數。[Author, A. A. (Year). Title of article. *Title of Periodical, xx*(xx), xxx–xxx.] https://doi.org/xxxxx

英文格式

Author, A. A. (Year). Title of article. *Title of Periodical, xx*(xx), xxx–xxx. https://doi.org/xxxxx

範例：

蔡文榮、張鈞淇、劉柏宏（2019）。臺灣學術界數學史研究之現況分析與建議：以 1992 年至 2017 年學位論文為例。**臺灣數學教育期刊，6**（1），27–51。[Tsai, W.-J., Chang, C.-C., & Liu, P.-H. (2019). Analysis of current state and recommendations for HPM research in Taiwan: The case of theses and dissertations from 1992 to 2017. *Taiwan Journal of Mathematics Education*, *6*(1), 27–51. (in Chinese)] https://doi.org/10.6278/tjme.201904_6(1).003

(二) 已接受，未發表

中文格式

作者名（付梓中）。篇名。**期刊名**。[Author, A. A. (in press). Title of article. *Title of Periodical.*]

英文格式

Author, A. A. (in press). Title of article. *Title of Periodical.*

範例：

張子貴（付梓中）。數學系學生對函數極限的錯誤認知與解題困境。**臺灣數學教育期刊**。[Chang, T.-K. (in press). Math Students' Misunderstandings and Obstacles in Learning Limits of Functions. *Taiwan Journal of Mathematics Education.* (in Chinese)]

三、未出版碩博士論文

中文格式

作者名（年代）。**論文名**（未出版博士/碩士論文）。學校名稱。[Author, A. A. (Year). *Title of article* (Unpublished doctoral dissertation/master's thesis). Name of Institution. (in Chinese)]

英文格式

Author, A. A. (Year). *Title of article* [Unpublished doctoral dissertation/master's thesis]. Name of Institution.

四、**學術研討會論文**

(一) 未出版：

中文格式

作者名（年代，日期）。**篇名**（壁報/口頭發表論文）。研討會名稱，舉辦城市，國家。[Author, A. A. (Year, Month Day). *Title of contribution* (Paper presentation/Poster presentation/Symposium presentation). Conference Name, Location, Country. (in Chinese)] 研討會議程網址

英文格式

Author, A. A. (Year, Month Day). *Title of contribution* [Paper presentation/Poster presentation/Symposium presentation]. Conference Name, Location, Country. https://xxxxx

(二) 有出版：

1. 期刊：與「期刊論文」相同格式，請見第二項。
2. 書：與「編輯書」相同格式，請見第六項。

五、**專書**

中文格式

作者名（出版年）。**書名**。出版社名稱。[Author, A. A. (Year). *Book Title*. Publisher Name. (in Chinese)] https://doi.org/xxxxx

英文格式

Author, A. A. (Year). *Book Title*. Publisher Name. https://doi.org/xxxxx

六、**編輯書：**主編只有一位時用「(Ed.)」，兩位以上用「(Eds.)」。

中文格式

主編名（主編）（出版年）。**書名**。出版社。[Author, A. A. (Ed./Eds.). (Year). *Book title*. Publisher Name. (in Chinese)] https://doi.org/xxxxx

英文格式

Author, A. A. (Ed./Eds.). (Year). *Book title*. Publisher Name. https://doi.org/xxxxx

七、**書籍中的專章：**英文專書主編「名字」縮字放在「姓」之前。

中文格式

作者名（出版年）。章節名稱。載於主編單位/主編名（主編），**書名**（頁 xx–xx）。出版社名稱。[Author, A. A. (Year). Title of chapter. In E. E. Editor (Ed./Eds.), *Book title* (pp. xx–xx). Publisher Name. (in Chinese)] https://doi.org/xxxxx

英文格式

Author, A. A. (Year). Title of chapter. In E. E. Editor (Ed./Eds.), *Book title* (pp. xx–xx). Publisher Name. https://doi.org/xxxxx

八、**翻譯作品：**若為中文譯本，其文獻須列於中文文獻最前面，如有兩筆以上翻譯文獻，依照英文字母排序，但若譯本有將原作者名翻譯為中文者，須使用其中文名，依筆劃，插入中文文獻之內；若沒有則維持原作者名。

中文格式

原作者名/譯名（翻譯本出版年代）。**翻譯書名**（譯者名，譯）。譯本出版社。（原著出版於 xxx 年）[Author, A. A. (Year). *Book title* (Translator, Trans.). Publisher. (Original work published Year) (in Chinese)]

英文格式

Author, A. A. (Year). *Book title* (Translator, Trans.). Publisher. (Original work published Year)

範例1：

Struik, D. J.（2014）。**數學史**（吳定遠，譯）。水牛。（原作出版於 2012 年）[Struik, D. J. (2014). *A Concise History of Mathematics*. (Wu, D.-Y., Trans.). Buffalo Book Company. (Original work published 2012) (in Chinese)]

範例2：

赫爾曼（2009）。**數學恩仇錄**（范偉，譯）。博雅書屋。（原作出版於 2006 年）[Hellman, H. (2009). *Great feuds in mathematics: Ten of the liveliest disputes ever* (Fan, W., Trans.). Goodness Publishing House. (Original work published 2006) (in Chinese)]

九、**研究計畫報告：**若沒有計畫編號或網址，則無須填寫。當機構名稱與出版單位相同時，可省略出版單位。

中文格式

機構名稱或作者名稱（年代）。**篇名**（計畫編號：xxx）。出版單位。[Name of Group. (Year). *Title of report* (Report No. xxx). Publisher name. (in Chinese)] 計畫網址

英文格式

Author/Name of Group. (Year). *Title of report* (Report No. xxx). Publisher name. https://xxxxx

十、**網路資訊：**檢索時間不需列出，除非該網路資料經常變動。括弧內日期為文章登錄於網站上的日期，如無日期可查，中文文獻則在括弧內註明為（無日期），英文文獻註明為 (n.d.)。日期可用形式為（年代）、（年月）、（年月日）、（無日期）。

中文格式

作者/單位名（年月日）。**篇名**。網站名稱。[Author, A. A. (Year, Month Day). *Article title.* Website Name. (in Chinese)] 網址

英文格式

Author, A. A. (Year, Month Day). *Article title.* Website Name. http://xxxxx

範例：

國教署（2020 年 12 月 8 日）。**臺灣參加國際數學與科學教育成就趨勢調查（TIMSS 2019）成果發表**。教育部全球資訊網。[K-12 Education Administration. (2018, December 8). *The report of trends in international mathematics and science study 2019 for Taiwan*. Taiwan Ministry of Education. (in Chinese)] https://www.edu.tw/News_Content.aspx?n=9E7AC85F1954DDA8&s=B822E38553C1D561

《臺灣數學教育期刊》投稿基本資料表

<table>
<tr><td rowspan="2" colspan="2">篇名</td><td colspan="3">(中文)</td></tr>
<tr><td colspan="3">(英文)</td></tr>
<tr><td colspan="2">總字數</td><td colspan="3">稿件全文 (含中英文摘要、正文、參考文獻、附錄等) 共________字。</td></tr>
<tr><td rowspan="2" colspan="2">關鍵詞(最多五個)</td><td colspan="3">(中文)</td></tr>
<tr><td colspan="3">(英文)</td></tr>
<tr><td colspan="2">頁首短題
(running head)</td><td colspan="3">(請以不超過15個中文字或40個英文字元為原則。)</td></tr>
<tr><td rowspan="9">通
訊
作
者
資
料</td><td>姓名</td><td>(中文)</td><td colspan="2">(英文)</td></tr>
<tr><td>職稱</td><td colspan="3"></td></tr>
<tr><td rowspan="2">服務單位
(或就讀校系)</td><td colspan="3">(中文)</td></tr>
<tr><td colspan="3">(英文)</td></tr>
<tr><td>E-mail</td><td colspan="3"></td></tr>
<tr><td>通訊地址</td><td colspan="3"></td></tr>
<tr><td rowspan="2">電話</td><td colspan="3">辦公室：(　　)　　　　　　　　分機</td></tr>
<tr><td colspan="3">行動電話：</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="4">如為共同著作，請詳填以下共同著作人欄位，非共同著作則不需填寫。(以下欄位不敷填寫時請自行增加)</td></tr>
<tr><td>共同著作人</td><td>姓名</td><td>服務單位(或就讀校系)</td><td>職稱</td></tr>
<tr><td rowspan="2">第一作者
(☐通訊作者)</td><td>(中文)</td><td>(中文)</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>(英文)</td><td>(英文)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">第二作者
(☐通訊作者)</td><td>(中文)</td><td>(中文)</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>(英文)</td><td>(英文)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">第三作者
(☐通訊作者)</td><td>(中文)</td><td>(中文)</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>(英文)</td><td>(英文)</td></tr>
<tr><td>作者註
(可複選)</td><td colspan="3">☐ 本篇論文為碩、博士論文改寫，指導教授為______________。
☐ 本篇論文曾於______________發表。
☐ 本篇論文獲國科會補助，計劃編號：______________。</td></tr>
<tr><td colspan="4">1.茲保證本論文符合研究倫理。
2.茲保證所填基本資料正確，文稿未曾以任何方式出版或發行，且無一稿多投、違反學術倫理，或違反著作權相關法令等事情。
3.茲瞭解並同意貴刊著作權授權規範，並保證有權依此規範進行相關授權。
4.茲保證文稿已經所有作者同意投稿至《臺灣數學教育期刊》。
填表人：______________________　　　　　填表日期：______年______月______日</td></tr>
</table>

《臺灣數學教育期刊》著作財產權讓與同意書

茲同意投稿至國立臺灣師範大學數學系與台灣數學教育學會共同發行的《臺灣數學教育期刊》之一文，名稱為：

____

立書人聲明及保證本著作為從未出版之原創性著作，所引用之文字、圖表及照片均符合著作權法及相關學術倫理規範，如果本著作之內容有使用他人以具有著作權之資料，皆已獲得著作權所有者之（書面）同意，並於本著作中註明其來源出處。著作人並擔保本著作未含有毀謗或不法之內容，且絕未侵害他人之智慧財產權，並同意無償授權國立臺灣師範大學數學系與台灣數學教育學會於本著作通過審查後，以論文集、期刊、網路電子資料庫等各種不同方法形式，不限地域、時間、次數及內容利用本著作，並得進行格式之變更，且得將本著作透過各種公開傳輸方式供公眾檢索、瀏覽、下載、傳輸及列印等各項服務。國立臺灣師範大學數學系與台灣數學教育學會並得再授權他人行使上述發行之權利。惟著作人保有下列之權利：

1.本著作相關之商標權及專利權。

2.本著作之全部或部份著作人教學用之重製權。

3.出版後，本著作之全部或部份用於著作人之書中或論文集中之使用權。

4.本著作用於著作人受僱機關內部分送之重製權或推銷用之使用權。

5.本著作及其所含資料之公開口述權。

著作人同意上述任何情形下之重製品應註明著作財產權所屬，以及引自《臺灣數學教育期刊》。

如果本著作為二人以上之共同著作，下列簽署之著作人已通知其他共同著作人本同意書之條款，並經各共同著作人全體同意，且獲得授權代為簽署本同意書。如果本著作係著作人於受僱期間為雇用機構所作，而著作權為讓機構所有，則該機構亦同意上述條款，並在下面簽署。

本著作之著作財產權係屬（請勾選一項）

☐ 著作人所有

☐ 著作人之僱用機構所有

立同意書人（著作人或僱用機構代表人）簽章：______________________

著作人姓名或僱用機構名稱：______________________

（正楷書寫）

中華民國　　年　　月　　日

《臺灣數學教育期刊》編審辦法

2013.04.03 編審委員會會議通過

壹、《臺灣數學教育期刊》（以下簡稱本刊）之審查包括預審、正式審查兩個階段：

一、預審：檢視來稿是否符合本刊稿約之宗旨、論文品質以及進行論文格式之審查；

二、正式審查：審查委員與投稿者採雙向匿名方式進行。主編就審查委員的回覆意見及論文品質決定接受或拒絕文稿，或是需要作者修改後再進行審查或檢核。需要「修正後再審」之稿件，交原審查委員或委由主編委任進行再審。所有文稿最後須經編輯委員會審查通過後，方能刊出。

稿件之最終審查決定以投稿後六個月內完成並通知作者。

貳、審查委員針對稿件之學術原創性、正確性及價值等條件從嚴審查，以確保所刊文稿的品質。審查委員可提供作者具建設性的修改建議，以利文稿的修正及品質提昇，並以下列其中一種的刊登建議回覆：

一、「同意刊登」：論文不需要修改可作原稿刊登。

二、「修正後刊登」：通知作者依審查意見修改或答辯後刊登。

三、「修正後再審」：要求作者依審查意見修改或答辯，修正稿由編輯委員會送原審查委員或委由主編委任進行再審。

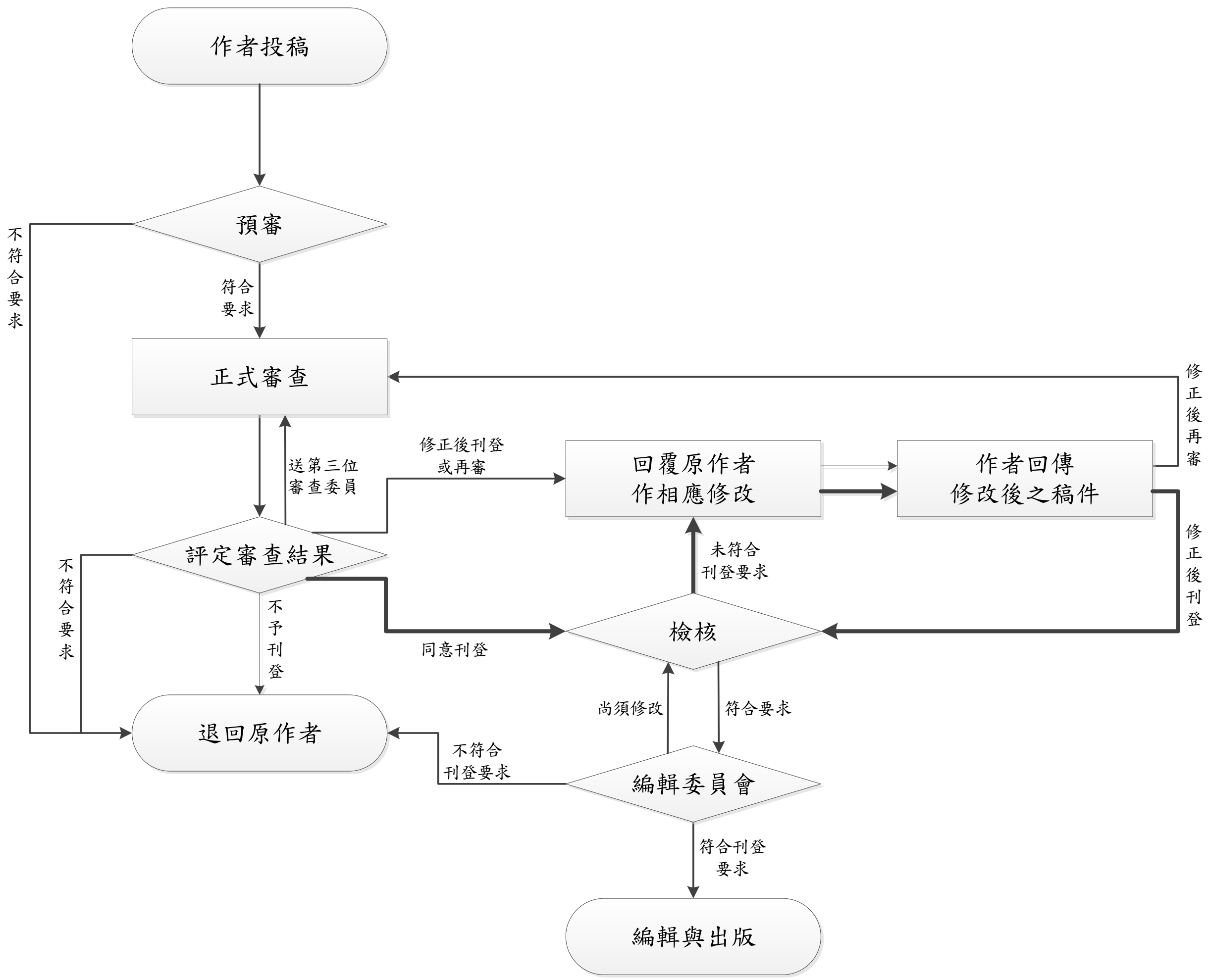
四、「不宜刊登」：通知作者退稿。

稿件審查的時間以三週為限，若超過期限，編輯委員會將去函提醒審查委員儘速審查，若逾六週審查者仍未寄回審查意見，則編輯委員會得再聘請另一位審查者取代之。每位審查者皆為無償審查，但會在每年第二期期刊中列名致謝。

參、本刊主編、副主編或編輯委員如投稿本刊，該委員應迴避推薦審查委員名單、參與審查結果決定之討論或經手處理與個人稿件有關的資料(包括審稿者資料、推薦審查委員名單、審稿意見等)。

肆、本刊預計每年四月和十月出版，稿件刊登順序由主編原則上依文稿性質與投稿時間之先後次序決定之，而第一作者的文稿以一篇為限，超過篇數之稿件留至下期刊登。

伍、本刊稿件之編審流程如下圖所示：


作者投稿
預審
不符合要求
符合要求
正式審查
送第三位審查委員
修正後刊登或再審
回覆原作者作相應修改
作者回傳修改後之稿件
修正後再審
評定審查結果
不符合要求
不予刊登
同意刊登
未符合刊登要求
修正後刊登
檢核
尚須修改
符合要求
退回原作者
不符合刊登要求
編輯委員會
符合刊登要求
編輯與出版

Taiwan Journal of Mathematics Education Vol. 10, No. 2 October, 2023

Publisher | Department of Mathematics, National Taiwan Normal University
Taiwan Association for Mathematics Education

Address | No.88 Sec. 4, Ting-Chou Rd., Taipei City, Taiwan, R.O.C.
Department of Mathematics, National Taiwan Normal University
"*Taiwan Journal of Mathematics Education*"
TEL | 886-2-7749-3678
FAX | 886-2-2933-2342
E-mail | TJME.taiwan@gmail.com
Website | http://tjme.math.ntnu.edu.tw/contents/contents/contents.asp?id=21