ISSN: 2312-5810
DOI: 10.6278/tjme

第 11 卷　第 1 期
二〇二四年四月
VOL. 11　NO. 1
April　2024

臺灣數學教育期刊
Taiwan Journal of Mathematics Education

國立臺灣師範大學數學系
Department of Mathematics,
National Taiwan Normal University

台灣數學教育學會
Taiwan Association
for Mathematics Education

臺灣數學教育期刊　第 11 卷 第 1 期　2024 年 4 月

發行單位　國立臺灣師範大學數學系
台灣數學教育學會

地址　臺北市汀州路四段 88 號國立臺灣師範大學數學系
《臺灣數學教育期刊》
電話　886-2-7749-3678
傳真　886-2-2933-2342
電子郵件　TJME.taiwan@gmail.com
網址　http://tjme.math.ntnu.edu.tw/contents/contents.asp?id=21

主編的話

第 11 卷 第 1 期　2024 年 4 月

本期是《臺灣數學教育期刊》第 11 卷第 1 期了。在過去十個年頭裡，有將近 160 篇的文稿投入本刊，經過至少兩名專家審查、文稿責編的協助，以及編輯委員會議討論後，共接受刊出 59 篇論文。臺灣數學教育社群雖然不大，但持續有這麼多作者用心整理研究成果，又得感謝有三百多人次的審查者貢獻心力、甚至無償審查，扶持本刊朝向為臺灣數學教育學術創建具指標性的發表平台前進。

回顧這 59 篇論文，以中文發表、實徵論文為主，而研究的主要對象以國小生和國中生最多，數學主題以 12 年國民基本教育階段的幾何或代數較多，研究方法相當多元，其中以探討介入效果為大宗（共 25 篇）：

- 中文論文 53 篇、英文論文 6 篇。
- 實徵論文 51 篇、回顧性論文 8 篇。
- 幼兒 2 篇、國小生 12 篇、國中生 18 篇、高中職生 7 篇、大學生 8 篇、教師 8 篇。
- 數與量 8 篇、幾何 17 篇、代數 12 篇、統計與機率 2 篇、微積分等高等數學 4 篇。
- 有控制組的實驗法 16 篇、單組前後測（含行動研究、單一受試者設計）9 篇、相關與預測 7 篇、內容分析（含數學史文件分析）9 篇、個案及質性研究 11 篇。

這十年本刊發行了兩次專刊。2021 年四月的第 8 卷第 1 期由劉柏宏客座主編主持【數學文化與教育專刊】，收錄了三篇文章；劉主編並應邀撰寫「學術瞭望」一篇，探討數學文化與數學教育的關係。2022 年十月的第 9 卷第 2 期由林素微客座主編主持【從 PISA 視角檢視台灣數學的教與學專刊】，收錄了四篇文章，林主編應邀撰寫「書評」介紹 Assessing mathematical literary: The PISA experience 一書，從 PISA 的經驗檢視數學教育研究取徑。由於專刊具有使編輯和學者集中探討特定主題、快速出版，以及增加期刊影響力的優點，本刊將持續推出專刊徵稿。目前有【數學教育新視角】專刊徵求應用新興研究技術的論文，以及【遇見數學素養】專刊徵求以數學素養為主題的教學、學習、師培研究的論文，歡迎學者們踴躍投稿。

本刊第 11 卷第 1 期刊登兩篇文章，分別是謝豐瑞、吳原榮，和吳嵐婷探討國中生創造思考表現的論文，以及蘇意雯和宮川健從日本古文本轉置並發展為大學課程的實作發現。第一篇文章聚焦在近年來頗受關注的數學創造力議題上。雖然國小階段數學創造力的評量方法與研究發現較多，國中數學創造力的問題該怎麼設計，仍需要學者投入研究。謝豐瑞等人以國中階段文字符號運算發展的數學創造力問題，並從形成、應用、詮釋等三個數學過程來設計子題，是該文值得學者參考的特色。第二篇文章則從日本古文本蟲蛀算發展出大學數學史的解題與擬題活動，並以 Yves Chevallard 教學人類學的行知模型分析大學生對課堂數學活動的回應。這篇文章顯示學生確實對數學史融入的教學有高興趣，且引介的教學人類學理論也頗具參考價值。

《臺灣數學教育期刊》主編

吳昭容 謹誌

臺灣數學教育期刊

第 11 卷　第 1 期

2014 年 4 月創刊　　2024 年 4 月出刊

目錄

Taiwan Journal of Mathematics Education

Vol. 11 No. 1

First Issue: April 2014 Current Issue: April 2024

CONTENTS

謝豐瑞、吳原榮、吳嵐婷（2024）。
國中生數學符號運算素養的創造思考表現。
臺灣數學教育期刊，**11**（1），1–36。
doi: 10.6278/tjme.202404_11(1).001

國中生數學符號運算素養的創造思考表現

謝豐瑞　吳原榮　吳嵐婷
國立臺灣師範大學數學系

本研究從二維面向探測一般國中生在解決國中層級文字符號運算的素養導向題目時創造思考的表現，其中一維乃數學過程，含形成、應用、詮釋三個過程，另一維乃創造思考，含流暢性、變通性、獨創性三個指標。研究樣本採立意抽樣，由台灣 4 所學校 32 個班級 8 年級學生中隨機抽取共 210 位學生參與研究。研究採問卷調查法，以與實際生活相關的情境設計開放性問題，題目設計以激發學生創造思考力為標的，每個題目都可以有無限多個可能的適當答案。研究結果發現，在形成、應用、詮釋這三個數學過程中，學生在各創造思考指標表現皆依流暢性、變通性、獨創性的順序下降。針對流暢性思考，學生在各數學過程表現差異不大；針對變通性思考，學生在詮釋階段表現最佳，針對獨創性思考，學生在形成階段表現最佳。本研究另發現當學生被鼓勵提出具有高差異度和獨特性的答案時，許多學生展現出色的結合元素產生新產品的創造思考力，提供了遠超出預期的創新答案。

關鍵字：形成、詮釋、數學創造思考、數學過程、應用

通訊作者：吳原榮，e-mail：jongmath@gmail.com
收稿：2024 年 2 月 17 日；
接受刊登：2024 年 4 月 12 日。

Hsieh, F. J., Wu, Y. J., & Wu, L. T. (2024).
Middle school students' performance in creative thinking of the literacy-oriented mathematical symbolic operations.
Taiwan Journal of Mathematics Education, *11*(1), 1–36.
doi: 10.6278/tjme.202404_11(1).001

Middle School Students' Performance in Creative Thinking of the Literacy-oriented Mathematical Symbolic Operations

Feng-Jui Hsieh Yuan-Jung Wu Lan-Ting Wu
Department of Mathematics, National Taiwan Normal University

This study developed a two-dimensional framework to examine the performance of creative thinking of general middle school students in solving literacy-oriented problems of symbol operations with unknown variables. The first dimension is the mathematics process, including formulate, employ, and interpret. The second dimension contains three indicators of creative thinking: fluency, flexibility, and originality. This study adopts purposive sampling, and a total of 210 students from 8th grade students in 32 classes from 4 schools in Taiwan were randomly selected to participate in the study. This study uses a questionnaire survey method. Open-ended questions are designed based on real-life situations. The questions are designed to stimulate students' creative thinking, and each question can have infinite possible appropriate answers. The results showed that in the process of formulate, employ, and interpret, the performance of students in each process decreased in the order of fluency, flexibility, and originality. For fluency, there was little difference in students' performance across mathematics processes. For flexibility, students performed best in the interpret process. For originality, students performed best in the formulate process. The study also found that when students were encouraged to come up with highly differentiated and unique answers, many students demonstrated excellent creative thinking skills in combining elements to produce new products, providing novel answers that far exceeded expectations. innovative answers that far exceeded expectations.

Keyword: formulate, interpret, mathematical creative thinking, mathematics process, employ

Corresponding author：Yuan-Jung Wu，e-mail：jongmath@gmail.com
Received：17 February 2024;
Accepted：12 April 2024.

壹、緒論

美國 Partnership for 21st century skills（2011）公布的 21 世紀數學技能地圖中，第一個技能就是創造與創新（Creativity and Innovation）。我國教育部也明確指出應在學校課程中培養學生創造力。經濟合作暨發展組織（Organisation for Economic Cooperation and Development [OECD]）最新舉辦的 2022 年國際學生能力評量計畫（Programme for International Student Assessment [PISA]）更將創造力納入數學素養評量架構中（OECD, 2023）；可惜的是，PISA 2022 並未根據創造力命題，而只是將之做為配角在命題時融入，不過在 OECD 為 2030 年數學素養評量做準備的計畫中，創造力不再是配角，而是作為主角來分析數學課程（Schmidt et al., 2022）。鑒於數學創造力日益重要的趨勢，本研究認為應從前瞻的觀點，在數學素養的評量上根據創造力進行命題，進而探測學生在素養題型上的創造力。針對創造力、數學創造力，學界已有豐富的研究探討，然而針對素養導向的數學創造力，則仍是一個貧瘠待開發的領域。

貳、文獻探討

一、學校教育中的創造力與數學創造力

創造力的概念在 Guilford（1950）大力提倡下開始被廣泛重視，但及至目前為止學界對其內涵與探測結構仍未有一致的共識（劉宣谷，2015；Mann, 2006; Sriraman, 2005）。從創造力的內涵來看，學者普遍認為新穎與有用是創造力最重要的內涵，也是創造力與其他相近概念（例如想像力）在根本上最大的不同（Amabile & Tighe, 1993; Barron, 1955; Guilford, 1950; Stein, 1953），而新穎與有用的判定在學校教育中與社會或專業領域中有所不同。OECD（2023）提出，在學校教育中通常會期望「創造力不是對世界來說是新穎的，而只是對學生來說是新穎的，或是超出預期表現的」而有用的標準則是從是否「適當的」（appropriate）來看。這樣的看法與 Kaufman 與 Beghetto（2009）提出的大 C（Big- C）和小 c（Little- c）看法相同，大 C 關注的是卓越創造力，是在社會或專業領域中產生可能永久改變社會或某一領域的新穎產品，而小 c 則關注日常創造力，即大多數人都能體驗和表達的創造行為，也是普通學校教育中可以發展的能力。小 c 的觀念與 Cropley（1992）所提的觀念雷同，Cropley 認為在教育現場中「獲得想法的能力，尤其是原創的、發現的和新穎的想法」（p. 6），這種看法著重在創造思考（creative thinking），在論及學校教育中的創造力時，學界往往視「創造力」與「創造思考」為同義詞（Guilford, 1956）。

Guilford（1956, 1968）在創造力內涵上做出了巨大的貢獻，他提出的智力結構（Structure of Intellect）包含了二大類：思考（thinking）與記憶（memory），創造思考乃其中一重要部分，他提出發散產出（divergent-production）這種產生大量不同想法或答案的思考與創造思

考習習相關。Cropley（1992）延續類似的想法，認為在學校教育中，創造思考的本質就是發散思考，Volle（2018）與 Sternberg（2003）認為發散思考來源於概念間的新聯結，是一種再生性思考形式，他們所強調的聯結或再生概念與 Mednick（1962）及 Poincaré（1952）所強調創造/發現中的組合性有共同的核心思想，乃將創造視為一種結合不同元素或想法，產生有用或符合要求的新組合產物的過程，結合的元素或想法彼此關聯越遙遠則創造性越高。綜上所述，學校教育中創造思考在內涵上可視為一種透過結合遠端元素或想法產生發散性思考，進而產生新穎且適當產品的能力。

在創造思考的探測架構上，Guilford（1956）也做出了巨大的貢獻。他在描述發散產出思考時，提出發散產出思考包含了「流暢性」（fluency）、「變通性」（flexibility）、「獨創性」（originality），和「精進性」（elaboration）。在 1956 年的文章中他也指出對問題的「敏覺性」（sensitivity）能力為發現（discover）的一個重要因素。後繼諸多學者常以此五項思考能力中的某幾項作為探測學生創造力的指標架構（Torrance, 1970; Williams et al., 1971），這樣的做法顯示學界普遍認同發散思考（divergent thinking）雖然不是創造力的同義詞，但乃是衡量創造思考能力的一項良好估計（Albert & Runco, 1998; Haylock, 1987a）。

以上述五項指標作為學校教育中創造思考的探測架構仍需面對如何界定這些指標的問題。學界多以快速連續產生思考的能力來表示流暢性，產生多類型思考的能力來表示變通性，產生新穎獨特思考的能力來表示獨創性，產生能改善或擴展想法的思考能力來表示精進性，評論問題或解法的能力來表示敏覺性（Hollands, 1972; Kim et al., 2013）。在這五個指標上，以採用前三個指標（例如：彭淑玲等人，2015；Haylock, 1987b; Kim et al., 2004; Lee et al., 2003; Leikin, 2009; Leikin & Lev, 2013; Mann, 2005; Molad et al., 2020）或前四個指標（例如：林碧珍，2020；Guilford, 1956）為學界較常使用的做法。

對於創造力究竟屬於一般性的能力，或是與特定領域（例如：數學）相關的能力之問題，兩者都各有支持的學者（Schoevers et al., 2020）。在學校教育階段，越來越多的研究結果支持創造力、數學創造力、數學能力是相關（正相關）但不相同的能力（Jeon et al., 2011; Kattou et al., 2013; Leikin, 2013）。雖然學者認為數學創造力有其自我的地位，但如同一般創造力的情況，它仍沒有一致認可的定義（Mann, 2005; Sriraman, 2005）。研究數學創造力的學者在界定數學創造力時，往往會同時兼顧數學能力與創造力（Schoevers et al., 2020）。有的學者界定數學創造力為數學解題進路中剖析、區辯相似性和差異性的能力（Laycock, 1970）；有的學者認為數學創造力是結合舊數學觀念產生新數學組合或發現數學事實間的關係之能力（Ervynck, 2002）；有的學者主張數學創造力是啟動發散思考產生多元新穎數學解答的能力（Silver, 1997）。綜上所述，當從解題的角度來看時，數學創造思考能力可視為在數學領域中透過結合遠端元素或想法產生發散思考，進而得出多元新穎而適當數學解答的能力。

二、數學創造力評量

早期針對 K-12 數學創造力的評量，主要聚焦於數學資優生，其中以 Krutetskii（1976）研究資賦優異學生最具代表性，Krutetskii 認為數學創造力是一種解釋和概括數學問題的能

力，涉及變通性思考、找出數學結構以發展多元解題策略的能力，並據此設計了許多題目，例如，訊息不足或有多餘訊息的題目。Sriraman（2005）認為數學創造力非專屬於資賦優異生，針對一般學生來說，是一種能對數學問題或類題產生非尋常（新穎）、具洞察力的解答過程。針對一般學生的創造力評量上，學者通常應用發散思考測驗來評估發散思考的產物（Haylock, 1997; Leikin, 2009; Sari & Hidayat, 2019; Silver, 1997）。這些測驗的共同特質是所有問題或任務都可有多樣化回應的空間以提供學生自由表達想法的機會（Haylock, 1987b; Krosnick, 2018）。

在評量數學創造力的問題類型上，Haylock（1987a）提出了三種在研究上常用的問題類型：問題解決（problem solving），一題多解、重新定義（redefinition）、和擬題（problem posing）。臺灣目前關於數學創造力的研究，大都採用 這些題型，且研究較聚焦於國小階段（例如：吳昭容、陳如珍，2008）。近年來，以素養試題來探測創造力研究思想開始萌芽，Novita 與 Putra（2016）讓 10 位小學六年級學生解類似 PISA 題目的數學問題，以此來探測此類題目是否能提高學生解決問題時的創造力，結果顯示類似 PISA 題目的問題有助刺激學生解題時的創造思考。此研究的立場是在解類似 PISA 這種真實問題情境時，單純的數學知識已不足以解題，因而需要新的想法或「認知跳耀」（cognitive jump）這種具創造性或發散性的思考才能解題，故研究並未特別根據創造力命題。

臺灣在數學創造力的實徵研究尤其稀少，許多學者的研究以國小學生為主（吳昭容、陳如珍，2008；林碧珍，2020；陳李綢，2006；陳嘉皇，2005）。針對國中數學創造力的研究，彭淑玲等人（2015）在其有關發散性思考研究這部分，探究研究工具的有效性，並建立台灣學生常模。針對發散性思考指標計分，該研究在流暢性、變通性上分別依正確答案個數、類別數給分，前者得分介於 0~40 分，後者介於 0~24 分；獨創性則依學生答案落在全體答案出現頻率範圍給分，落在全體答案 5%以上、2%~2.99%、1.99%以下分別給 0、1、2 分，將各題得分加總為獨創性分數。此部分研究結果顯示研究工具對於評測個體流暢性、變通性、與獨創性之表現具理想校度。可惜的是此研究結果著重在效度、信度、效標關聯度等等計量，而未把焦點放在學生的創造內容表現上，同時使用的題目如九點區域（給上下左右相距為 1 的 3×3=9 個點，要學生在其上畫出面積為 2 的圖形）等，牽涉到的數學概念乃國小層級的概念。

綜上所述可知目前臺灣關於數學創造力的實徵研究以國小學生為主，對於國中層級的研究則未使用國中層級的數學，題目的設計上也並未考量目前國際所著重的素養觀點。

三、PISA 數學素養問題解決過程與數學符號表徵

由上述文獻探討可知，數學創造思考的評量往往是以數學問題/任務解決來執行，當代國際最大規模數學問題/任務解決評量應屬 OECD 舉辦的 PISA 數學素養評量（OECD，2023），PISA 2022 認為數學素養是個體在三個數學過程：形成（formulate）、應用（employ）、詮釋（interpret）中進行數學推理以解決真實生活情境問題的能力。數學過程會因數學不同領域而有不同的樣貌，Douglas 等人（2020）提出，數學中的符號具有傳達功能，並有助表

達數學思考、形成新概念、進行多重分類、解釋、反思性思考等。Azis 與 Nurlita（2017）與 Woodrow（1982）認為理解和操作數學符號通常需要推理和邏輯推斷，這是數學能力的重要組成部分。PISA 也同時認為應在基礎數學概念如數量、代數、抽象與符號表徵中進行數學推理與解題（OECD, 2023, p. 50）。本研究檢視我國的 108 數學課程內容發現國中階段有 75%的小節牽涉到數學符號運算，顯示其在此階段的重要性。

綜合上述文獻探討可知，對於增進國中生數學創造力表現的教材研發或建立適合我國學生的數學創造力評量工具的相關研究缺乏，且仍未有以 PISA 數學素養中生活情境問題命題的研究，同時在解決數學問題/任務上並未考量素養導向的數學過程。

四、研究目的與架構

本研究擬從二維面向探測一般國中生（不含資優生）的創造思考表現，其中一維乃創造思考，另一維乃數學過程。關於創造思考，本研究採用 Leikin（2009）、Leikin 與 Lev（2013）與 Silver（1997）使用的結構，即創造思考包含三個指標：流暢性、變通性、獨創性，其中流暢性著重於產生多個想法的能力，變通性強調產生多類型想法的能力，而獨創性則突顯產生新穎獨特想法的能力。

關於數學過程，本研究採用了 PISA 2022 數學素養評量界定，包含形成、應用和詮釋三個數學過程；其中形成過程指的是生成數學方式來表達情境脈絡中的狀況；應用指的是使用概念、過程、事實、推理來解決情境脈絡中的問題；詮釋指的是評鑑與解釋數學結果[1]（OECD, 2023）。

在數學內容的選取上，則選用我國國中課程重視之數學運算符號。

本研究的目的在探測一般國中生在符號運算的數學過程中產生創造思考產物之表現情形。具體研究問題如下：

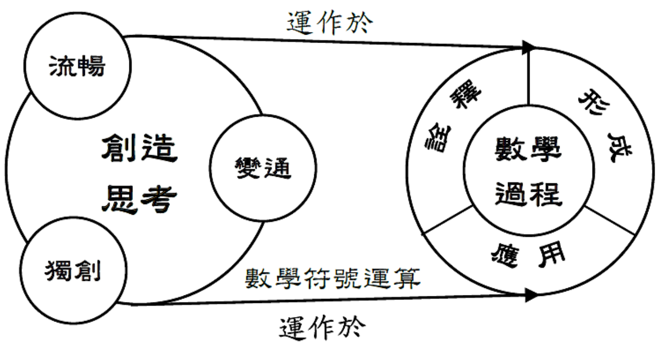
（一）國中生在面對激發創造思考技能之任務時，在形成、應用、詮釋數學符號運算此三個數學過程中產生的答案分別有何特質？

（二）國中生在形成、應用、詮釋數學符號運算此三個數學過程中，在創造思考的流暢性、變通性、獨創性指標表現為何？

[1] PISA 在詮釋該項的說明是：Interpret refers to interpreting, applying, and evaluating mathematical outcomes。因學生作答時間限制，本研究並未涵蓋使用（applying）數學結果此面向。

本研究的理論架構如圖 1 所示。

圖 1
研究理論架構



參、研究方法

本研究採問卷調查法，透過與現實生活相關的情境設計開放性數學題目對學生施測。

一、研究工具

本研究根據研究理論架構發展研究工具，研究工具乃名為「密碼防盜遊戲」之問卷，採用猜密碼此與實際生活相關的情境，在此情境中另分為三個子情境，各子情境分別對應一個數學過程。每個數學過程中，設計最少 3~4 個要求學生完成的任務。

本研究解題任務設計採取結果開放任務，在形成與詮釋兩個數學過程中，並無標準答案；在應用過程中，學生經歷一題多解的創造過程，所提供的答案須正確。所有題目經過特殊設計，都與傳統數學創造力測驗僅能有固定個數正確答案不同，本研究每個題目都可以有無限多個適當答案；除此，為了刺激學生達到創造思考三指標的評判標準，在試題題幹上要求學生給出不只一個答案，差別越大越好的答案，以及其他同學較無法想到的獨特答案，據以探測學生在數學創造思考三個指標：流暢性、變通性、獨創性的表現。

此研究工具的發展乃經過十次焦點團體討論，每次討論包括至多三位教授、兩位平均教學經驗超過 20 年的博士，以及三位碩士學生，每次焦點團體討論至少歷經三小時，故本問卷兼具內容效度及專家效度。

在問卷發展完成後，整份問卷先由兩位學生作答，以初步找出較明顯的錯誤或不恰當之處，並記錄作答時間，修改後，由超過 20 名學生進行預試，以測試問題的可行性和答題所需的時間，並據以修改問卷後定稿。

研究工具的具體內容簡述如下：

（一）密碼防盜遊戲情境

題目敘述某班同學兩兩玩猜密碼遊戲，遊戲方式是每位同學都設計一個黑盒子動作，將真密碼透過黑盒子動作轉換為假密碼，告訴對手假密碼後讓對手猜真密碼，遊戲規則是誰的真密碼先被猜出就輸了。為了使受測學生了解題意，題目舉了小平的黑盒子動作，並用數值實例說明，之後告訴學生，若用 $\boldsymbol{x}$ 代表真密碼，小平的黑盒子動作是真密碼加 1，可以記成「$\boldsymbol{x+1}$」。

（二）形成過程的情境與題目

探測形成過程創造力使用的情境即為前項所述情境。透過下列題目要求受測學生提供 3 個答案：「請你設計二個比小平設計的難被猜到的黑盒子動作。這兩個黑盒子動作要**差別越大越好**。」（題目代號 F1a、F1b，參考表 1 說明。）「現在你要發揮天馬行空的想像力，設計一個**獨特、別人較難想到**的黑盒子動作。加油！」（題目代號 F2，參考表 1 說明。）

（三）應用過程的情境與題目

探測應用過程的情境延續第 1 點所述情境，額外加入一個子情境，子情境說明這題是第二階段的遊戲，謝老師告訴同學她設定的真密碼是 10，假密碼是 88，目標是要同學猜她的黑盒子動作，根據此情境，要求學生提供 2 個答案：「請找出二個謝老師可能設計的黑盒子動作，這兩個黑盒子動作要**差別越大越好**。」（題目代號 E1a、E1b，參考表 1 說明。）另外以兩個有限制條件的題目，要求學生提供另 2 個答案，第 1 個題目是：「小安偷看到謝老師一部分的答案，他發現老師有寫到『**平方**』，請根據這個資訊寫出一個**和第（1）題越不同越好**的黑盒子動作。」（題目代號 E2，參考表 1 說明。）第 2 個題目是：「謝老師說她的設計非常獨特，請寫出一個**非常獨特**又用到『**平方根**』的可能黑盒子動作。」（題目代號 E3，參考表 1 說明。）

（四）詮釋過程的情境與題目

探測詮釋過程的情境延續第 1 點所述情境，額外加入一個子情境，子情境說明隔壁班畢老師也加入遊戲行列，同學要給老師一個真密碼的數值，例如 5，然後二位老師要告訴同學經過他們的黑盒子動作後得到的假密碼，謝老師的黑盒子動作是$\boldsymbol{x}^2+1$，得到的假密碼是 26、畢老師的黑盒子動作是$\boldsymbol{x}\times 2+11$，得到的假密碼是 21，根據此情境，透過下列題目要求受測學生提供三個答案，第 1 個題目是：「請用二個原因來說明你覺得二位老師誰的黑盒子動作比較容易被猜出來。這二個原因要**差別越大越好**。」（題目代號 I1a、I1b，參考表 1 說明。）第 2 個題目是「現在你要發揮自己獨一無二的思考力，請寫出一個獨特、別人較不容易想到的原因來說明誰的黑盒子動作比較容易被猜出來。」（題目代號 I2，參考表 1 說明。）

在此問卷中，共有 7 個題目，要求學生給出 10 個答案，有 3 題是以一個題目要求學生給出 2 個答案，其原因是為了讓學生一次思考兩個越不同越好的答案[2] ，為方便對應，這 3 題每題可視為有 2 個小題，據此，本研究的題目規畫結構如表 1 所示。由表中可看出，規畫上，形成、應用、詮釋過程分別各有 3、4、3 小題；流暢性、變通性、獨創性的探測題目各有 6、7、3 小題；需要說明的是，雖然規畫如此，但學生在探測流暢性或變通性題目之答案中也可能出現獨創性，故在評判創造思考指標表現時，同一過程的 3 或 4 小題答案皆一起分析。

表 1
不同數學過程中探測創造思考各指標能力之題目分布規畫

數學過程 / 創造思考	形成（F）	應用（E）	詮釋（I）
流暢性	F1a, F1b	E1a, E1b	I1a, I1b
變通性	F1a, F1b	E1a, E1b, E2	I1a, I1b
獨創性	F2	E3	I2
總小題數	3	4	3

二、研究樣本

本研究採立意抽樣，在台灣北部與南部各取兩所學校 8 年級學生為樣本。因為數學創造是高階認知層次，需到對數學有一定的認識與經驗（Baer, 2016），在此探測階段，以中等程度以上的學校為主，避免收集的資料太多空白，造成時間與人力上的浪費，根據台灣國中階段採區域就學的情況，即使在中上或中等學校內，仍會有不少比例程度較低的學生（國中教育會考待加強的學生）。本研究北部兩所學校學生程度在全國分別約為上、中上程度，南部兩所學校分別約為中上、中。因北部人口多於南部人口，故北部選取較多班級參與，合併共有 32 班參與，再從各班隨機選取四分之一學生參與（另外四分之三的學生作其他情境的創造力問卷[3]），本研究樣本共 213 位學生，其中有效樣本為 210 位（3 份無作答），男生 104 位、女生 106 位。研究樣本分布如表 2 所示。

[2] 原始問卷設計是先要求學生給 1 個答案，再以另 1 小題要求另 1 個越不同越好的答案，發現學生第 2 小題往往不答，經修改為一次給 2 個答案後，增加了學生的作答意願。

[3] 本研究為一大型 21 世紀思考技能研究中的子研究，有關創造思考部分，仍有另外三個情境的相關研究。

表 2
研究樣本分布

區域	北部		南部	
學校	校 A	校 B	校 C	校 D
程度	上	中上	中上	中
參與班級數	6	13	7	6
各校樣本數	78	38	47	47
男生、女生	34、44	17、21	29、18	24、23

三、資料收集與分析

本研究資料收集於 2023 年五月中旬至下旬之間，資料收集乃由任課數學教師於課堂發放問卷，施測時間為一節課 45 分鐘，

（一）學生答題特質資料分析與編碼

針對學生作答之內容，採歸納分析法分析資料，第一階段先從 30 份答案中找出資料裡浮現的主題向度與其下的類別，將這些主題向度與類別編碼（Bruner, 1966），第二階段再分析另外 30 份答案，找出無法歸入第一階段主題向度與類別之案例，據以修改主題向度、類別及編碼，第三階段再進行全部資料的編碼，由兩位編碼者獨立編碼，如果頻繁出現非第二階段主題向度與類別的答案，則提出由一位專家決定是否修改主題向度與類別，新增編碼，若出現零星特殊的適當答案，則編入「其他」類別，此類別在判斷獨創性時尤為重要。兩位編碼者最後核對編碼，針對不一致的編碼進行討論，若有一方同意另一方的思路，則取得一致的編碼，若無法取得一致，則由另一專家決定編碼。本研究在全部項目的編碼者一致性為（95.2%）。

在三個數學過程中，根據學生答題內容所浮現出的主題向度與類別數量並不一致，主題向度的數量介於 4~5 個，各主題向度下的類別數量介於 2~8 個。編碼的規則如下：各答案的第一碼位表示「答案適當性」此主題向度：「1」為適當答案、「7」為數學錯誤、「8」為無意義答案、「9」為空白；第二碼位表示主題向度一的類別編號；第三碼位表示主題向度二的類別編號，依此類推。資料分析得到的這些主題向度與類別可展現出學生答案的特質，因為本文篇幅有限，故將於研究結果中選擇部分主題向度與類別進行報導；另外，這些向度與類別將作為評判學生創造思考三指標表現的參考準則。根據表 1 的題目分布，每位學生都有 10 個編碼，形成、應用、詮釋過程各有 3、4、3 個編碼。

（二）創造思考指標表現分析

在評判學生創造思考三指標的表現時，雖然問卷題目設計規畫分為刺激學生展現流暢性與變通性的「二個差別越大越好的答案」，以及展現獨創性的「非常獨特的答案」，但是

在判斷流暢性時，即使在刺激學生展現獨創性該題寫出的答案，也能以此作為評判其流暢性（適當答案數量的多寡）的根據，反之，即使在刺激學生展現流暢性與變通性的題目中，學生答案若為獨特的，也可以評判其為獨創性的答案。根據文獻中研究的做法，學生答案需要是適當的（OECD, 2023），本研究以兩個準則判斷學生答案是否為適當答案，一為無數學錯誤，一為符合情境的有意義答案。舉例來說：在應用過程中要求學生找出含有平方根的黑盒子動作又可將 10 轉換為 88 時，學生給出「x^3-45」（C 校 S1）的答案，視為數學錯誤，非適當答案；又在形成過程中要求學生設計黑盒子動作，當學生給出的答案是：「假密碼－（假密碼－真密碼）＝真密碼」（D 校 S1），可知其並未理解題意，此答案無意義，非適當答案。

在創造思考的表現評判上，部分研究以答案數量（流暢性、變通性）或答案稀有性（獨創性）計分（例如：彭淑玲等人，2015），這種計分方式在不同的創造思考指標上，可能會有不同的分數，PISA 以 0、1、2 三個等級計分（OECD, 2023），著重在群體表現的比較，本研究與 PISA 的重點相近，著重群體表現在不同數學過程中的比較，故採用各數學過程固定等級數量的方式評判學生的表現，研究團隊分析學生作答反應後，決定以四個等級來表示學生各指標的表現，分別為「無」、「低」、「中」、「高」。

下面針對創造思考三指標的評判標準說明：

1. 流暢性的評判

由於數學屬於較困難的學科，只要學生的答案被判定為適當的答案都可視為具有流暢性。若學生提供的答案皆為不適當答案（數學錯誤或無意義）或未提供答案，則將其歸類為「無流暢性」；若學生僅提供 1 個適當答案則將其歸類為「低流暢性」；若學生提供 2 個或 3 個適當答案則需判斷這些答案是否視為相同答案，根據 Haylock（1978）的做法，相同想法的不同答案不重複計算；舉例來說，當學生給出「$x-1$」、「$x+5$」這兩個答案時，雖然常數項不同，但在國中層級都是相同的數學想法「$ax+b$」，仍應視為 1 個答案。據此，當學生提供 2 個或 3 個答案且得到相同編碼（將在研結果該節報導各題的編碼），表示想法相同，本研究僅視其為 1 個適當答案，仍是「低流暢性」；若學生提供的兩個適當答案在某主題向度中得到不同編碼，則視為有 2 個適當答案，將其歸類為「中流暢性」；依此類推，當學生提供的 3 個適當答案彼此得到不同的編碼，則將其歸類為「高流暢性」。

2. 變通性的評判

流暢性以計算適當答案個數來評判，變通性原則上以計算答案所屬類群個數來評判。本研究透過焦點團體討論，將類別群組為類群，類群的判斷原則上為學生學習經驗中數學概念的相近性、題目刺激與答案間思考的遠近（Guilford, 1950; Mednick, 1962）、答案的複雜度三者，當學生的答案跨不相近的數學概念（學習經驗中較無串聯對比的概念）或較不易由題目刺激聯想到或答案較複雜都能展現出思考的變通性，符合此三者任何之一都歸為不同群。原則上，當學生提供的 3 個答案符合都分屬於不同群且與題目刺激「$x+1$」的一次多項式不同群，則歸類為「高變通性」，依此類推，2、1、0 個符合歸類為「中」、「低」、

「無」變通性。舉例來說，在題幹給定的$\boxed{\text{黑盒子動作}}$為一次多項式「$x+1$」的情況下，若學生設計的$\boxed{\text{黑盒子動作}}$使用二次多項式，此答案雖然跨概念，但乃是學生容易透過數學概念相近性及題目刺激聯想到之答案（此二概念在學生學習經驗中有對比串聯且接觸頻繁），同時答案並不複雜，這個答案無法展現思考的變通性，故本研究將一次與二次多項式歸為同一群；相對來看，若學生設計的$\boxed{\text{黑盒子動作}}$使用「倒數」，可知此答案跨不相近的數學概念（在學習經驗中並不會串聯一次多項式與倒數概念），故本研究視此二類分屬於不同群。

上述依不同群個數判斷變通性乃依量變化度所做的判斷，仍需額外考慮質變化度的問題，部分群可能質性上變化度較高（例如，答案與題目的刺激關聯較遠），則變通性就會升級，舉例來說，在形成過程的主題向度二「數學物件的使用」中（參考下方研究結果），當學生使用的數學物件屬於第（7）項「混合上述兩種以上」時，可知學生除了必定會跨與「$x+1$」不相近的概念外，同時混合了不同的概念在同一個式子中，式子的形式有可能變通性較高，非國中生容易接觸到或想到的式子，此時本研究認為其展現出較「低變通性」為高的變通性，將其歸類為「中變通性」；在變通性的判定上，本研究先以量做初步判斷，再輔以質做確認判斷。

3. 獨創性的評判

許多研究以統計上出現頻率在 5%以下的答案作為判斷準則（例如：彭淑玲等人，2015；Haylock, 1997），此做法容易受樣本數影響；學者 Silvia 等人（2008）認為可以藉助主觀計分法（subjective scoring methods）讓評測者依據個體答案的不尋常（uncommon）、遠距離聯想（remote）當指標來改善。本研究採主觀計分法的精神，將答案依獨創性分等級。當答案為適當答案時，原則上以不尋常出現（罕見）、答案使用的概念、型式等與題目所給的刺激關聯遠（remote）、與學生所學習過的內容差異大為判斷標準，判斷標準因各題而異；實際執行時對於是否罕見、關聯遠、差異大乃透過焦點團體討論逐題訂定之，但原則上，以（1）主題向度下罕見或屬於「其他」類，（2）未學習過或與題目刺激關聯遠，（3）結合多種類型（通常也較罕見）來判斷獨創性；原則上，當答案符合前述所有三個標準時，歸類為「高獨創性」、符合二個標準為「中獨創性」、僅符合其中之一標準為「低獨創性」；在此原則下仍需考慮「極端」情形，當極罕見、關聯極遙遠、差異極大時，仍會由較低等級獨創性升級為較高等級獨創性，舉例來說，在形成過程的主題向度一中，若學生有一個適當答案被歸類為「真密碼位數重組、運算或變換」時，此答案符合第①點及第②點的極端情形，直接歸類其為「高獨創性」。

本研究在判定學生各答案之創造思考指標等級後，統計「無」、「低」、「中」、「高」指標之出現次數百分比。另進一步將數學思考指標的等級轉換為分數，「無」、「低」、「中」、「高」指標依序以「0」、「1」、「2」、「3」計分後計算平均分數，此分數概括稱為創造思考指標分數或特定時稱對應指標分數，如流暢性分數。

肆、研究結果

本研究發現學生回答本問卷題目的意願頗高，各題的空白率分別如下：形成 3 題：0%、1%、4.8%，應用 4 題：2.9%、3.3%、6.7%、16.2%，詮釋 3 題：6.7%、11%、13.8%。此結果顯示各題空白率不高，學生答題意願不低。本節根據前述研究問題分項報導。

一、形成、應用、詮釋數學符號運算下的創造思考特質

學生答案的特質將以歸納出來的主題向度及類別報導，下面的報告並未涵蓋本研究所有歸納出來之主題向度及類別，每個數學過程僅選擇 2 個重要的主題向度及其下的所有類別進行報導，並在第 1 個主題向度中選擇較多學生提供或較特別的答案型態以 1 個例說明，第 2 個主題向度則僅作類別報導，不逐類提供示例與說明。至於「其他」類僅在表 3、表 5、表 7 中顯示人次百分比，部分「其他」類學生答案將在報導獨創性時介紹。

因為每題都僅報導 2 個主題向度，故下面的示例都僅提供答案適當性之主題向度及答案在所報導的 2 個主題向度之編碼，編碼皆為 3 碼位，編碼原則請參考資料收集與分析該節之說明。

（一）形成過程

在形成過程，我們要求學生設計差異越大越好或獨特難被猜出來的黑盒子動作。題目給出的黑盒子動作範例是學生在國一上學期即學習過的基本運算$x+1$（其中x代表真密碼）。在此數學過程中，學生被要求提供 3 個答案（參考表 1），第 1、2、3 個答案為適當答案的比例分別為 93.8%、91.0%、84.3%。針對形成過程本研究共歸納出 5 個主題向度，最主要的 2 個主題向度為轉換方式及數學物件的使用。

轉換方式向度從個別學生完整答案來看其所提出的黑盒子動作使用了何種範疇的數學將假密碼轉換為真密碼，共有 5 類：（1）多項式函數、（2）含平方根的式子、（3）多樣數學式的組合、（4）真密碼位數重組、運算或變換、（5）其他。數學物件的使用向度擷取學生答案中使用的個別數學物件，共有 8 類：（1）x^n，$n=1$ 、（2）x^n，$n=2$ 、（3）平方根、（4）x^m，$m>2$、（5）絕對值、（6）含x的倒數、（7）混合上述 2 項以上、（8）其他。學生答案歸屬於各類別的出現次數（人次）百分比如表 3 所示。

表 3
形成過程主題向度之類別人次百分比（%）

<table>
<tr><th rowspan="2">主題向度</th><th colspan="8">類別</th><th rowspan="2">不適當</th><th rowspan="2">空白</th><th rowspan="2">總和</th></tr>
<tr><th>1</th><th>2</th><th>3</th><th>4</th><th>5</th><th>6</th><th>7</th><th>8</th></tr>
<tr><td>轉換方式</td><td>69.5</td><td>4.0</td><td>11.8</td><td>3.5</td><td>2.1</td><td></td><td></td><td></td><td rowspan="2">7.2</td><td rowspan="2">1.9</td><td rowspan="2">100</td></tr>
<tr><td>數學物件的使用</td><td>58.7</td><td>8.6</td><td>2.4</td><td>2.2</td><td>1.4</td><td>1.2</td><td>14.3</td><td>2.1</td></tr>
</table>

註：類別編號純為流水號（見內文對應編號），同一欄的數據不宜上下比較。

1. 多項式函數

學生提出的轉換方式最主要為一次及二次多項式函數，這兩種都是八年級學生已在課程中學習過的內容。在形成過程 3 個題目的所有答案中，一次、二次多項式函數出現人次分別占所有人次的 58.7%、8.6%，另也有 2.2%人次的學生給出 3 次以上的多項式。

有些學生為了給出越不同越好的答案，會在係數或常數上做較多樣的變化，包括：使用括號、加項或減項運算、乘或除係數或未知數運算。例如，表 4 的 B 校 S1 之答案除使用括號外，同時使用了乘係數、乘常數以及加項運算。

2. 含平方根的式子

有少數學生（4.0%）使用了形如$\sqrt{ax+b}$、$ax+\sqrt{b}$ 、$\sqrt{a}x+b$、或是$\sqrt{a}x+\sqrt{b}$的平方根式子，或是將這類式子與一次或二次多項式函數結合。這些式子雖然可視為布於無理數環的一次多項式，但國中生並未學過x係數或常數為無理數的多項式，這種想法的產生乃如 Mednick（1962）所述，是學生組合不同元素創造出新產物的案例，如表 4 的 A 校 S1 例子所示。

3. 多樣數學式的組合

有 11.8%人次的學生會將各式各樣的式子串聯起來，以提供差別越大越好或獨特的轉換方式。他們把學過的概念或運算，例如平方根、絕對值串聯結合起來，將舊經驗中學過的分數，擴展連結到使用x在分母的未學習過之分式（或是除以x）。表 4 的 A 校 S2 例子中，可看出學生使用了簡單的係數與常數，但卻使用了不容易連結到的絕對值。

4. 真密碼位數重組、運算或變換

有 3.5%人次的學生跳脫真密碼為可運算變數或數值的想法，針對真密碼的各個位數的數字做重組、運算或變換。在題目情境所給的案例為$x+1$之運算式的刺激狀況下，很難連結到數值位數變換是可能的$\boxed{\text{黑盒子動作}}$之思考，此類答案需將數學元素解構後再結合其他的數學元素或方法（例如，運算或對應），建構出新的產物。表 4 的 A 校 S3 以實例說明其黑盒子解構為各個位數再相加得出假密碼的運作方式。

表 4

學生在形成過程之表現

學生編號	答案編碼	學生表現
B 校 S1 第 1 個答案	111	$(x+5)\times 7+4$
A 校 S1 第 3 個答案	127	$(7x+26)\sqrt{x}$
A 校 S2 第 3 個答案	137	$\left\lvert \frac{\sqrt{20x}-30}{40} \right\rvert$
A 校 S3 第 3 個答案	148	真密碼每個數字相加 ex：123（真密碼）⇒ 1+2+3=6

（二）應用過程

在應用過程，我們要求學生找出可能的黑盒子動作，將真密碼 10 轉換為假密碼 88，學生共需提供 4 個答案，第 1、2 個答案僅要求差別越大越好，第 3 個答案則要求使用到平方，第 4 個答案要求使用到平方根。因為真密碼、假密碼皆為已知，故學生提供的轉換方式須符合正確將 10 轉換為 88 才視為適當答案，此題可視為一題多解的題目，但可以有無限多的可能答案，同時也沒有專家解法，學生需要透過應用數學嘗試、檢驗的歷程才能給出適當答案。研究結果顯示，第 1、2 個答案（未要求應用平方或平方根）為適當答案的比例分別為 81.4%、74.7%，此數據明顯比形成過程的數據低。

研究預期此應用過程答案的發散性應不如形成過程高，因為有限制條件及要求正確答案時解題思考受到較大的限制，研究結果顯示，雖然學生無法使用如形成過程中非常複雜的算式，但仍產生多種不同的解題策略。本過程第 1、2 個答案共歸納出 4 個主題向度。最主要的 2 個主題向度為轉換方式及數系使用。

第 1、2 個答案的轉換方式向度從個別學生答案來看其所提出的黑盒子動作使用了何種數學物件，共有 6 類：（1）應用一次多項式函數、（2）應用除法概念、（3）應用二次多項式函數、（4）應用因數分解、（5）應用完全平方式、（6）其他。數系使用向度擷取學生答案中使用的最大數系，共有 3 類：（1）整數、（2）有理數、（3）無理數。學生答案歸屬於各類別的出現次數（人次）百分比如表 5 所示

表 5

應用過程主題向度之類別人次百分比（%）

主題向度	類別[a]						不適當	空白	總和
	1	2	3	4	5	6			
轉換方式	54.1	7.5	7.1	6.4	2.8	0.2	18.8	3.1	100
數系	67.8	9.6	0.7						
平方算式結構[b]	38.1	6.2	4.3	3.8	10.5	5.8	24.6	6.7	100
平方根算式結構[b]	12.9	12.4	5.3	5.3	2.4	3.1	42.8	16.2	100

註：

a 不同題目的類別編號純為流水號（見內文對應編號），同一欄的數據不宜上下比較。

b 此處為題目要求使用平方或平方根，主題向度為算式結構。

1. 應用一次多項式函數

應用一次多項式函數乃出現頻率最高的轉換方式，有 54.1%人次的學生給出這類答案。在第一個答案中許多學生直接寫出單一加法運算即可得的轉換式子 x+78，然而也有許多學生會寫出係數非 1 的一次式，以簡單拆解 88 為 8×10+8 為主，得出 8x+8，另部分學生會寫出較少出現的分解方式，如表 6 的 D 校 S2 所示。

2. 應用除法概念

有 7.5%人次的學生會應用除法概念，主要以假密碼除以真密碼，找出其倍數關係，此種解法是找出兩數值關係較易聯想到的方法，如表 6 的 A 校 S4 案例所示，這類學生的答案往往會呈現$\frac{44}{5}x$或是$8.8x$。

3. 應用二次多項式函數

在題目情境的描述下，此題以二次多項式函數為轉換方式的思考脈絡並不如一次多項式般容易出現，但研究結果發現，仍有 7.1%人次的學生解此題時應用了二次多項式，如表 6 的 A 校 S5 所示。

4. 應用因數分解

雖然根據題目所給一次式的範例，因數分解並非學生直接可聯想到的概念，但仍有 6.4%人次的學生應用了此方法，這類的答案多半是先分解假密碼 88，根據因數分解的結果，以$x = 10$之數值帶入得出其$\boxed{\text{黑盒子動作}}$。舉例來說，如表 6 的 D 校 S3 分解$88 = 11 \times 8$，再將11改寫為$(x + 1)$。

5. 應用完全平方式

僅 2.8%的學生應用形如$(x+a)^2+bx+c$或 $(x+a)^2+b$這類的式子，在思考上偏向數學式的平方運算，與二次多項式不同，如表 6 的 C 校 S2 所示。

表 6
學生在應用過程之表現

學生編號	答案編碼	學生表現
D 校 S2 第 1 個答案	111	$5x+38$
A 校 S4 第 2 個答案	121	$10x\frac{88}{x}$
A 校 S5 第 2 個答案	131	x^2-x-2
D 校 S3 第 2 個答案	141	$(x+1)\times 8$
C 校 S2 第 2 個答案	151	$(x-1)^2+7$

6. 要求須使用平方或平方根的答案特質

僅應用過程的第 3 個答案要求學生的黑盒子動作需要使用平方，第 4 個答案要求黑盒子動作需要使用平方根，學生在答題上受到更多的限制，且前面已經提供了 2 個答案，故空白率較高，非適當答案的比例也較高，這兩題有嘗試答題的百分比分別為 91.9%及 83.9%，然而適當答案的比例僅分別為 67.6%及 41.0%（見表 5）。

在需使用平方的算式中共歸納出 5 個主題向度。第 1 個主題向度為算式結構，分為下列類型：

（1）x^2-12型
（2）平方在常數的型式。
（3）ax^2-k，$a\neq 1$ 型
（4）ax^2+bx+c，$ab\neq 0$ 型
（5）完全平方$(x-a)^2+b$，$ab\neq 0$ 型

在需使用平方根的算式中共歸納出 5 個主題向度。第 1 個主題向度為算式結構，分為下列類型：

（1）x 的一次或二次式，根號在常數型
（2）$\sqrt{x^2}$ 或 $\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}$ 或 $\sqrt{x^4}$ 型
（3）根號內為「x湊出的完全平方數」$+k$（k為常數）型
（4）因數分解假密碼型
（5）根號內為「x 湊出的完全平方數」+ 一次式型

（三）詮釋過程

詮釋過程的情境中，我們給學生兩位老師的$\boxed{\text{黑盒子動作}}$，謝老師的為x^2+1，畢老師的為$x\times 2+11$，並且舉例讓學生想像學生任給一個真密碼如 5，兩位老師告知個別得到的假密碼讓學生猜老師$\boxed{\text{黑盒子動作}}$的歷程。題目要求學生詮釋他們覺得哪個老師的$\boxed{\text{黑盒子動作}}$較容易被猜出來。這種題目在我國對學生來說是頗陌生的題目，因為無標準答案，而且是針對情境給出詮釋，牽涉到學生可能給老師甚麼真密碼，以及經過轉換後假密碼的形式是否容易倒推出真密碼，另牽涉到數學及自然語言的表達與說理。研究者原預期學生空白率會增加，但結果顯示空白率並未明顯提高，3 個小題有嘗試答題的比例依序為 93.3%、89.0%及 86.2%；適當答案的比例依序為 80.9%、72.4%、44.3%。本過程共歸納出 5 個主題向度。最主要的 2 個主題向度為詮釋的切入點及關注之數學焦點。

詮釋切入點向度從大方向區分學生詮釋時使用的是概念或實例，共有 3 類：（1）以運算結構特質說明、（2）以實際數值舉例說明/觀察規律、（3）僅用題目提供的真、假密碼、（4）其他。關注之數學焦點向度擷取學生詮釋時提及之數學物件、關係或特徵，共有 7 類：（1）題目所給函數形式、（2）運算複雜度、（3）回推運算之可行性或難易度、（4）真假密碼數值特徵、（5）常數特徵、（6）提及上述 2 項以上、（7）其他。學生答案歸屬於各類別的出現次數（人次）百分比如表 7 所示。

表 7

詮釋過程主題向度之類別人次百分比（%）

主題向度	類別							不適當	空白	總和
	1	2	3	4	5	6	7			
詮釋切入點	47.5	13.6	3.2	1.0				24.2	10.5	100
關注之數學焦點	18.3	14.1	10.2	6.3	5.9	3.2	7.3			

註：類別編號純為流水號（見內文對應編號），同一欄的數據不宜上下比較。

1. 以運算結構特質說明

最多人次的學生（47.5%）以運算結構的特質為切入點詮釋。這類答案的詮釋切入點主要有兩種方向，一種是直接評論題目所給$\boxed{\text{黑盒子動作}}$的運算結構，例如：以平方或乘法運算是否容易被猜出，轉換式中常數是否容易被猜出，或是式子正推、反推運算的歷程是否容易被猜出等等來詮釋；另一種是學生自己創造非題目所給的數學式來說明該式也可能符合真假密碼關係，此時學生「以自己創造的式子」來說明「原運算式的不唯一性」，這兩個括號中的想法與題目的刺激關聯遠，且並非學生學過或熟悉的想法。如表 8 的 C 校 S3 學生選擇畢老師的轉換方式較易被猜出來，學生詮釋關注之焦點為回推運算之難易度，而此難易度根源於運算為乘與除或平方與開根號

2. 僅用題目提供的真、假密碼

有 13.6%人次的學生會以題目提供的真、假密碼詮釋哪一個老師的運算式較易被猜出。學生在詮釋的過程中，所串聯的元素多是根據題目情境敘述直接可聯結到的。如表 8 的 A 校 S6 學生直接用謝老師對應的假密碼數值詮釋容易猜出其真密碼。

3. 以實際數值舉例說明/觀察規律（不含真密碼為 5 之原始例）

有 3.2%人次的學生會以實際數值舉例或觀察實際數值規律為切入點，說明根據這些數值由假密碼猜真密碼時會有甚麼狀況產生；此類答案含蓋了整個遊戲的程序。如表 8 的 B 校 S2 學生設想了同學可能給兩位老師的 3 個真密碼，根據這些真密碼得出 2 組 3 個假密碼數值，由各組數值規律來看，哪一組數值的特徵較可能不被猜出其黑盒子動作。

表 8

學生在詮釋過程之表現

學生編號	答案編碼	學生表現
C 校 S3 第 2 個答案	113	可以除回去，但平方要開√ 較難算 謝老師的
A 校 S6 第 2 個答案	123	26 可能想到 25　比較容易猜出來 $25 = 5^2$ $26 = 25+1$
B 校 S2 第 3 個答案	134	獨特的原因：如果只問三次，數字是一、二、三的話，謝老師就會回答 2 和 5 和 10，這樣同學就會發現是 1^2+1，2^2+1，3^2+1；畢老師會回答 13、15、17，同學們可能會以為是有關質數，便會先被誤導。

二、形成、應用、詮釋數學符號運算下的流暢性、變通性、獨創性

此處針對創造思考指標表現的報導分為學生創造思考產物在各指標中的樣貌及描述統計。樣貌報導採立意取樣報導，礙於本文篇幅，針對流暢性及變通性指標搭配形成、應用、詮釋過程各取兩個例子報導，一個是在該指標中低創造思考力的例子，另一個是在該指標中高創造思考力的例子。獨創性指標各過程各取一個高獨創性的例子報導。表 9 顯示學生在各數學過程、各創造思考指標中之人數與百分比分布。

表 9

數學過程×創造思考指標之人數百分比（%）

數學過程	具創造思考力				無	總和
創造思考	低	中	高	共		
形成過程						
流暢性	39.5	33.3	21.4	94.3	5.7	100
變通性	23.8	11.4	15.7	51.0	49.0	100
獨創性	16.7	12.9	12.9	42.4	57.6	100
應用過程						
流暢性	16.2	43.3	26.2	85.7	14.3	100
變通性	40.5	12.4	8.1	61.0	39.0	100
獨創性	6.2	1.0	4.3	11.4	88.6	100
詮釋過程						
流暢性	18.1	30.5	35.2	83.8	16.2	100
變通性	21.9	30.5	18.1	70.5	29.5	100
獨創性	8.1	5.7	6.7	20.5	79.5	100

註：「無」表示在對應的數學過程中沒有任何 1 題答案展現出具有對應之創造思考指標能力。

（一）形成過程中創造思考指標的樣貌

1. 形成過程—流暢性

在形成過程中，高達 94.3%的學生思考具有流暢性，最多學生的思考為低流暢性（39.5%），其次為中流暢性（33.3%）、最少學生的思考屬於高流暢性（21.4%）（見表 9）。表 10 中 C 校 S4 給出的 3 個答案編碼相同，表示想法相同，為低流暢性。C 校 S5 給出的 3 個黑盒子編碼皆不相同，雖然第 1 個展開後會是二次多項式，但學生寫出此型式表示思考的是兩個一次式的相乘，為多樣數學式子的組合，第 3 個答案則是兩個一次式的相減，這 3 個答案想法不同，此學生為高流暢性。

表 10

形成過程—流暢性之學生表現

學生編號 流暢性	第 1 個答案	第 2 個答案	第 3 個答案
C 校 S4 低流暢性	$x-3$	$x+15$	$x-51$
	答案編碼 111	答案編碼 111	答案編碼 111
C 校 S5 高流暢性	$(x+3)(x-4)$	$\frac{2x+3}{x}$	$(x+1023)-2x$
	答案編碼 132	答案編碼 137	答案編碼 131

2. 形成過程—變通性

在形成過程中，有 51.0%的學生思考具有變通性，最多學生的思考為低變通性（23.8%），其次為高變通性（15.7%）、最少學生的思考屬於中變通性（11.4%）（見表 9）。上述 C 校 S5 第 1 和第 3 個答案屬於相同類群，但與題目刺激的式子「$x+1$」（編碼 111）分屬不同類群，第 2 個答案又屬於另 1 類群，此生思考為中變通性（參考變通性的編碼）。表 11 中 C 校 S6 的 3 個答案中僅有第 2 個答案與題目刺激屬於不同類群，此生思考為低變通性。而 C 校 S7 的第 3 個答案已達中變通性的等級，其另外 2 個答案在轉換方式、數學物件的使用上屬於不同類群，此生的思考為高變通性。

表 11

形成過程—變通性之學生表現

學生編號 變通性	第 1 個答案	第 2 個答案	第 3 個答案
C 校 S6 低變通性	$2(x+6)-13$	$3(x+6)-2x+11$	$(3x-37)+29$
	答案編碼 111	答案編碼 137	答案編碼 111
C 校 S7 高變通性	$(\sqrt{x^2+81})\times 10-6$	$\left[(10x-10)\times\frac{1}{2}\right]^2$	$\left\|\sqrt{4(10x+\frac{3}{2})}\right\|$
	答案編碼 127	答案編碼 111	答案編碼 137

3. 形成過程—獨創性

在形成過程中，有 42.4%的學生思考具有獨創性，最多學生的思考為低獨創性（16.7%），中獨創性與高獨創性的學生比例相當（皆為 12.9%）（見表 9）。表 12 的這位學生跳出以數學式轉換的思考而改以九宮格此二維表格進行真假密碼的轉換，轉換時也會根據不同位置的格子進行不同的數值與運算，此答案與題目所給一次式的刺激關聯極遠，是獨創性高的創造思考，單以這一個答案，此學生即被歸類為高獨創性。

表 12

形成過程—獨創性之學生表現

學生編號 獨創性	第 3 個答案
B 校 S3 高獨創性	獨創的黑盒子動作： 假想天空中有一個九宮格（用手在空中畫一個給他看） 1 2 3 / 4 5 6 / 7 8 9　讓他指一個格子，指到單數就加相應數字，指到雙數則減相應數字
	答案編碼 148

4. 形成過程—創造思考指標

本研究形成過程題目的特質是學生僅需「生成」數學方式而不需對其生成物進行解題。由 94.3%的學生能至少生成 1 個轉換方式（流暢性），51.0%能至少生成 1 個與題幹中$ax+b$不同類群的轉換方式（變通性）來看，學生生成不同數學方式表達情境脈絡的能力不差；從 42.4% 的學生具備獨創性的數據來看，學生用數學符號自由發想的創造能力頗高。研究結果顯示單獨看形成過程時，學生在不需要後續解出答案的壓力下，創造思考能力不差。

（二）應用過程中創造思考指標的樣貌

1. 應用過程—流暢性

在應用過程學生共需給出 4 個答案，前 2 個無要求，答案共用相同的編碼，第 3 個需有平方，第 4 個需有平方根，後 2 個答案都各自有其編碼方式。流暢性取前 3 個答案分析，仍以不同想法個數為適當答案個數。此過程中，高達 85.7%的學生思考具有流暢性，最多學生的思考為中流暢性（43.3%），其次為高流暢性（26.2%）、最少學生的思考屬於低流暢性（16.2%）（見表 9）。表 13 的 B 校 S4 給出的第 1、2 個答案得到相同的編碼，第 3 個答案在題目要求使用平方的情形下，其答案為與題目刺激相同的想法（X－b，其中 X 為平方），此學生思考為低流暢性。D 校 S4 的 3 個答案都得到不同的編碼，其思考為高流暢性。

表 13
應用過程—流暢性之學生表現

學生編號 流暢性	第 1 個答案	第 2 個答案	第 3 個答案 （需有平方）
B 校 S4 低流暢性	可能為：真×8+8=88	真×10－12=88	$10^2-x=88$ $100-x=88$ $x=12$ 所得的答案為：12 A:執行動作$=10^2-12=88$
	答案編碼 111	答案編碼 111	答案編碼 111
D 校 S4 高流暢性	$x+78$	$\frac{x}{5}\times 44$	x^2-2x+8
	答案編碼 111	答案編碼 122	答案編碼 121

2. 應用過程—變通性

在變通性部分，取應用過程所有小題的答案一起分析。此過程中，有 61.0%的學生思考具有變通性，其中多數學生的思考為低變通性（40.5%），中、高變通性的學生比例不高（分別為 12.4%、8.1%）（見表 9）。表 14 的 D 校 S5 僅給出前 3 個適當的答案，第 4 個答案為不適當（數學錯誤）的答案，其給出的前 3 個答案中，第 1 個和第 3 個（題目要求平方）思考類群相同，第 2 個應用因數分解的思考與前面不同，這 3 個答案僅有一個具差異

的思考類型，此學生的思考為低變通性。C 校 S6 在第 1、3 個答案給出的是一次、平方的基本轉換方式，是由題目刺激而得，不視為變通，然而第 2 個答案在轉換方式屬於其他類，得到中變通，再加上第 4 個答案得到不同類群編碼，此生思考為高變通性。

表 14

應用過程—變通性之學生表現

學生編號 變通性	第 1 個答案	第 2 個答案	第 3 個答案	第 4 個答案
D 校 S5 低變通性	$8x+8$	$(x-2)\times 11$	x^2-12	x 真密碼 ／ 10 ／ 20 $2x^2-x$ 黑盒子動作 ／ $2\times10^2-10$ ／ $2\times20^2-20$ 假密碼 ／ 190 ／ 780
	答案編碼 111	答案編碼 141	答案編碼 111	答案編碼 777
C 校 S6 高變通性	$8x+8$	$12\left(\frac{x}{2}+\frac{30}{x}\right)-8$	x^2-12	$4\left(\sqrt{10x}+12\right)$
	答案編碼 111	答案編碼 162	答案編碼 111	答案編碼 133

3. 應用過程—獨創性

在應用過程中，僅有 11.4%的學生思考具有獨創性，最多學生的思考為低獨創性（6.2%），其次為高獨創性（4.3%）、最少學生的思考屬於中獨創性（1.0%）（見表 9）。表 15 的這位學生結合了分式、平方根（內含一次式）、雙重根號、多樣的括號、乘除加減運算，而此式子又能正確將真密碼轉換為假密碼 88，單以此一答案此生即被歸類為高獨創性。

表 15

應用過程—獨創性之學生表現

學生編號 獨創性	第 4 個答案
C 校 S8 高獨創性	$\frac{\{(x+80)-2]180}{x}\times\frac{1}{\sqrt[3]{x-1}\times\sqrt{\sqrt{16}}}$
	答案編碼 161

4. 應用過程—創造思考指標

學生在解本研究應用過程的題目時，需透過數值轉換的推理，找出數值關係的可能關係式。由 85.7%的學生能提出至少 1 個適當答案，69.5%的學生能提出至少 2 個想法不同的適當答案，以及 61.0%的學生能提出至少 1 個與題幹中$ax+b$不同類群的適當答案之結果

來看，學生在應用過程中，一題多解的能力不差。然而僅有 11.4%的學生能夠找出獨創的關係式，此百分比遠低於形成過程的獨創性。

（三）詮釋過程中創造思考指標的樣貌

1. 詮釋過程—流暢性

在詮釋過程中，高達 83.8%的學生思考具有流暢性，特別的是最多學生的思考為高流暢性（35.2%），其次為中流暢性（30.5%）、最少學生的思考屬於低流暢性（18.1%）（見表 9）。表 16 的 B 校 S5 詮釋切入點都是運算結構，而關注的數學焦點都在平方或加減乘除這種函數形式，此生的詮釋為低流暢性。C 校 S9 給出的 3 個答案關注的數學焦點都不同，其中第 3 個答案以概括性描述猜密碼活動過程中他會採用的數學策略（把真密碼乘到和假密碼接近），是屬於「其他」這一類的答案，此生的詮釋為高流暢性。

表 16
詮釋過程—流暢性之學生表現

學生編號 獨創性	答案 編碼	給出的 3 個答案
B 校 S5 低流暢性	111	我認為畢老師的黑盒子動作比較容易被猜出來，因為國小三年級就會加減乘除了
	111	因為平方比較難
	111	猜題目這種遊戲，只要每一次輪到我，我腦中都一片空白，所以一定想不到還有平方這個方法，因此畢老師的比較簡單
C 校 S9 高流暢性	114	我覺得真密碼和假密碼的數字差越大越不容易猜出來。
	111	假密碼和真密碼的平方、倍數越相關越容易猜出來。
	147	謝老師，因為我看到真密碼和假密碼的數字時第一個會想到先把真密碼乘到和假密碼相近的數字再去加減。

2. 詮釋過程—變通性

在詮釋過程中，高達 70.5%的學生思考具有變通性，最多學生的思考為中變通性（30.5%），其次為低變通性（21.9%）、最少學生的思考屬於高變通性（18.1%）（見表 9）。表 17 的 C 校 S10 關注的數學焦點都不同，但焦點 1、2 屬於同一類群，此生僅有一次類群的變化，其詮釋為低變通性。B 校 S6 給出的 3 個詮釋中，3 個切入點都不同，分屬 3 類群，此生的詮釋為高變通性。其中第 2 個答案以自己提出來的 3 個運算結構切入來詮釋，與另 2 個答案想法差異頗大，顯示其思考的變通性頗高。

表 17

詮釋過程—變通性之學生表現

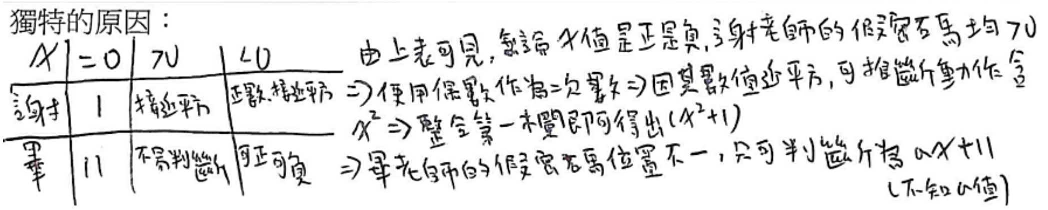
學生編號 變通性	答案 編碼	給出的 3 個答案
C 校 S10 低變通性	112	謝老師，因為並無轉太大彎
	111	x^2 很容易連想到
	115	因為畢老師.雖然只有 x2 但有再加了 11 11 這個數比較不易想且不太會被try. 反觀謝老師 x^2 有點太好猜
B 校 S6 高變通性	121	$5^2=25$，接近假密碼答案，較容易被猜出.
	147	第二個原因：11 可再用 5 整除，所以就算有想到先乘後加也可能會想成「$3x+6$」或「$4x+1$」或「$5x-4$」....
	113	數字較複雜，無法快速推論，可能性較多.

3. 詮釋過程—獨創性

在詮釋過程中，有 20.5%的學生思考具有獨創性，最多學生的思考為低獨創性（8.1%），其次為高獨創性（6.7%）、最少學生的思考屬於中獨創性（5.7%）（見表 9）。表 18 的 A 校 S1 支持謝老師較易被猜出來，給出的詮釋同時說明兩位老師的可能情形，在支持老師與論述方向之主題向度（上述並未報導此主題方向）上屬於較罕見的類型，詮釋中又將真密碼的可能數值分成 3 類，以此 3 類分別說明假密碼可能出現的數值特質，同時做出多次邏輯推論，得出謝老師運算式的次方應為偶數且常數項為 1，整體切入點及關注的數學焦點多樣，單以此一答案此生即被歸類為高獨創性。

表 18

詮釋過程—獨創性之學生表現

學生編號 獨創性	第 3 個答案
A 校 S1 高獨創性	
	答案編碼 147

4. 詮釋過程—創造思考指標

本研究在詮釋過程題目中給出 2 個代數式，使學生不需自行生成代數式，而能聚焦於解釋哪一個代數式較容易被猜出來。由 83.8%的學生能至少提供 1 個適當答案，65.7%能提供至少 2 個想法不同的適當答案，可知學生詮釋的流暢性不差，而由高達 70.5%的學生能提供至少 1 個不同類群的適當答案來看，學生在切換不同類型觀點來詮釋的變通性不差，有 20.5%的學生能夠給出獨創的詮釋，此百分比高於應用過程的獨創性。

三、各數學過程中創造思考指標統計描述

礙於篇幅受限，下面僅從 2 個面向來報導根據表 9 的研究發現。

（一）具備創造思考指標之研究發現

從是否具備創造思考指標能力的面向來看：

從數學過程來看，不論是形成、應用或是詮釋，都有最多的學生具備流暢性思考（94.3%、85.7%、83.8%），其次是變通性（51.0%、61.0%、70.5%），最少的是獨創性（42.4%、11.4%、20.5%）。

從創造思考指標來看，具備流暢性的人數在數學過程中由多到少依序為形成、應用、詮釋，但應用與詮釋比例接近；具備變通性的人數百分比以詮釋最高（70.5%），應用次之（61.0%），形成最低（51.0%），但最低者已超過 50%。

在「數學過程×創造思考指標」二維架構 3×3=9 項組合中，最低的 3 個組合都落在獨創性，其中以應用過程最低（11.4%），其次為詮釋過程（20.5%），而形成過程已有高達 42.4% 的學生具獨創性。

（二）創造思考指標程度之研究發現

從「低」、「中」、「高」等級創造思考指標的面向來看：

在「數學過程×創造思考指標」的 9 項組合中，僅 2 組合有依「低」、「中」、「高」創造思考力順序逐項遞減的趨勢；其他組合中比較特別的是詮釋過程的流暢性乃依「低」、「中」、「高」的順序遞增。

在「數學過程×創造思考指標」×「低、中、高」的 27 項組合中，應用過程的中流暢性組合擁有最高的百分比（43.3%）；次高為此過程的低變通性。此現象顯示學生在有明確的條件規範下可應用不同數學方法解題，但此過程中僅有 8.1%的學生具有高變通性，顯示這些方法的變化不大。

詮釋過程的中與高流暢性合計 65.7%，中與高變通性合計 48.6%，此現象超出研究團隊原本的預期，本研究所命的詮釋題應該是學生未經歷過的任務，預期上能展現多樣方法，流暢思考的學生比例應該不高。

在上述 27 項組合中，最低的幾個百分比都落在獨創性指標，其中應用過程的中獨創性（1.0%）、高獨創性（4.3%）為最低的 2 個組合，顯示學生應用數學時較不易想出獨創的方法。較為特別的是形成過程的低、中、高獨創性皆有超過 10%的比例。

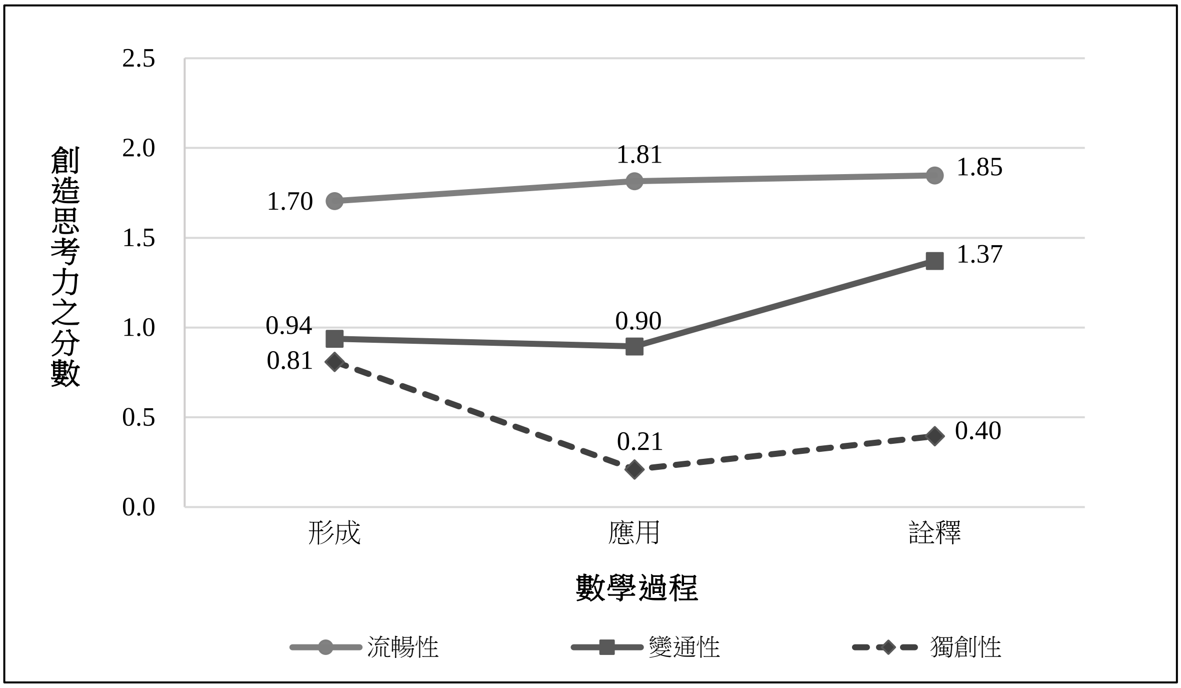
（三）創造思考指標分數之研究發現

各數學過程中各創造思考指標分數的結果如圖 2 所示。由圖 2 可得下列數點研究發現：

不論在哪個數學過程中，創造思考分數都是依流暢性、變通性、獨創性的順序下降中。在創造思考分數變化中，並未依某固定的形成、應用、詮釋順序變化。

形成、應用、詮釋過程的創造思考分數變化以流暢性變化最小（1.70~1.85）。變通性在詮釋過程的分數明顯高於形成與應用過程。獨創性則是在形成過程的分數明顯高於其他過程。獨創性僅在形成過程中得到 0.81 分（靠近低獨創性 1 分）的數據，其他過程獨創性分數皆低於 0.5 分（靠近無獨創性 0 分）。

圖 2
數學各過程與創造思考各指標組合得分



伍、研究結論

本研究從二維面向探測一般國中生在符號運算的創造思考表現，其中一維乃數學過程，含形成、應用、詮釋三個過程，另一維乃創造思考，含流暢性、變通性、獨創性三個指標，此二維共形成 9 個組合面向。研究採問卷調查法調查了 210 位中等程度以上學校的國中 8 年級學生。問卷情境為密碼遊戲，以生成數學轉換方式將真密碼轉換為假密碼來探測形成過程，以應用數學找出真假密碼的關係式來探測應用過程，以說明 2 個數學式何者較易被猜到來探測詮釋過程。在資料分析上，先透過歸納分析找出學生答題的主題向度及其下類別，作為判斷流暢性的依據，再將這些類別群組得出類群，作為判斷變通性的依據，獨創性則根據是否罕見性、思考遠近、及複雜度進行判斷。在量的資料上，本研究參考 OECD（2023）創造思考評量的 3 等級計分方式，改以 4 等級共 0、1、2、3 級分對應無、低、中、高創造思考力指標。以此計算各數學過程各創造思考指標等級的人次百分比及創造思考指標分數。

一、由研究結果反思研究架構與工具設計

本研究發現不論在哪一個數學過程，學生思考具流暢性的比例皆很高（超過八成），雖然具流暢性比例有依形成、應用、詮釋遞減的趨勢，但幅度不大，頭尾差距僅約 10%。低流暢性則以形成過程有最高的學生比例，應用與詮釋過程比例相近，此結果與我國學生在 PISA 2012 數學素養表現的結果（臺灣 PISA 國家教育研究中心，2015）相當，該研究中學生的數學素養表現以形成過程最佳，應用與詮釋過程相同。然而，當考慮到中流暢性以上，即以 2 個以上不同想法解題時，就不再有上述趨勢；達中流暢性以上等級的學生以形成過程最少，僅五成多，詮釋過程次之，應用過程約七成為最多。此研究結果可看出來，生成 1 個想法這種偏向數學能力的表現，與生成多個想法這種偏向數學創造能力的表現，在各數學過程中的相對優劣趨勢不相同。這個結果也支持了學者專家研究發現數學能力與數學創造思考力不同的論點（Haylock, 1997）。

具變通性學生普遍較具流暢性的學生少，但形成、應用、詮釋過程中，學生具變通性的比例都至少達到五成，且由達五成、六成、七成依序遞增，此變化趨勢恰與具流暢性相反。本研究變通性是根據類群判斷，具變通性表示學生可以產生跨類群的想法，此研究結果顯示產生跨類群的想法與產生不同的想法，在跨數學過程中的變化有相反的趨勢。如果本研究僅將解題視為一個整體而未將各數學過程獨立探測，則將無法獲得此研究結果。

獨創性表示產生新穎獨特的想法，在數學領域本來就較難，但有高達四成的學生在形成過程中思考具獨創性，詮釋、應用過程則分別有二成、一成。此結果顯示，在形成過程學生的獨創性頗高，但此比例仍低於 Tabach 與 Friedlander（2017）研究數學式變形中 9 年級具獨創性的學生比例，然而該研究除純粹從數學的內容探測外，其判斷獨創性的標準也與本研究差異頗大，例如，該研究判定將「$7-2(x-3)$」變形為「$-2x+13$」為中獨創性，變形為「$2(-x+3)-7$」為高獨創性，考量台灣學生的學習經驗，本研究認為前者僅作展開與化簡，非變通性也非獨創性，後者僅會被視為變通性而非獨創性。不同國情在判斷創造思考指標上，是否應有其自我因應的準則，而非一味的採用它國研究的方法乃一個值得探討的問題。

形成過程著重在生成數學方式以表達情境脈絡中的狀況，本研究聚焦「生成」主軸，學生僅需提供其創造思考的產物，不須對其產物進行後續的解題過程，由研究結果來看，此題的高流暢性顯示題目單獨看形成過程時，學生在不需要後續解出答案的壓力下，產生不同想法的能力頗高。應用過程的題目若牽涉到應用國中數學，頗容易讓學生產生尋求專家解法的思維，成為對一般學生來說困難的一題多解問題，降低了創造的空間，未了免於落入此窘境，本研究剖析應用與創造的交融，發展出讓學生自己透過數值轉換的「推理」與「探究」，以找出數值關係的可能關係式（可有無限多種）。由研究結果來看，約七成的學生能提出少 2 個以上不同的想法，超過六成的學生想法具跨類群的變通性，此研究結果顯示在應用過程中加入探究的元素，學生在流暢性與變通性的表現都不差。詮釋過程著重在評鑑與解釋數學結果，本研究在題目中即給出 2 個代數式，學生不需自行生成代數式，

而能聚焦於評鑑比較所給代數式的差異，解釋哪一個代數式較容易被猜出來。由超過八成學生能至少提供 1 個想法，且高達七成的學生想法具跨類群的變通性來看，學生只專注於詮釋時，流暢性與變通性的表現都不差。

本研究在命題情境的選取上依素養導向的原則進行命題。此題密碼情境的設計與國中數學課程、學生生活經驗、資訊科技領域習習相關，解題時牽涉到數學物件的生成（形成）、數學物件的探找與應用（應用）、數學物件的解析評論（詮釋）等等。由學生的低空白率來看，題目提供學生良好的答題意願，而由上述研究結果來看各題目也提供學生良好的創造思考空間。

學者針對數學創造思考的評量研究，多數強調想出多元而新穎的解法，在中學階段數學概念較難，未免學生無法解題，往往只能使用國小所學內容（例如：面積公式、切割圖形），這些從中學階段來看較類似智力測驗題目，除此許多評量題目的設計會採用前人研究中的題目，優點是已經受到認可，缺點則是測的題目重疊性較高，例如彭淑玲等人（2015）所使用的題目與 Haylock（1987a, 1987b, 1997）題目就有重疊的部分；相對來看，本研究採用素養導向及二維命題架構，產生發展與前輩學者不同題目的需求，進而發展出根據各數學過程以我國中學階段的符號運算概念命題之作法。由上述研究結果來看，獨立出數學過程的研究架構與命題方式是可以繼續嘗試、發展與研究的方向。

二、創造思考與數學過程交織之表現

由學生的創造思考（平均）分數來看，在形成、應用、詮釋這 3 個數學過程中，創造思考分數皆依流暢性、變通性、獨創性的順序下降。此結果符合研究的預期，越能遠距連結物件越有機會得到變通或獨創的產物，也就越不容易出現，同時也符合其他學者專家研究的結果（Kwon et al., 2006）。

從流暢性、變通性、獨創性這三個指標來看創造思考分數，發現在形成、應用、詮釋過程中，這些指標分數的高低並沒有一致的趨勢。（一）流暢性：流暢性在三個過程中的分數相差不大，顯示學生不管在哪個數學過程，都能流暢地產生多個想法。（二）變通性：變通性在詮釋過程的分數較其他兩個過程高出許多，這顯示當要學生解釋數學式在情境中功用的差異時，學生很容易切換不同的角度，例如一個角度以數學式運算的難易度解釋，另一個角度以數學式結構或概念上的難度解釋，而在要形成數學式/方法或應用數學找出數學式上，學生就較難切換到不同的角度。（三）獨創性：獨創性則以形成過程分數最高，應用過程分數最低，此現象顯示，當學生面對形成過程中可以「天馬行空」生成數學式/方式時，正如同面對「桌子」的功用這種社會領域題目，很容易產生許多適當的答案；然而在應用過程這種較接近數學課程的題目時，學生可能因學習經驗較豐富，思考較為固著，較難產生獨創性的思考。

整體來說，三個數學過程中，學生在應用過程的創造思考表現較差，平均流暢性接近中流暢性、平均變通性接近低變通性，平均獨創性接近無獨創性。除此，本研究最高空白

率的題目落在應用過程的第 4 題，該題要求學生寫出獨特、含有平方根且能將 10 轉換到 88 的數學式，平方根對學生來說困難度本就較高，上述結果可能顯示與數學課程越接近的題目，學生創造思考表現越差，然而這樣的假設，仍需要更多的研究加以證實。

若能將之應用在數學課堂中，將可開闊學生與教師的視野，同時由創造所產生的喜悅將可增加學生上課的意願及參與度。

三、未來應用與研究限制

我國 108 課綱著重素養導向的課程，與國際上 PISA 的素養導向評量趨勢一致，國內學者專家因應這樣的趨勢，在研究上納入符合素養導向的教學活動，例如臆測活動或數學遊戲以探討數學創造力的培養與評量（林碧珍，2020；陳嘉皇，2005）；另吳昭容與陳如珍（2008）則也以擬題這種素養導向的試題探討學生的數學創造力。本研究在因應素養導向的趨勢上，並未跟隨這些前輩的腳步，嘗試開創新的研究思路，將 PISA 著重素養與推理的數學過程獨立來看，產生了本研究使用的二維結構。此結構可使我們由數學過程中不同的子過程來看學生的創造思考力。

這樣的研究作法開創了不同的研究思路，也使得研究能以更豐富的角度看學生在數學解題中創造思考力，進而引發更深入的研究構想。舉例來說，本研究上述發現，具流暢性與具變通性學生在跨數學過程中比例增減具有相反的趨勢，本研究群認為應可有更多的研究探測此結果的正確性及其背後的原因；是否可能因為學生在情境中能流暢地想出數學產物時，較不須深入思考以致雖能產出不同的想法，但想法較不易跨類群？或者是否因為這些不同數學過程的特質使得學生的思考在各過程中本就會有較易產生流暢想法或較易產生跨類群想法的差異？而在詮釋過程中看創造力是一個新的主題，較相近的研究乃融入與詮釋有關的活動於教學中，其中 Novita 與 Putra（2016）應用類似 PISA 試題的題目於國小教學活動中並要求學生解釋理由，但此研究並未特別報導學生詮釋或解釋的內容或學生創造思考指標表現；而林碧珍（2020）在國小課堂的臆測活動也含有詮釋成分，但她的研究並未以獨立的紙筆測驗評量，也未聚焦於詮釋過程面向，由此可知學界需要有更多獨立探討詮釋過程數學創造力的研究以便更了解學生的詮釋行為。

由學生在本研究題目的表現可知學生答題意願及創造思考表現皆不差，這樣的作法可以應用到實際教學中，例如；呼應本研究形成過程中具獨創性學生高達四成的結果，教師不需要每次都讓學生解一個完整的題目，而是由學生針對題目先生成各式各樣的解題想法，即使有獨創想法不易解出也可接受，再選擇一種想法進行解題；又如，呼應本研究詮釋過程高變通性的結果，教師可考慮給出不同的解法，由學生從不同的角度詮釋解法的優缺點或特點，增加學生的思考面向。針對傳統評量較常出現的應用數學解題，呼應本研究七成學生達中流暢性以上等級的結果，教師可融入本研究命題中的探究元素，使學生在解題時能產生多個且跨類群的想法。除此，類似本研究中的素養導向數學創造力題目，可用在課堂上作為創造力培養活動的題材。學者專家研究結果顯示，納入開放式、探索式、創造性

問題教學策略後，學生在數學創造力的分數表現都有統計上顯著的增加（Kwon et al., 2006; Silver, 1997）。

本研究受限於題目新穎，閱讀量大，學生要發想新穎的想法需要時間與耐性，故解題任務僅限縮在解密碼的單一情境，每個過程也僅涵蓋少數題目，後續研究可朝發展更多情境任務並應用國際研究以題群來施測的方式努力。除此，由本研究在詮釋提供的答案來看，部分學生未以代數符號表達數學式，部分學生答案簡略，一個值得研究的問題是如果將精進性加研究議題，學生的詮釋產物是否不具或是僅具低精進性？除此，如果把精進性也加入研究指標架構中，是否能在不同的過程中都發展出良好創造空間的試題？這些都是值得嘗試的研究領域。

誌謝

感謝國家科學及技術委員會提供經費補助專題研究計畫「21 世紀技能的評量與調查研究：以數量相關素養為內容 & 子計畫 1：創造思考技能的評量與調查研究：以數量相關素養為內容」（編號：MOST 110-2511-H-003-007-MY3）。感謝參與研究計畫的所有數學教師、中學生、研究生與助理的協助與支持。

參考文獻

吳昭容、陳如珍（2008，10 月 4 日）。**從擬題看三年級學童的數學創造力**（口頭發表論文）。台灣心理學會第 47 屆年會，台北，臺灣。[Wu, C.-J., & Chen, R.-J. (2008, October 4). *Exploring the mathematical creativity of third graders through problem posing* (Paper presentation). 47th Annual Meeting of the Taiwan Psychological Association, Taipei, Taiwan. (in Chinses)]

林碧珍（2020）。學生在臆測任務課堂表現的數學創造力評量。**科學教育學刊，28**（S），429−455。[Lin, P.-J. (2020). Assessment of students' mathematical creativity in speculative task classroom performance. *Journal of Science Education*, *28*(S), 429−455. (in Chinese)] https://doi.org/10.6173/CJSE.202012/SP_28.0002

陳李綢（2006）。國小數學創造力診斷與認知歷程工具研發。**教育心理學報，38**（1），1−17。[Chen, L.-C. (2006). Developing test tools to analyze and diagnose mathematical creativity in elementary students. *Bulletin of Educational Psychology*, *38*(1), 1−17. (in Chinese)] https://doi.org/10.6251/BEP.20060503

陳嘉皇（2005）。數學遊戲及其在課堂上的應用。**台灣數學教師電子期刊，1**，22−29。[Chen, C.-H. (2005). Mathematics games and their application in the classroom. *Taiwan Journal of Mathematics Teachers*, *1*, 22−29. (in Chinses)] https://doi.org/10.6610/ETJMT.20050301.04

彭淑玲、陳學志、黃博聖（2015）。當數學遇上創造力：數學創造力測量工具的發展。**創造學刊**，**6**（1），83−107。[Peng, S. L., Chen, H. C., & Huang, P. S. (2015). When mathematics encounters creativity: The development of a measuring tool for mathematical creativity. *Journal of Creativity*, *6*(1), 83−107. (in Chinese)]

臺灣 PISA 國家研究中心（主編）（2015）。**臺灣 PISA 2012 結果報告**。心理出版社。[Taiwan PISA National Center. (Ed.). (2015). *Taiwan PISA 2012 national report*. Psychological Publishing Co., Ltd. (in Chinese)]

劉宣谷（2015）。數學創造力的文獻回顧與探究。**臺灣數學教育期刊**，**2**（1），23−40。[Liu, H.-K. (2015). Survey and discussion of mathematical creativity. *Taiwan Journal of Mathematics Education*, *2*(1), 23−40. (in Chinese)] https://doi.org/10.6278/tjme.2050313.002

Albert, R. S., & Runco, M. A. (1998). A history of research on creativity. In R. J. Sternberg (Ed.), *Handbook of creativity* (pp. 16–32). Cambridge University Press. https://doi.org/10.1017/CBO9780511807916.004

Amabile, T. M., & Tighe, E. (1993). Questions of creativity. In J. Brockman (Ed.), *Creativity* (pp. 7–27). Simon & Schuster.

Azis, A., & Nurlita, M. (2017). *Symbol language in learning math in school*. Proceedings of the International Seminar 2017 on Management, Education and Entrepreneurship for Global Competitiveness (ISMEEGC 2017), 101–105. https://doi.org/10.17605/OSF.IO/M8YH6

Baer, J. (2016). Creativity doesn’t develop in a vacuum. In B. Barbot (Ed.), *Perspectives on creativity development. New Directions for Child and Adolescent Development, 151*, 9–20. https://doi.org/10.1002/cad.20151

Barron, F. (1955). The disposition toward originality. *Journal of Abnormal and Social Psychology, 51*(3), 478–485. https://doi.org/10.1037/h0048073

Bruner, J. S. (1966). *Toward a theory of instruction*. Harvard University Press.

Cropley, A. J. (1992). *More ways than one*: *Fostering creativity*. Ablex Publishing Corporation.

Douglas, H., Headley, M. G., Hadden, S., & Lefevre, J. A. (2020). Knowledge of mathematical symbols goes beyond numbers. *Journal of Numerical Cognition*, *6*(3), 322–354. https://doi.org/10.5964/jnc.v6i3.293

Ervynck, G. (2002). Mathematical Creativity. In D. Tall (Ed.), *Mathematics education library, vol 11. Advanced mathematical thinking* (pp. 42–53). Kluwer Academic. https://doi.org/10.1007/0-306-47203-1_3 (Original work published 1991)

Guilford, J. P. (1950). Creativity. *American Psychologist, 5*(9), 444–454. https://doi.org/10.1037/h0063487

Guilford, J. P. (1956). The structure of intellect. *Psychological Bulletin, 53*(4), 267–293. https://doi.org/10.1037/h0040755

Guilford, J. P. (1968). *Intelligence, creativity, and their educational implications*. Robert R. Knapp.

Haylock, D. W. (1978). An investigation into the relationship between divergent thinking in non-mathematical and mathematical situations. *Mathematics in School, 7*(2), 25. https://www.jstor.org/stable/30213375

Haylock, D. W. (1987a). A framework for assessing mathematical creativity in school children. *Educational Studies in Mathematics, 18*(1), 59–74. https://doi.org/10.1007/BF00367914

Haylock, D. W. (1987b). Mathematical creativity in schoolchildren. *The Journal of Creative Behavior*, *21*(1), 48–59. https://doi.org/10.1002/j.2162-6057.1987.tb00452.x

Haylock, D. W. (1997). Recognizing mathematical creativity in schoolchildren. *ZDM–Mathematics Education*, *29*(3), 68–74. https://doi.org/10.1007/s11858-997-0002-y

Hollands, R. (1972). Educational technology: Aims and objectives in teaching mathematics [Cont.]. *Mathematics in School*, *1*(6), 22–23. https://www.jstor.org/stable/30210845

Jeon, K. N., Moon, S. M., & French, B. (2011). Differential effects of divergent thinking, domain knowledge, and interest on creative performance in art and math. *Creativity Research Journal*, *23*(1), 60–71. https://doi.org/10.1080/10400419.2011.545750

Kattou, M., Kontoyianni, K., Pitta-Pantazi, D., & Christou, C. (2013). Connecting mathematical creativity to mathematical ability. *ZDM–Mathematics Education*, *45*(2), 167–181. https://doi.org/10.1007/s11858-012-0467-1

Kaufman, J. C., & Beghetto, R. A. (2009). Beyond big and little: The four C model of creativity. *Review of General Psychology*, *13*(1), 1−12. https://doi.org/10.1037/a0013688

Kim, H., Cho, S., & Ahn, D. (2004). Development of mathematical creative problem solving ability test for identification of the gifted in math. *Gifted Education International, 18*(2), 164–174. https://doi.org/10.1177/026142940301800206

Kim, S., Chung, K., & Yu, H. (2013). Enhancing digital fluency through a training program for creative problem solving using computer programming. *The Journal of Creative Behavior*, *47*(3), 171–199. https://doi.org/10.1002/jocb.30

Krosnick, J. A. (2018). Questionnaire Design. In D. L. Vannette, & J. A. Krosnick (Eds.), *The palgrave handbook of survey research* (pp. 439–456). Palgrave Macmillan. https://doi.org/10.1007/978-3-319-54395-6_53

Krutetskii, V. A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in schoolchildren*. University of Chicago Press.

Kwon, O. N., Park, J. H., & Park, J. S. (2006). Cultivating divergent thinking in mathematics through an open-ended approach. *Asia Pacific Education Review*, *7*(1), 51–61. https://doi.org/10.1007/BF03036784

Laycock, M. (1970). Creative mathematics at Nueva. *The Arithmetic Teacher*, *17*(4), 325–328. https://doi.org/10.5951/AT.17.4.0325

Lee, K. S., Hwang D. J., & Seo, J. J. (2003). A development of the test for mathematical creative problem solving ability. *Journal of the Korea Society of Mathematical Education Series D: Research in Mathematical Education*, *7*(3), 163–189. https://koreascience.kr/article/JAKO200311921974337.page

Leikin, R. (2009). Exploring mathematical creativity using multiple solution tasks. In R. Leikin, A. Berman, & B. Koichu (Eds.), *Creativity in mathematics and the education of gifted students* (pp. 129–145). Brill. https://doi.org/10.1163/9789087909352_010

Leikin, R. (2013). Evaluating mathematical creativity: The interplay between multiplicity and insight. *Psychological Test and Assessment Modeling*, *55*(4), 385–400.

Leikin, R., & Lev, M. (2013). Mathematical creativity in generally gifted and mathematically excelling adolescents: What makes the difference? *ZDM–Mathematics Education*, *45*(2), 183–197. https://doi.org/10.1007/s11858-012-0460-8

Mann, E. L. (2005). *Mathematical creativity and school mathematics: Indicators of mathematical creativity in middle school students* [Unpublished doctoral dissertation]. University of Connecticut.

Mann, E. L. (2006). Creativity: The essence of mathematics. *Journal for the Education of the Gifted*, *30*(2), 236–262. https://doi.org/10.4219/jeg-2006-264

Mednick, S. A. (1962). The associative basis of the creative process. *Psychological Review*, *69*(3), 220–232. https://doi.org/10.1037/h0048850

Molad, O., Levenson, E. S., & Levy, S. (2020). Individual and group mathematical creativity among post-high school students. *Educational Studies in Mathematics*, *104*(2), 201–220. https://doi.org/10.1007/s10649-020-09952-5

Novita, R., & Putra, M. (2016). Using task like PISA's problem to support student's creativity in mathematics. *Journal on Mathematics Education, 7*(1), 31–42. https://doi.org/10.22342/jme.7.1.2815.31-42

Organisation for Economic Cooperation and Development. (2023). *PISA 2022 assessment and analytical framework*. OECD Publishing. https://doi.org/10.1787/dfe0bf9c-en

Partnership for 21st Century Skills. (2011). *21st century skills map* (ED543032). ERIC. https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED543032.pdf

Poincaré, H. (1952). *Science and method*. Thomas Nelson and Sons.

Sari, V. T. A., & Hidayat, W. (2019). The students' mathematical critical and creative thinking ability in double-loop problem solving learning. *Journal of Physics: Conference Series*, *1315*, 012024. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1315/1/012024

Schmidt, W. H., Houang, R. T., Sullivan, W. F., & Cogan, L. S. (2022). When practice meets policy in mathematics education: A 19 country/jurisdiction case study. *OECD education working papers* (No. 268). OECD Publishing. https://doi.org/10.1787/07d0eb7d-en

Schoevers, E. M., Kroesbergen, E. H., & Kattou, M. (2020). Mathematical creativity: A combination of domain-general creative and domain-specific mathematical skills. *The Journal of Creative Behavior*, *54*(2), 242–252. https://doi.org/10.1002/jocb.361

Silver, E. A. (1997). Fostering creativity through instruction rich in mathematical problem solving and problem posing. *ZDM–Mathematics Education*, *29*(3), 75–80. https://doi.org/10.1007/s11858-997-0003-x

Silvia, P. J., Winterstein, B. P., Willse, J. T., Barona, C. M., Cram, J. T., Hess, K. I., Martinez, J. L., & Richard, C. A. (2008). Assessing creativity with divergent thinking tasks: Exploring the reliability and validity of new subjective scoring methods. *Psychology of Aesthetics, Creativity and the Arts*, *2*(2), 68–85. https://doi.org/10.1037/1931-3896.2.2.68

Sriraman, B. (2005). Are giftedness and creativity synonyms in mathematics? *Journal of Secondary Gifted Education*, *17*(1), 20–36. https://doi.org/10.4219/jsge-2005-389

Stein, M. I. (1953). Creativity and culture. *The Journal of Psychology*, *36*(2), 311–322. https://doi.org/10.1080/00223980.1953.9712897

Sternberg, R. J. (2003). Creative thinking in the classroom. *Scandinavian Journal of Educational Research*, *47*(3), 325–338. https://doi.org/10.1080/00313830308595

Tabach, M., & Friedlander, A. (2017). Algebraic procedures and creative thinking. *ZDM–Mathematics Education*, *49*(1), 53–63. https://doi.org/10.1007/S11858-016-0803-Y

Torrance E. P. (1970). *Encouraging creativity in the classroom*. W. C. Brown Company.

Volle, E. (2018). Associative and controlled cognition in divergent thinking: Theoretical, experimental, neuroimaging evidence, and new directions. In R. E. Jung & O. Vartanian (Eds.), *The Cambridge handbook of the neuroscience of creativity* (pp. 333–360). Cambridge University Press. https://doi.org/10.1017/9781316556238.020

Williams, J. D., Harlow, S. D., & Borgen, J. S. (1971). Creativity, dogmatism, and arithmetic achievement. *The Journal of Psychology*, *78*(2), 217–222. https://doi.org/10.1080/00223980.1971.9916906

Woodrow, D. (1982). Mathematical symbolism. In R. R. Skemp (Guest Ed.), *Understanding the symbolism of mathematics. Visible Language, 16*(3), 289–302. https://journals.uc.edu/index.php/vl/article/view/5349/4213

蘇意雯、宮川健（2024）。
日本「遺題繼承」傳統下的「蟲蛀算」：經由古文本以及大學生實作之分析。
臺灣數學教育期刊，**11**（1），37–66。
doi: 10.6278/tjme.202404_11(1).002

日本「遺題繼承」傳統下的「蟲蛀算」：經由古文本以及大學生實作之分析

蘇意雯[1]　　宮川健[2]
[1]臺北市立大學數學系
[2]日本早稻田大學教育・綜合科學學術院

「遺題繼承」的傳統是促使日本傳統數學（和算）發展的一大因素，和算家在所著的和算書卷末，提出一些數學難題，讀者經過努力研究，解決難題之後，一般要著解答之書，並在卷末提出難度更高的問題，讓有心人士去研究解決。本研究從教學轉置觀點，探究日本「遺題繼承」傳統下的蟲蛀算問題，並展示如何將這些原典及其脈絡轉置於今日的數學教學和學習。本研究運用 Yves Chevallard 及後續學者所提出的教學人類學理論，分析江戶時代和算家所產生的「原始」數學知識，發展兩節課 100 分鐘的大學課程。研究者介紹日本「遺題繼承」的傳統，以及「蟲蛀算」問題；經由學習工作單分析學生實際解題所使用的數學知識，也運用學習意見表探討大學數學系學生對於「蟲蛀算」學習之回應。經由研究得知，行知模型可做為分析數學史文本及刻畫學生解題所用數學知識之工具；「蟲蛀算」主題，也可以讓學生經驗到數學思考、數學的文化體驗以及對數學的觀點三個面向的潛能。

關鍵字：行知模型、和算、教學人類學理論、遺題繼承、蟲蛀算

通訊作者：蘇意雯，e-mail：yiwen@uTaipei.edu.tw
收稿：2023 年 10 月 23 日；
接受刊登：2024 年 3 月 22 日。

Su, Y. W., & Miyakawa, T. (2024).
“Mushikuizan” under the Japanese tradition of “bequeathed problems”: Through the analysis of ancient texts and university students’ work.
Taiwan Journal of Mathematics Education, *11*(1), 37–66.
doi: 10.6278/tjme.202404_11(1).002

“Mushikuizan” Under the Japanese Tradition of “Bequeathed Problems”: Through the Analysis of Ancient Texts and University Students’ Work

Yi-Wen Su [1]　　Takeshi Miyakawa [2]
[1] Department of Mathematics, University of Taipei
[2] Faculty of Education and Integrated Arts and Sciences, Waseda University, Japan

The tradition of "bequeathed problems" is a major factor in promoting the development of Wasan. Japanese mathematicians put forward some unsolved problems at the end of mathematics books. Other readers who solved these problems generally wrote books about their solutions, and at the end of these books, they asked more difficult questions and encouraged those willing to study and solve them. In this study, the researchers investigate “Mushikuizan” under the Japanese tradition of “bequeathed problems” from a perspective of didactic transposition to unfold how such historical problems and contexts could be transposed to mathematics teaching and learning today. This study is conducted from the perspectives proposed within the Anthropological Theory of the Didactic developed by Yves Chevallard and subsequent scholars. Specifically, the researchers analyze the "original" mathematical knowledge produced by Japanese mathematicians in the Edo period; develop two classes in the university course introducing the tradition of Japanese "bequeathed problems" and the problems of "Mushikuizan"; and investigate students’ reactions to these classes through the worksheets comprising students' work and feedback. In the analysis, the notion of praxeology is used to better understand the mathematical knowledge required to solve “Mushikuizan” problems and the mathematical knowledge used by students. Through research, we found that the notion of praxeology can be used as a tool to analyze the historical texts of mathematics and describe the mathematical knowledge used by students to solve problems; the theme of "Mushikuizan" allows students to experience three aspects of mathematical thinking, cultural experience of mathematics, and understanding of mathematics.

Keyword: praxeology, Wasan, Anthropological Theory of the Didactic, bequeathed problems, Mushikuizan

Corresponding author：Yi-Wen Su，e-mail：yiwen@uTaipei.edu.tw
Received：23 October 2023;
Accepted：22 March 2024.

壹、緒論

在過去 40 年左右的時間裡，將數學史融入數學教育已經成為全世界新的教學實踐和具體研究活動的集中研究領域（洪萬生，1984；劉柏宏，2021；蕭文強，1992；蘇意雯，2021；Barbin et al., 2002; Barbin et al., 2020; Fauvel, 1991; Furinghetti & Paola, 2003; Gulikers & Blom, 2001; Tzanakis et al., 2002）。學者們舉出諸多理由以支持把歷史維度融入數學課程，例如激發學生在數學上的興趣、讓我們對於概念和理論有更好的瞭解、多元文化的珍視、幫助數學學習等（洪萬生，1984；蕭文強，1992；Barbin et al., 2002; Fauvel, 1991; Furinghetti & Paola, 2003; Gulikers & Blom, 2001; Tzanakis et al., 2002），時至今日，這些理由仍歷久彌新（Lim & Chapman, 2015）。

數學家兼數學史家 Morris Kline 認為一個時代的特徵在很大程度上與該時代的數學密切相關，通過把數學作為現代文明的一個有機組成部分，將能使我們對數學與現代文化之間的關係有全新的認識（Kline, 1953/1995）。日本鄰近臺灣，是國人旅遊勝地，青少年學子對於日本的影劇、動漫及電玩也不陌生。日本早期汲取中國文化，在江戶時代發展出屬於自己獨特的數學風貌，明治維新之後，積極學習及引進西方科學和數學知識，至今也在國際數學界佔有一席之地，獲得媲美諾貝爾獎的數學界大獎費爾茲獎（Fields medals）的日本學者就有小平邦彥（1954 年）、廣中平祐（1970 年）與森重文（1990 年）三人（康明昌，1991）。在深入檢視日本建立數學教育現代化制度之前，不可避免地必須面對其算學傳統，也就是利用數學史的研究來探討一個文明的特色（洪萬生，2018）。

日本數學的演進，最開始是傳承中國數學，之後日本數學家吸收中國算學，加以創新，關孝和（1645?－1708 年）於 1674 年刊行《發微算法》，日本傳統數學（和算）由此蓬勃發展。到了明治 5 年（1872 年），由於西風東漸，為了學習西洋的船堅砲利，日本政府發布近代學制，宣布廢止和算，改習洋學，1877 年東京數學會社（也就是現在的日本數學會）成立，和算從此漸為西洋數學所取（城地茂，2009）。

與同一時代的世界各地相比，江戶時代（1603－1868 年）的日本數學普及是獨佔鰲頭的，通過寺子屋，基本算術普及到全國各地（城地茂，2009）。18 世紀中期至江戶末期這一百年間，許多重要和算家因自身的算學才能，受聘擔任算學師範，或仰賴開私塾教授算學謀求生計，顯現出江戶末期數學教育普及化，也反映出數學作為一種專門之學的專業化取向（黃俊瑋，2019）。和算之所以得以發展，「遺題繼承」的傳統是一大因素。所謂的「遺題繼承」是指和算家在自己所著的和算書卷末，提出一些數學難題以示讀者，他的弟子、門人、或其他讀者在努力解決難題之後，一般會撰寫難題解答的書籍，並在書籍卷末提出難度更高的問題，讓有心人士去研究解決，從而進一步更深入的探究（蘇意雯，2009）。從日本的社會脈絡中有系統地探查其數學發展，發掘其中蘊含之數學文化特色，從中搜尋可用的數學史料編製課程，相信所得之成果也應能對數學教育工作者有所啟發。

日本全國數學教育學會 2022 年於東京早稻田大學舉辦了第 57 回研究發表會，與會中有數位學者採用「教授人間学理論」作為其研究理論，引起研究者之一的探究興趣。教學人類學理論（Anthropological Theory of the Didactic [ATD]）在過去四十年間逐漸發展成為一種數學教育學的理論，此理論的原始雛型教學轉置（didactic transposition）理論主要是由 2009 年獲頒 Hans Freudenthal 獎的法國學者 Yves Chevallard 所提出。教學轉置理論的首要貢獻之一就是明確指出，如果不考慮與學校數學重新建構有關的現象，就不可能正確解釋學校數學，而其根源必須在產生數學知識的機構中找到。吾人可以將之區分如下：數學家或其他生產者所產生的「原始」或「學術」數學知識；課程正式設計的「要教」的數學知識；教師在課堂上實際教授的數學知識和學生實際學到的數學知識，這可以同時被認為是教學過程的結束，也是新教學過程的起點（Bosch & Gascón, 2006）。

繼 Yves Chevallard 之後一些研究者也相續投入研究，Chevallard 曾於 2016 年訪問日本，並給予演講（Chevallard, 2019），也因此，日本學者也運用 ATD 理論於不同研究，例如探究式教學（Kuzuoka & Miyakawa, 2020）或是教科書分析及公開課的教學研究（Miyakawa & Winsløw, 2013）等。江戶時代的和算典籍正是古代的教科書，和算家在傳統脈絡下如何展現數學知識內容，現代教師佈置文本於課堂而學生解題中所使用的數學知識為何，如何運用教學人類學理論分析數學史文本，以俾利教學活動，也是本文想要探討的重點之一。

在數學的解題中，相信大家都接觸過數字被水漬弄髒或者是收據汙損無法辨識數據等等，需要由給定的線索推測出未知數字的題型。諸如此類問題，在日本稱為「蟲蛀算」。這個稱呼的由來是因為日本古代的紙容易被蟲蛀食，也就此應運而生了這類題型（平山諦，1956/2005）。本研究將經由「蟲蛀算」問題的文獻分析，整理製作數學史學習工作單進行教學，並探討此次教學之學生回應。研究問題如下所示：。

一、「遺題繼承」傳統下的「蟲蛀算」問題的相關文本是如何呈現？

二、運用教學人類學理論分析「蟲蛀算」文本數學知識內容的結果為何？刻畫學生解「蟲蛀算」問題所使用的數學知識情況如何？

三、大學數學系學生對於「蟲蛀算」學習之回應為何？

貳、文獻探討

在以下篇幅中，研究者將對於數學史融入數學教學、教學人類學理論，以及江戶時代日本和算特色－「遺題繼承」的傳統及「蟲蛀算」相關類題加以探討。

一、數學史融入數學教學

九年一貫數學領域課綱中曾強調「教師教學裡，引進與主題相關的數學史題材，對學童的學習會有很正面的意義，尤其能協助學童將抽象觀念具體化」（教育部，2008），現今

的十二年國教數學課綱也提到「數學史能夠幫助我們理解數學發展在不同文化的差異」（教育部，2018）。國際上對於數學史融入數學教學的關注，早在 1976 年附屬於國際數學教育委員會（International Commission on Mathematical Instruction [ICMI]）的數學史與數學教學的關聯之國際研究群（International Study Group on the Relations between the History and Pedagogy of Mathematics [HPM]）就已正式成立，每四年固定召開一次全球性的會議，利用數學史的研究成果，以及數學史與數學教育的互動，提升數學教師的教學品質與學生的學習成效（洪萬生，1998）。

當初 HPM 小組的關注和目標，迄今為止在某種程度上已有所實現，也仍然適用於今日（Barbin et al., 2020）。除了重視國際聯繫和訊息交流以及促進和刺激跨領域探究，更深入地了解數學的演變以外，通過將數學教學及數學發展的歷史聯繫起來，協助改進教學和課程、為教師的利益製作相關素材、方便獲取這些素材和歷史資料、提高人們對數學史與數學教學的相關性的認識以及促進數學的文化通路，這些目標也是現場教師可以努力的方向。事實上，在教育場域中的數學史不是一種選擇，而是一種需求，是一個理解我們的人性本質上是歷史和文化的過程之核心部分（Radford & Santi, 2022）。

承上所述，毋庸置疑，數學本身也是人類發展過程中所伴隨產生的一種智識文化（劉柏宏，2021）。至於大學教師為什麼要教數學史？經由 Braun 與 Kahn（2019）的研究發現，教師們認為數學史的課程提供了將社會正義、公平性及包容性納入數學研究的機會，可以幫助學生發展有效思維和數學溝通能力，也能以更寬廣多元的視角看待數學社群。有關於在大學課堂的 HPM 教學，Barnett 等人（2014）於大學數學系課堂使用數學原典，布置閱讀、反思、回應等任務要求學生主動置身於數學原典當時的脈絡，並與之前和現代的數學實踐比較。研究發現如此數學被學生視為一門動態的學科，體認到記號和符號也會持續隨著時代變遷。部分數學知識因應社會所需而社會化，而社會問題數學化的成果也反饋到數學本身。數學依社會進步而發展，社會因數學發展而進步（方延明，2007）。介紹數學的社會面向，正有助於學生體認數學知識與社會之關聯（蘇意雯，2015）。

研究者之一所任教學系為數學專業系所，學生理應對自身的學科之歷史發展有所認識。另外有一部分的學生畢業後是在各階段的教育領域服務，更需要了解數學之發展脈絡及概念出處，並知曉如何搜尋史料，以利未來各階段的數學教學。也因此，研究者想要藉由搜尋日本數學史料，整理素材，開發數學史課程，強化學生在數學史的相關知識，以及了解各民族數學發展和社會脈絡之交互關係，正是研究者進行本研究的初衷。

二、教學人類學理論架構

對於在本研究中，我們將探討「蟲蛀算」問題和其可能延伸之數學活動，也就是闡明此問題類型所涉及的數學知識，以及學生如何實際解決此問題。因此，本研究使用了教學人類學（ATD）中提出的行知模型（praxeology）概念。ATD 是根據起源於法國的數學教育

學傳統所構築，由於此傳統不一定廣為人知，以下我們將先展示此數學教育學傳統，接著再討論 ATD 和行知模型的概念。

（一）法國的數學教育學傳統

有關法國的數學教育學研究，法文稱為 didactique des mathématiques，英文稱為 didactics of mathematics，日文稱為数学教授学，從 1970 年左右開始發展。這項研究傳統的第一個特徵是，旨在將數學教育，也就是通常被視為數學和心理學等其他研究的應用領域，建立為一個真正的科學研究領域（Artigue et al., 2019）。創建該研究領域的研究人員，將數學教育學定義如下:「它是為了傳播人類活動（廣義）所需的數學知識的特定條件的科學。」（Brousseau, 2010），以及「教育學被定義為一門科學，仍處於起步階段，其目的是研究社會機構中行知模型傳播的條件和限制」（Chevallard & Bosch, 2019, p. xxvii）。

由上可見其目的是為了解數學教育的結構和機制，也就是數學知識或行知模型（請參閱下一節）的傳播。數學教育研究經常陷入規範性討論，包括改善數學教學和學習的方式，以及如何教授什麼樣的數學等問題，這些情況並不罕見，日本就是如此（中原忠男，2017）。處此情境中，我們重視數學教育學研究的科學性，雖然最終目標是改善數學教育，但首先應努力理解與數學教育相關的現象。

法國傳統的第二個顯著特點是，為了理解數學教育的活動，強調理論的構建，迄今為止已經建立了各種各樣的理論。例如，國際上廣為人知，並且可以說形成了法國數學教育學傳統的典型理論包括 Guy Brousseau 提出的教學情境理論（Brousseau, 1997）、Gérard Vergnaud 提出的概念領域理論（Vergnaud, 2009），以及本文所介紹 Yves Chevallard 提出的教學人類學理論（Chevallard, 2019）。這些理論並不是規定教學內容和教學方式的規範理論，而是旨在理解。

法國數學教育學傳統有許多特點，本文最後提到的第三個顯著特點是關注科學知識的本質上，並在其基礎上理解數學教育的活動。這也是為什麼經常使用「知識論」（epistemology）這個術語的原因（Gascón, 2003）。因此，迄今為止發展的理論，正如上文所示，旨在透過理論來表徵數學知識是什麼，然後試圖理解主導數學傳播機制。本文所涉及的教學人類學理論也是在這樣的背景下發展的。

（二）教學人類學概要

前文已提及，教學人類學理論主要是由在 2009 年獲頒 Hans Freudenthal 獎的法國學者 Yves Chevallard 所提出，從 1980 年左右開始，ATD 逐漸發展成為一種數學教育學理論，已有 40 多年的歷史（Bosch & Gascón, 2006; Chevallard & Bosch, 2020）。時至今日，ATD 被運用於各種知識的教學和學習等相關研究，不僅沒有侷限於數學，還包括了英語、生物學、歷史等面向（Chevallard, 2019）。國際學界會定期召開 ATD 相關會議，全球也有許多學者參與 ATD 研究。而在日本，由於 Chevallard 博士於 2016 年受邀舉辦講座和工作坊，也因此使得 ATD 成為日本數學教育學研究者熟知的理論。

ATD 源自教學轉置理論，最初旨在闡明在學校教育中，所教授數學內容的特質（Chevallard, 1991; Chevallard & Bosch, 2020）。我們通常認為所教之數學內容我們很熟悉，然而 ATD 指出，人們認為數學的性質會因被稱為「機構」的社會性群體而有所不同。例如，數學家的數學、應教導的數學、被教導的數學、和算的數學、法國學校的數學等。因此我們首要需了解數學的特質。為了理解教室內的數學教導與學習現象，吾人必須探討其如何從數學家的數學中形成，並掌握此稱之為教學轉置現象的過程。

迄今為止，在 ATD 的發展過程中，許多理論概念和工具已被建立，成為數學教育學中的重要理論，並持續發展中。這些理論工具可用於教科書分析、教師培訓、建模、探究式學習、大學數學教育等多方面的研究。而在本文中所採用的行知模型概念，是分析數學及其他人類活動的基本工具之一，尤其是為了描述教學轉置中所關注的數學特質而被創立。

（三）行知模型

在討論數學的教導和學習時，經常使用數學知識、概念和內容等不同術語來解釋教學主題。儘管所有這些術語都可以直觀地理解，但當具體詢問其內涵時，並不總是清楚它們的含義。在上述教學轉置中，被轉置的對象常常被稱為「數學知識」（Bosch & Gascón, 2006），但尚不清楚所指為何以及如何描述。因此，為了解決這個問題而引入的概念就是行知模型。也就是說，以行知模型取代「數學知識」和「數學內容」等術語。

這裡重要的是，「praxeology」（行知模型）這個詞是「praxis」（實踐）和「logos」（知識）的組合。這並不表示行知模型意味著「關於實踐的知識」，而是基於「人類活動總是可以通過實踐和知識的結合來描述」這樣的想法。也就是說，在理解知識時，不僅需要掌握數學定理和性質等理論方面，同時還需要掌握所解決的問題和方法。在教學人類學中，行知模型的概念可以用來描述人類活動，不僅僅是數學，還可以描述教師的知識和技能（Bosch & Gascón, 2006; Chevallard, 2019）。

在以下的篇幅中，我們參照不同的文獻（Chevallard, 2019; Chevallard & Bosch, 2020）更進一步探討行知模型的主要特性。

一個行知模型，具體來說是由實踐區塊和知識區塊所構成。實踐區塊由包含一個以上任務的「任務類型 T」（type of tasks）和解決該任務類型的「技法τ」（technique）組成。知識區塊是由正當化說明為何選擇前技法的「技理θ」（technology），以及解釋技理的「理論Θ」（theory）所組成。也就是說，實踐區塊可以用[T/τ]，知識區塊可以用[θ/Θ]來表示，一個行知模型可以用[T/τ/θ/Θ]來表示。

例如，以國中時學習的畢氏定理這個單元來說，常會出現已知直角三角形的兩邊的長度（例如斜邊和底邊），要求第三邊的長度（例如高）的任務類型。在這種任務類型 T 下，列出諸如 $a^2 + x^2 = c^2$ 之類的方程式並求解，是解決此任務類型的技法 τ，而畢氏定理就是正當化技法 τ 的技理θ。當然，畢氏定理本身是受到國中的平面幾何理論所支持，這些要素就構成了一個行知模型。

此外，如上所述的行知模型是僅含一個任務類別，此種單由四個要素組成的行知模型[T/τ/θ/Θ]我們稱之為「單一（pinpoint）行知模型」。另一方面，一種技理很多時候通常也可以解決不同的任務類型。也就是說，當考慮一種包含多種任務類型及其相應技法的行知模型[T_i/τ_i/θ/Θ]，我們稱之為「局部（local）行知模型」。另外，由於一種理論可以包含多種技理，我們也可以考慮由具有共同理論的多種局部行知模型組成的「區域（regional）行知模型」[T_{ij}/τ_{ij}/θ_j/Θ]。也可以考慮由多個區域行知模型組成的「大局（global）行知模型」[T_{ijk}/τ_{ijk}/θ_{jk}/Θ_k]。

透過上述不同的行知模型，這個概念不僅描述了人類活動，而且顯示了知識的結構和構成要素。因此，行知模型通常也被稱為行知組織（praxeological organization）。例如，在國中二年級幾何領域的教學內容就可以用區域行知模型來刻畫，此區域行知模型是以國二的平面幾何學為其理論，以三角形外角定理，三角形全等性質等為其技理。

有許多研究使用了行知模型的概念，主要常用於為了突顯某個國家數學教學的特徵，而對教科書所進行的分析（Bittar, 2022; González-Martín, 2021; Solis & Isoda, 2023; Takeuchi & Shinno, 2020; Wijayanti & Winsløw, 2017）。透過行知模型來刻畫在不同國家教科書中所教授的數學內容，提供了我們可明確比較的對象，允許我們從國際觀點中討論，所要教導的理論元素是什麼、所設想的活動有哪些，以及形成什麼樣的數學系統結構。例如，Takeuchi 與 Shinno（2020）根據行知組織對英國和日本的數學教科書進行了國際比較研究，針對幾何對稱的章節，揭示了對稱性以不同的方式定位。也就是說，對稱性在日本是與證明教學密切相關，而在英國則有許多跨領域的連結。

除此之外，行知模型還用於分析學生在課堂上的活動以及教師在課堂內外的活動和知識的研究（Miyakawa & Winsløw, 2013, 2019），也用於分析師資培育者的活動和知識的研究（Asami-Johansson et al., 2020），還被運用於針對研究者的活動與知識分析等相關研究（Artigue & Bosch, 2014; Wang et al., 2023）。

三、日本「遺題繼承」的傳統及「蟲蛀算」相關類題

江戶時代的日本在數學方面，創造了屬於和算的輝煌年代，這些數學家們的著述滲透著中國古代數學的營養，同時也閃耀著在中國傳統數學基礎上創新的火花（李文林，2008）。在這日本文藝復興時代，和算被視為「算道」，以藝道的形式生存與發展，此時數學流派林立，名家輩出。在關孝和與建部賢弘等江戶初期和算家的開拓下，和算逐漸改變實用算術的風格，學術性日益增強，呈現脫離中國數學知識體系而獨步發展的態勢。

日本數學家吉田光由在 1627 年出版《塵劫記》廣獲好評，由於盜版書猖獗，到了 1641 年新版的《塵劫記》，書末提出 12 個問題對有心向學的讀者挑戰，引發了和算家「遺題繼承」的風氣，成為此時期重要的和算文化與數學知識活動（城地茂，2009）。例如澤口一之在 1671 年出版目前已知第一本正確了解和操作中國天元術的日文書籍《古今算法記》，書末就留下 15 題無法以天元術求解的問題。關孝和在 1675 年初出版《發微算法》，解決了

《古今算法記》所有遺題，但只提供簡要解答，之後其弟子建部賢弘在 1685 年出版《發微算法演段諺解》，提供詳細註解，關孝和的改良代數才廣為人知（蘇意雯，2009）。

有了「遺題繼承」的傳統，再加上算學私塾林立，一方面吸引更多算學人才，同時也發展出各種新問題，在社會動因以及問題本身的內在困難度驅使之下，和算家開始學習、消納中算天元術，並研究新的方法、包含設立方程、消元與解複雜方程，用以解決各類難題（黃俊瑋，2013）。在「遺題繼承」的傳統下，「蟲蛀算」問題也出現其中，正是本研究想要探討的文本。

「蟲蛀算」問題的題型，其實早於國內的考題出現，例如國中教育會考全國試務會（2002，2006）釋出的 91 學年度第一次國中基測數學科第 24 題出現了數字被水漬弄髒的題型（如圖 1 所示），無獨有偶到了 95 學年度第二次國中基測數學科第 22 題也出現了收據汙損無法辨識數據的問題（如圖 2 所示）。

圖 1
91 學年度第一次國中基測數學科第 24 題

24. 小薰想在花園中，圍出一塊土地種玫瑰花，他以自己的位置為中心找出與他等距的甲、乙、丙三點，並測量此三點間的距離，紀錄如表(三)。表中有部分為水漬所弄髒，使得丙到甲的距離無法辨識。已知弄髒的部分為一整數，則此數字可能是下列哪一個？

(A) 3
(B) 5
(C) 6
(D) 8

表(三)

	甲到乙	乙到丙	丙到甲
距離(公尺)	1.5	7.5	[illegible]

註：引自國中教育會考全國試務會（2002）。**91 年第一次國民中學學生基本學力測驗**。https://ananedu.com/cicve2/pdf/9101m.pdf

圖 2
95 學年度第二次國中基測數學科第 22 題

22. 表(一)為小美採買火鍋料的收據，但因污損導致幾個重要數據無法辨識。根據表(一)判斷粉絲與茼蒿的數量差異為何？

(A) 粉絲比茼蒿多 2 包
(B) 茼蒿比粉絲多 2 包
(C) 粉絲比茼蒿多 4 包
(D) 茼蒿比粉絲多 4 包

表(一)

品名	售價(元/包)	數量(包)	金額(元)
綜合火鍋料	89	2	178
粉絲	39	[illegible]	[illegible]
火鍋肉片	[illegible]	3	264
金針菇	25	3	75
茼蒿	30	[illegible]	[illegible]
雞蛋	17	2	[illegible]

購買包數：16
應付總額：740

註：引自國中教育會考全國試務會（2006）。**95 年第二次國民中學學生基本學力測驗**。http://db.tp.edu.tw/bctestinfo/9502Math.pdf

在日本，「蟲蛀算」也出現於國小二年級的教科書中（一松信、岡田禕雄，2020），在臺灣亦曾進行於國小的二位數加減教學（蘇意雯，2023）。可見此種類型的問題經過設計，可適用於不同年齡層的學生。「蟲蛀算」引起人們感興趣的原因在於肯定是能夠解答的問題，而且問題的解有一個或兩個，即使有若干個也不會失去它的意義。此外就是「蟲蛀算」的問題比一目了然的問題更加吸引人（平山諦，1956/2005）。也因此，研究者想要探討在日本「遺題繼承」傳統下，原始典籍中「蟲蛀算」問題的相關文本如何呈現，並編製成學習工作單，讓學生欣賞此段歷史發展，體會數學多樣風貌，呼應數學史融入數學教學的訴求。

在本研究中，研究者除了分析在日本「遺題繼承」脈絡下「蟲蛀算」問題的發展，也嘗試運用行知模型分析此「蟲蛀算」課程之實踐歷程，展示「蟲蛀算」問題的數學知識內容和學生對此「蟲蛀算」問題的解題策略，以及學生對於「蟲蛀算」課程活動的回應。

參、研究方法

本研究採用內容分析法，在許多領域的研究，常需要透過文獻獲得資料，因此內容分析法便具有研究價值與採用的必要，主要是在解釋某特定時間某現象的狀態，或在某段時間內該現象的發展情形（王文科、王智弘，2006）。

在本研究的第一部分，研究者以內容分析的方式進行日本「遺題繼承」傳統下的「蟲蛀算」文獻相關研究。研究者從日本數學史相關文獻中，分析「遺題繼承」傳統下的「蟲蛀算」問題，並進行整理。也就是說，研究者從教學轉置觀點，探究日本「遺題繼承」傳統下的蟲蛀算問題，並思索如何將這些原典及其脈絡轉置於今日的數學教學和學習。研究者運用 Yves Chevallard 及後續學者所提出的教學人類學理論，分析江戶時代和算家所產生的「原始」數學知識，發展大學課程。

在本研究的第二部份，研究者以行知模型架構，分析探討如何將「蟲蛀算」史料編製成大學數學系數學史課程素材，以學習工作單進行的實踐歷程。學習工作單首先布置和算典籍的「蟲蛀算」問題，研究者藉由文字敘述及題目呈現，讓學生體驗日本「遺題繼承」傳統下的「蟲蛀算」，研究者也先以教學人類學的數學行知模型進行分析，接著再由學生的解題過程，檢視及分析學生的個人行知模型，並經由教學結束學生所填答的學習意見表，了解學生對於本實作活動的回應。

本研究對象為修習 111 學年度第 2 學期數學系大三開設的數學史課程之學生 21 名，包含三位外系選修的學生。研究者以兩節課 100 分鐘的時間，完成此次的「蟲蛀算」主題教學活動。第一節課研究者講述日本「遺題繼承」的傳統及「蟲蛀算」的由來，並請學生閱讀學習工作單，解決「蟲蛀算」問題中未知的部分。研究者鼓勵學生互相討論，並利用下課時間思索要如何布置「蟲蛀算」問題。

經過前一節課解決古文本中的「蟲蛀算」問題之後，第二節課研究者請學生設計屬於自己的「蟲蛀算」，並邀請一位同儕挑戰解題及相互討論。完成學習工作單任務之後，研究

者請學生填寫學習意見表，經由學習工作單及學習意見表，分析學生對於「蟲蛀算」史料的數學思考行為模式。

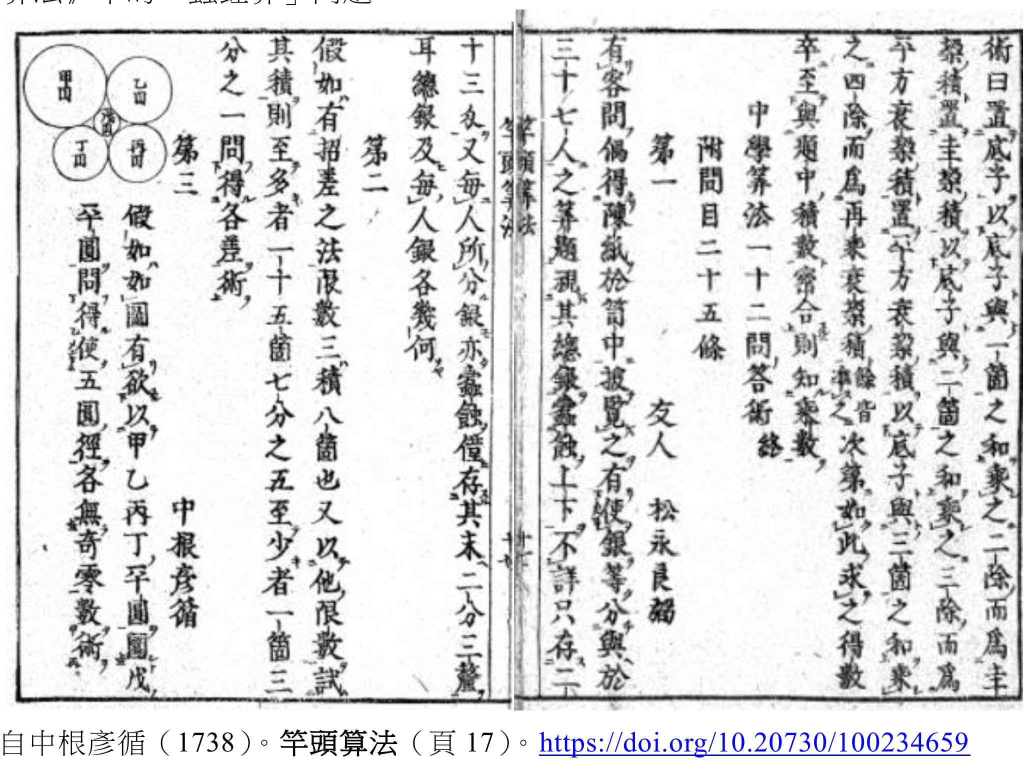
資料收集有學生填寫的學習工作單，訪談資料以及匿名填寫的課程實施學生學習意見表，課程實施學生學習意見表共有 9 題問題以五分量表方式勾選，探討學生的學習感受，並於每題其後請學生質性說明理由以符應本研究所需。第十題為質性問題，請學生寫下本活動的學習心得。資料編碼方式第一碼為資料類別，第二碼為學生年級，第三碼為系別，後兩碼為學生編號，本研究所收集之資料先由研究團隊初步整理後，再由兩位研究者進行內容分析，並就研究結果進行專家諮詢。

肆、研究結果

一、「蟲蛀算」相關問題解析

「蟲蛀算」的問題首次被印刷出版正是因為前文所提及的「遺題繼承」之傳統。和算家中根彥循為了解答青山利永於 1719 年出版的《中學算法》的 12 條提問，於 1738 年出版了《竿頭算法》一書，並於解答之後又附上了 25 條問題，其中的第一問就是有關紙條被蟲蠹蝕的問題，如圖 3 所示。這個問題在後來神谷保貞於 1745 年出版的《開承算法》中被解答出來，請詳見附錄。

圖 3
《竿頭算法》中的「蟲蛀算」問題


術曰置底子以底子與一箇之和乘之二除而爲圭
垜積置圭垜積以底子與二箇之和乘之三除而爲
平方衰垜積置平方衰垜積以底子與三箇之和乘
之四除而爲再乘衰垜積餘皆準之次第如此求之得數
卒至與題中積數密合則知乘數
中學筭法一十二問答術終
附問目二十五條
第一　交人　松永良弼
有客問偶得陳紙於笥中披覧之有使銀等分與於
三十七人之筭題視其總銀蠹蝕上下不詳只存二
十三匁又每人所分銀亦蠹蝕僅存其末二分三釐
耳總銀及每人銀各幾何
第二
假如有招差之法限數三積八箇也又以他限數試
其積則至多者一十五箇七分之五至少者一箇三
分之一問得各差術
第三　中根彦循
假如如圖有欲以甲乙丙丁平圓圍戊
平圓問得使五圓徑各無奇零數術

註：引自中根彥循（1738）。**竿頭算法**（頁 17）。https://doi.org/10.20730/100234659

隨著和算的蓬勃發展，很多流派也風起雲湧。1808 年發行，於 1861 年五刻的宅間流五世松岡能一之著作《算學稽古大全》中，將題目設計成一張以賣米換取銀兩的字據，但此字據被蟲蛀了一個大洞，請詳見附錄。設計日本「蟲蛀算」之學習工作單，讓學生知曉江戶時代將每筆買賣記錄在帳簿中的商人，可以利用「蟲蛀算」計算出原本的金額，除了體會異國文化的數學趣味，並進而探究解題，這正是課堂上可供運用的數學史素材。

二、教學設計及學習工作單問題分析

本研究「蟲蛀算」教學實作活動的設計理念是讓學生體驗數學與文化之連結，並領略「蟲蛀算」的解題樂趣。研究者以日本為例，介紹和算發展中「遺題繼承」的傳統文化，接著展示和算典籍，以實際例子讓學生體驗在「遺題繼承」氛圍中的「蟲蛀算」問題，讓學生閱讀古代文本並嘗試解題。「蟲蛀算」教學實作流程是學生每人發放一份學習工作單（請參見附錄），學習工作單的第一題和第二題是和算原典中的「蟲蛀算」問題。研究者先以簡報檔介紹日本「遺題繼承」的傳統及「蟲蛀算」的由來，接著請學生完成學習工作單，解決「蟲蛀算」問題中未知的部分。研究者以原典的閱讀理解及解題方式編製學習工作單，之後並要求學生設計屬於自己的「蟲蛀算」問題，並邀請一位同儕挑戰解題。有關於問題三學生擬題類型部分，因為課堂上分配時間不足，學生多直接仿照原典題型，受限於本文篇幅，研究者將不在此處探討。

接下來，讓我們分析「蟲蛀算」教學實作活動中的數學行知模型。在實踐區塊中，任務的類型是「蟲蛀算」問題，因為問題一和問題二都是除法問題，在本文中，我們將只針對問題一__ __23.__ __ ÷ 37 = __ __.23 分析。此處的技法可以有數種，各自對應不同的技理以及理論。舉例來說第一種是不含未知數的直式乘法，知識區塊所對應的技理是乘除互逆以及乘法直式算則，所用的理論是算術。

第二種技法是含未知數的直式乘法，知識區塊所對應的技理也是乘除互逆、乘法直式算則以及方程式的性質，所用的理論則是代數。第三種技法是不含未知數的直式除法，知識區塊所對應的技理是除法直式算則，所用的理論是算術。第四種技法是含未知數的直式除法，知識區塊所對應的技理也是除法直式算則以及方程式的性質，所用的理論則是代數。

第五種技法是使用含未知數的恆等式 $(10a + b + 2/10 + 3/100) \times 37 = 1000c + 100d + 23 + e/10 + f/100$，知識區塊所對應的技理是恆等式、方程式的性質，也有可能會運用到整數的倍數概念，或是運用到同餘概念，至於所用的理論則是代數。諸如此類種種實踐區塊和知識區塊的搭配，我們可以將「蟲蛀算」教學實作活動的數學行知模型如下表 1 所示。

表 1

「蟲蛀算」教學實作活動的數學行知模型元素

元素	對應之任務類型/技法/技理/理論
t	「蟲蛀算」問題：除法 (e.g., __ __23.__ __ ÷ 37 = __ __.23)
τ	1. 直式乘法 (A)含未知數 (B)不含未知數 2. 直式除法 (A)含未知數 (B)不含未知數 3. 使用含未知數的恆等式 $(10a + b + 2/10 + 3/100) \times 37 = 1000c + 100d + 23 + e/10 + f/100$
θ	1. 乘除互逆 2. 乘法直式算則 3. 除法直式算則 4. 恒等式 5. 方程式的性質 6. 整數的倍數概念 7. 同餘
Θ	1. 算術 2. 代數

三、學生的數學知識之分析

經過數學行知模型的分析之後，接下來的篇幅，我們將檢視學生的個人行知模型。就學生的個人行知模型而言，我們同樣以第一題為例，任務的類別都是解出__ __23.__ __ ÷ 37 = __ __.23 的「蟲蛀算」問題，但是學生們採取了不同的技法及與之對應的技理和理論，因此產生相異的個人行知模型，研究者將舉例如下。

例如從圖 4 學生的解題過程（W4M05）分析發現，學生的個人行知模型第一種技法是不含未知數的直式乘法，知識區塊所對應的技理是乘除互逆以及乘法直式算則，所用的理論是算術。可以如下表 2 所示。

圖 4

學生的個人行知模型一舉隅（W4M05）

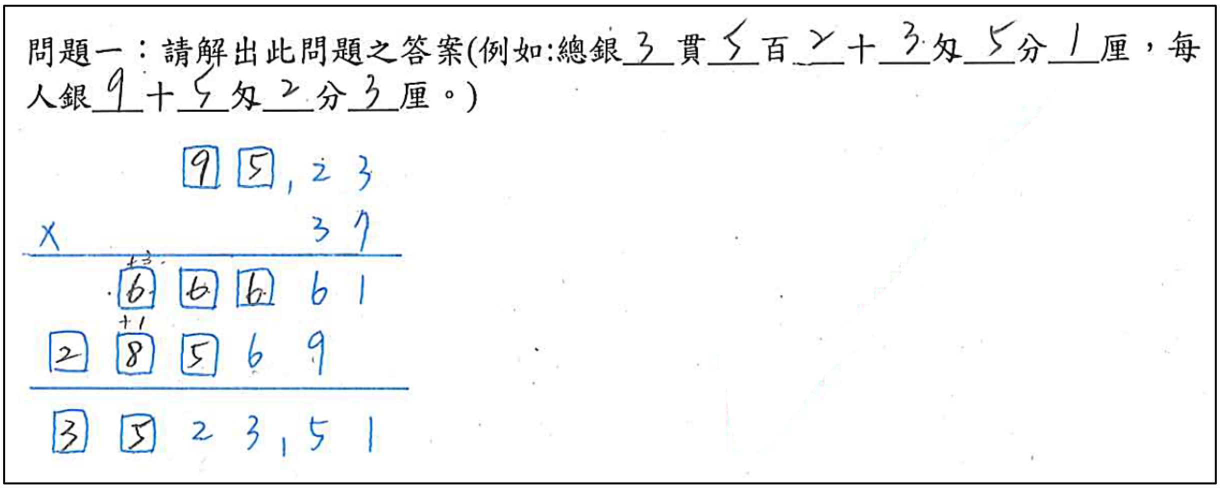


表 2

學生的個人行知模型一

元素	對應之任務類型/技法/技理/理論
t	解出__ __23.__ __ ÷ 37 = __ __.23 的「蟲蛀算」問題
τ	直式乘法：不含未知數
θ	乘除互逆、乘法直式算則
Θ	算術

個人行知模型第二種技法是含未知數的直式乘法，知識區塊所對應的技理也是乘除互逆、乘法直式算則以及方程式的性質，所用的理論則是代數。如下表 3 所示，我們並以圖 5 學生的解題過程（P4M04）加以舉例說明。

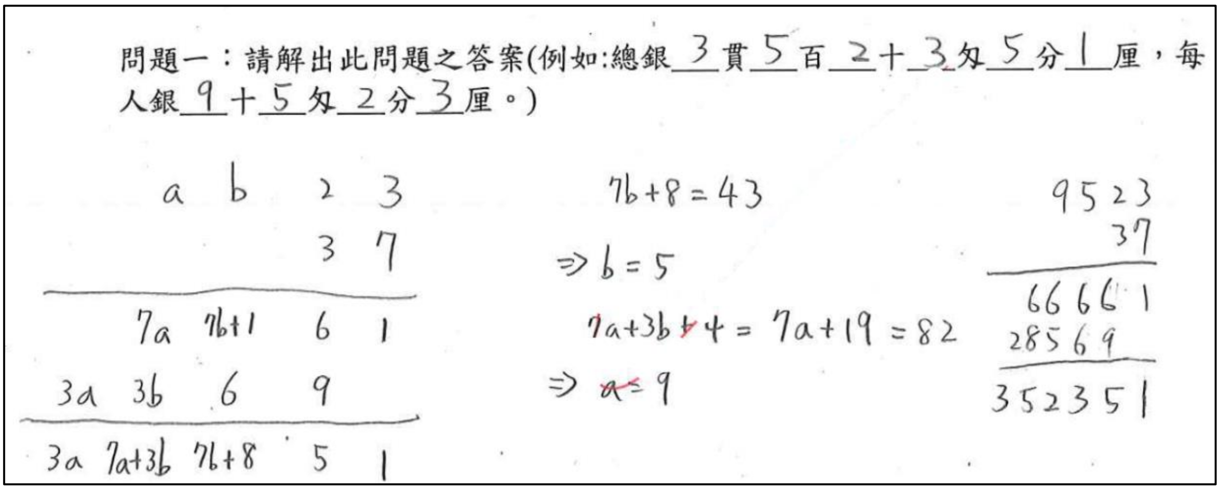
表 3

學生的個人行知模型二

元素	對應之任務類型/技法/技理/理論
t	解出__ __23.__ __ ÷ 37 = __ __.23 的「蟲蛀算」問題
τ	直式乘法：含未知數 a 和 b（以圖 5 為例）
θ	乘除互逆、乘法直式算則、方程式的性質
Θ	代數

圖 5

學生的個人行知模型二舉隅（P4M04）



個人行知模型第三種技法是不含未知數的直式除法，知識區塊所對應的技理是除法直式算則，所用的理論是算術。如下表 4 所示，我們並以圖 6 加以舉例說明。

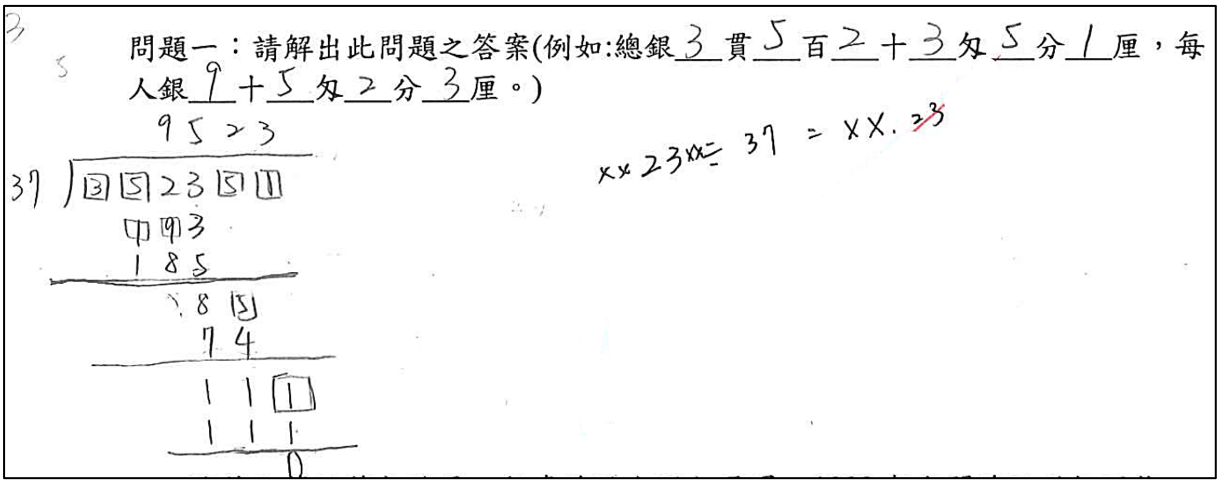
表 4

學生的個人行知模型三

元素	對應之任務類型/技法/技理/理論
t	解出__ __23.__ __ ÷ 37 = __ __.23 的「蟲蛀算」問題
τ	直式除法：不含未知數
θ	除法直式算則
Θ	算術

圖 6

學生的個人行知模型三舉隅（P3L25）



個人行知模型第四種為技法是使用含未知數的恆等式 $(10a + b + 2/10 + 3/100) \times 37 = 1000c + 100d + 23 + e/10 + f/100$，知識區塊所對應的技理是乘除互逆、恆等式、整數的倍數概念以及方程式的性質，所用的理論則是代數。如下表 5 所示，我們並以圖 7 加以舉例說明。

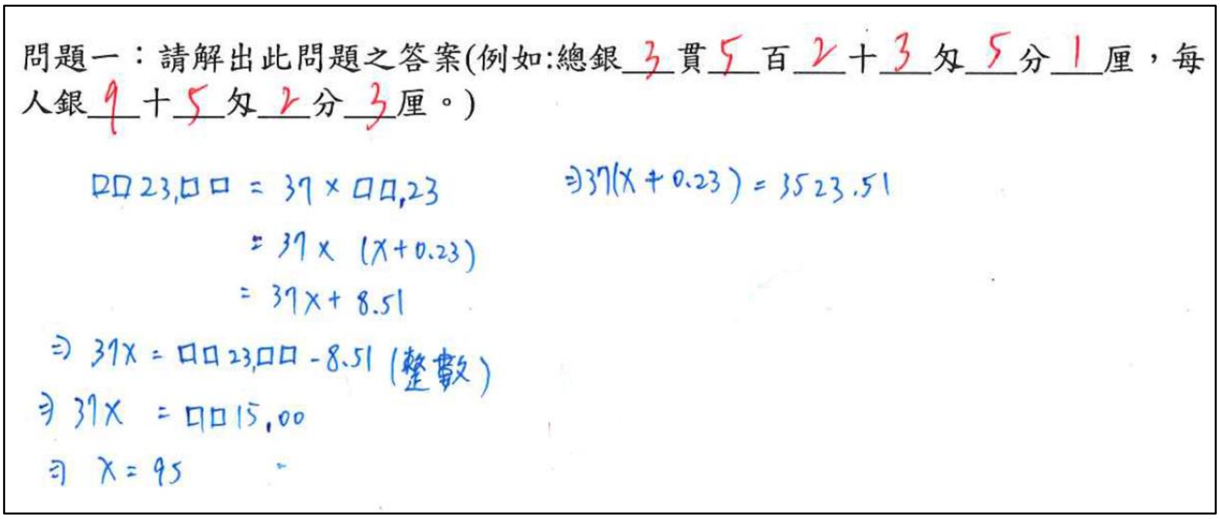
表 5

學生的個人行知模型四

元素	對應之任務類型/技法/技理/理論
t	解出__ __23.__ __ ÷ 37 = __ __.23 的「蟲蛀算」問題
τ	使用含未知數的恆等式 $(10a + b + 2/10 + 3/100) \times 37 = 1000c + 100d + 23 + e/10 + f/100$
θ	乘除互逆、恆等式、整數的倍數概念:兩數相乘若所得之積末位數字是 5，則兩數必有一數的末位數字是 5（以圖 7 為例）、方程式的性質
Θ	代數

圖 7

學生的個人行知模型四舉隅（P3M21）



使用同種技法的此類學生也有人意識到，並寫出答案不只一組解的個人行知模型。也有學生使用同種技法，並加以延伸至同餘概念的是個人行知模型第五種，技法同樣是使用直式乘法:含未知數，以及含未知數的恆等式 $(10a + b + 2/10 + 3/100) \times 37 = 1000c + 100d + 23 + e/10 + f/100$，知識區塊所對應的技理是乘除互逆、恆等式、方程式的性質及同餘，所用的理論則是代數。如下表 6 所示，我們並以圖 8 加以舉例說明，

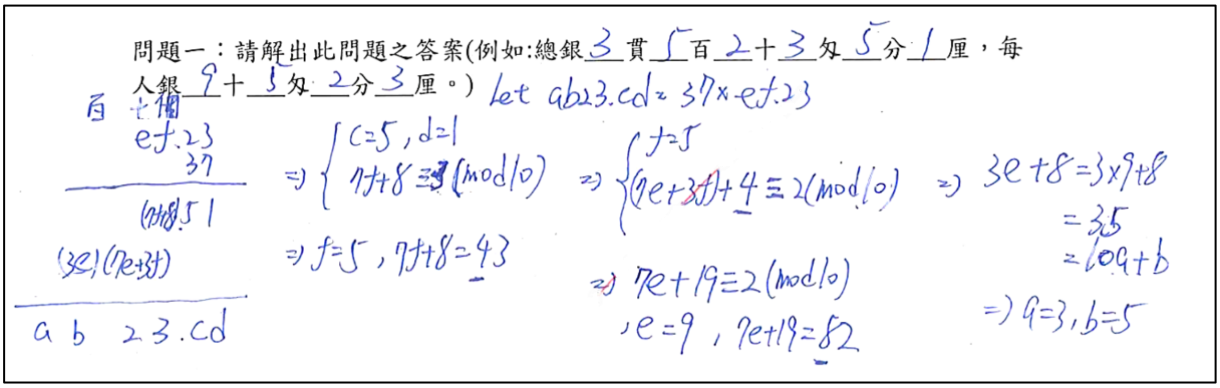
表 6

學生的個人行知模型五

元素	對應之任務類型/技法/技理/理論
t	解出__ __23.__ __ ÷ 37 = __ __.23 的「蟲蛀算」問題
τ	直式乘法：含未知數、使用含未知數的恆等式 $(10a + b + 2/10 + 3/100) \times 37 = 1000c + 100d + 23 + e/10 + f/100$
θ	乘除互逆、恆等式、方程式的性質、同餘
Θ	代數

圖 8

學生的個人行知模型五舉隅（P4M11）



以 21 份的學生學習工作單，除了一位學生（P4M12）因為當天晚到，本題沒有作答外，我們發現對照數學行知模型的實踐區塊，在技法上的採用數量分別如下表 7 所示

表 7

「蟲蛀算」教學實作活動的學生技法分類

技法（Techniques）		學生人數
1. 直式乘法	(A)含未知數	1
	(B)不含未知數	6
2. 直式除法	(A)含未知數	0
	(B)不含未知數	3
3. 使用含未知數的恆等式		10

由上表可以得知，在此教學實作活動中，教師可以利用數學行知模型，分析教材中的數學知識內容以及需要解決此問題的概念，對所布置之教材可以更清晰的掌握。此外經由學生的個人行知模型對照，我們可以發現對特定類型任務（蟲蛀算問題）的數學行知模型分析，使我們能夠刻畫出學生的個人行知模型，了解其在解決該任務時的數學知識和實踐，

可作為教師於課前教學設計之參考。也就是說，對於數學行知模型元素的分析，能使教師於授課前充分考慮學生對於此類型任務的解題技法，使備課活動更形完整。在之後教學實作中，也可以針對學生技法不足之處予以補充。

由於本研究所涉及之機構為大學場域，大學生對於數學原典中的問題經閱讀理解後，答題並沒有困難，也幾乎都能答對。因此在本研究中，研究者並不評價學生的數學知識或答題品質。主要目標是分享歷史問題，並以行知模型為工具，分析學生解題所運用的數學技法。至於學生若使用相異之技法是否會比較容易、快速得到答案，進而影響其答題品質，這些考量針對不同機構的教學者，例如中學教師或小學教師，就可以根據其教學目標，再對學生的個人行知模型逐一加以分析。

四、學生對於「蟲蛀算」數學史學習工作單之回應

學生才是學習的主體，除了「蟲蛀算」數學史學習工作單的閱讀理解歷程外，研究團隊也設計「蟲蛀算」課程實施學生學習意見表以了解學生參與「蟲蛀算」課程活動後的感想與收穫。本學習意見表有 9 題問題以五分量表方式勾選，探討學生的學習感受，為讓學生真實表示意見，以求資料的詳實，本份意見表以匿名的方式填答，題目及學生回應狀況如表 8 所示。

表 8

「蟲蛀算」學習意見表各題平均數及標準差

題項	平均數	標準差
1. 我覺得本單元能讓我體會到數學解題的樂趣。	4.43	.676
2. 我覺得本單元能讓我回顧之前所學過的數學方法。	4.14	.727
3. 我覺得本單元能幫助我了解日本本土數學「遺題繼承」的特色。	4.19	.680
4. 我覺得本單元能幫助我了解日本數學史的發展脈絡。	4.19	.602
5. 我覺得解題蟲蛀算能幫助我提升研究探究的能力。	4.05	.805
6. 我覺得設計蟲蛀算題目能幫助我提升創造力。	3.95	.740
7. 我覺得邀請同學挑戰並解題能幫助我提升溝通的能力。	3.67	.856
8. 我覺得本單元能提高我學習數學的興趣。	4.19	.602
9. 我覺得本單元能幫助我了解數學的文化面向。	4.19	.680
全部題目	4.11	.708

研究者於「蟲蛀算」課程實施學生學習意見表的每個問題後面，都請學生質性說明理由，以更了解學生真實想法。關於 21 位學生對於「蟲蛀算」數學史學習工作單之回應狀況，

其中第 1 題「我覺得本單元能讓我體會到數學解題的樂趣」同意度最高，達 4.43。學生的理由諸如「透過實作可以增加參與的興致」、「展現了很多平常沒想過的故事、公式由來、證明等，讓我能再次思考一些平常看似理所當然的題目、公式，去尋找其中的奧妙、樂趣」、「有趣又不會太複雜，有成就感」、「一些以前沒聽過的技巧讓我耳目一新」等。

同列次高分 4.19 分的共有 4 題，關於第 3 題「我覺得本單元能幫助我了解日本本土數學『遺題繼承』的特色」，學生的回應有「把困難的題目留給下一個人的方法可以使人的腦袋更進步」、「很意外數學題是會被大家重視的，還會繼承」、「日本對於數學也是有很多不同的文化，其中傳承自己解不出的問題供後人所解也很棒，隨著知識越來越多，能解出的題也越來越多，又會產生更多新的問題，新的想法」等。

關於第 4 題「我覺得本單元能幫助我了解日本數學史的發展脈絡」，學生的回應如「有，而且我覺得很新鮮，以前都沒有遇過這種問題」、「有介紹主題原由，所以有所了解」、「老師有講解一些歷史的發展關係」、「透過蟲蛀算了解日本數學史」等。

關於第 8 題「我覺得本單元能提高我學習數學的興趣」，學生的回應有「蟲蛀算數學的學習讓我多認識一個數學歷史讓我提升興趣」、「聽到很多數學故事、認識很多數學家、發覺很多數學的秘密，會讓我想挖得更深，想找更多故事來看」、「有很多有趣的地方，讓我知道數學不只是考試，一開始都是拿來解決生活上的問題的」、「認識到不同於教科書上的數學」等，也有學生表示「多少恢復一點被必修消磨掉的興趣」。

關於第 9 題「我覺得本單元能幫助我了解數學的文化面向」，學生的回應有「可以理解各式各樣不同的數學文化，很不錯」、「不同國家的不同數學知識、數學故事都很有趣，也都會受到當時環境影響有不一樣的風貌」、「了解了蟲蛀算以及遺題繼承的數學文化」、「同樣是數學，在不同地方有不一樣的文化面向，我覺得很有趣」等，更有學生認為「跟現實生活結合，我們的東西 100 年後也說不定會變成另類的蟲蛀算」。

在問卷的九個問題中，平均最低的是第 7 題「我覺得邀請同學挑戰並解題能幫助我提升溝通的能力」，只有 3.67 分。研究者之所以會布置這個題目，主要是基於十二年國民基本教育之課程發展本於全人教育的精神，以「自發」、「互動」及「共好」為理念，強調學生是自發主動的學習者，並提出「自主行動」、「溝通互動」及「社會參與」三大面向。此處的「溝通互動」是強調學習者應能廣泛運用各種工具，有效與他人及環境互動。這些工具包括了物質工具和社會文化工具，物質工具是指人造物（教具、學習工具、文具、玩具、載具等）、 科技（含輔助科技）與資訊等，至於社會文化工具則是指語言（口語、手語）、文字及數學符號等（教育部，2014）。本校之前身為師資培育學校，學生畢業後大多為國小教師，直至今日，也仍會有部分學生畢業後至各類教育現場工作，因此溝通能力的培養實需多所關注。

在本次課程活動安排中，研究者讓學生出題，並邀請身邊同儕解答，想借此增進學生數學溝通能力，但是這項任務的認同度竟是全部問題中最低的。贊同學生的回應例如「可以進一步跟同學交流」、「跟同學解釋題目會提升溝通能力」、「在解題的過程中需要雙方的溝通，可以提升溝通的能力」、「透過解題跟其他人溝通交流」等，但是也有學生認為「同

學解題很順利，不太需要溝通」、「沒什麼溝通」、「因為數學系的人都願意接受題目」等，或者是個人因素「是可以啦，但有點社恐，同學我都不太認識，要找同學解題對我來說是個大難題」。

為了更了解此類教材對於學生數學學習體驗的影響，研究者也於問卷最後布置質性問題，讓學生回顧課程活動。研究者分析學生的書面答案，並以歸納的方式整理為與數學學習相關的三個面向，分別是數學思考、數學的文化體驗以及對數學的觀點。以下將分別加以說明。

（一）數學思考面向

1. 體會到代數的威力及解法的多元

例如「雖然有些蟲蛀算的題目很難，如果有運用到代數的話倒是很好處理題目」、「在解題的過程確實都是使用過往國高中所學習的數學知識，甚至同學還使用了 mod 來解題，大家不同的解題方式讓我感覺到這就是數學有魅力的地方」、「一開始在學習的時候，有一點就是用拼湊方式的方法解答出題型，但教授利用請同學上台的方式讓我知道，原來大家有那麼多的想法，有人用代數設一些未知數，也有人跟我一樣用爆開的，讓我很佩服大家，因為一開始完全沒有想到那麼多方法」等等。

2. 關於擬題的思考

例如「設計題目時也沒那麼容易，如果沒先自己算過，會發現不了其中的錯誤，我出的題目就是這樣。是讓同學試寫時，才發現的」、「出題若照著前面有的例題出，只是改數字就不會太難，難的是要產生完全不同類型的題目（所以我沒這麼做），要想怎麼設計格子，怎麼樣才不會出現多組解，若要加入題目背景故事，甚至要想如何放入合理的內容，真的很多要想，出題目者真的很厲害」、「這次的課程令學生很有參與感，出題目的時候還需要考慮到自己出的題目是否合理」、「設計蟲蛀算時，先將想要出的等式先列出來，再效仿日本傳統的題目，將這些數值結合實際案例。同學很快就將其解出了，感覺下次應該要出難一點」等等。

（二）數學的文化體驗面向

例如「我在這次的活動中學習到了日本數學發展的脈絡，並在其中瞭解了蟲蛀算的問題跟歷史中的例子」、「從蟲蛀算的原始題目中，我們可以看到日本的傳統數學文化，讓我更加瞭解數學在不同地方的發展，解蟲蛀算也讓我有更多的思考」、「覺得前人的數學計算方式很有趣，也讓我學習到跟現在有點像的計算方式，我覺得很有趣」、「遺題繼承的部分滿有趣的，感覺像是一種競爭，解完了上一題就要再出一題給別人解」、「了解了遺題繼承以及日本的數學發展內容，以及如何用邏輯思考來解決蟲蛀算的問題」、「把自己想的題目讓同學去解答，有種刺激感，想知道對方會用什麼方法解出來，會解多快？也理解古人用這個設計問題的方式讓他人來解的心態是如何了」等等。

（三）對數學的觀點面向

例如「我也感嘆古人在算此題目時的毅力，古人的算術方式並沒有現今這麼方便簡潔，但這也是為何我們需要不斷改良數學計算證明手法的原因」、「第一次接觸蟲蛀算，一開始都只想到一些很複雜的方法，但感覺應該還有其他方法，所以就遲遲沒有下筆，後來跟同學討論後才想到直式的方法。在跟同學挑戰的過程中我覺得特別印象深刻，不但可以自己設計應用題，也可以和同學互動一起解題討論，是一堂很有趣的課程！」等等。

經由期末訪談，學生回顧課程活動也呼應了上述面向，例如「比較有印象的部分是設計題目，在設計題目有訣竅，如果填空位子不對可能會有多組答案或是可能會很難解，出題是有技巧性的」、「像小時候小明打翻水的問題，沒想到古代就有這種玩法，很有趣」、「利用現在國中設未知數的概念，算是蠻好回憶的」、「有一些題目很簡單可以很快想出答案，有些就要慢慢推敲，可能會有好幾組可能性要一個一個去配對去猜測，對於活化大腦是非常好的運動」等等。

在諸多回應中，有位學生提及對於古文本的閱讀理解有所障礙「我覺得這次在解題目遇到最大的困難點是文意上的理解，除了文言文外，我對一些單位字詞不太熟悉，所幸有老師的解釋才稍微理解。」日本原典「蟲蛀算」問題所採用之用詞與單位，與當前之學習有所差異，對有需要的學生增添白話文注解，是研究者之後可以再留意之處。

伍、研究結論與反思

本研究為探討在「遺題繼承」傳統下的「蟲蛀算」文本，以及展示於大學數學系的「蟲蛀算」問題教學實作。關於如何編製數學史教案包含學習工作單等問題，我們可以先經由普及讀物著手，對主題發展脈絡先有通盤概略的認識，接著再進一步搜尋原典資料，增添數學史文本，讓素材更為精緻豐富（蘇意雯，2021）。在本研究中，研究者先藉由平山諦（1956/2005）在《東西數學物語》一書中對於日本「蟲蛀算」的介紹，以及佐藤健一（2016）在《数の謎解き和算塾》對於「蟲蛀算」問題的探討，進而尋找和算書中的相關文本素材，進行整理探討。研究者並分析「蟲蛀算」文本的數學行知模型，並與學生解題所用數學知識做對照。研究所得的結論及反思將如下說明。

一、研究結論

（一）「蟲蛀算」問題於為解答《中學算法》遺題而出版的《竿頭算法》書中出現，並在《開承算法》書中被解答

以本研究為例，我們可知在「遺題繼承」的傳統下，和算家中根彥循（1738）為了解答青山利永《中學算法》的 12 條提問，出版了《竿頭算法》一書，並於解答之後又附上了

25 條問題，第一問就是蟲蛀算問題：「有客問，偶得陳紙於笥中，披覽之有使銀等分與於三十七人之筭題。視其總銀蠹蝕上下不詳，只存二十三匁，又每人所分銀亦蠹蝕，僅存其末二分三釐耳，總銀及每人銀各幾何。」後來由神谷保貞（1745）出版的《開承算法》中加以解答。也就是說，藉由「蟲蛀算」問題的出現及解答文本，也可以做為日本「遺題繼承」傳統展現的一個範例。

（二）行知模型可做為分析數學史文本及刻畫學生解題所用數學知識之工具

針對研究問題二，教學人類學中的行知模型在本研究所扮演之角色的回應，研究者在本研究中嘗試利用數學行知模型分析古代「蟲蛀算」數學文本，並經由實作分析學生的個人行知模型，也統計學生所使用的技法與數學行知模型對照。從此教學實踐過程中，我們發現可以經由數學行知模型，分析古代數學文本，能夠更清楚知悉此類型題目中的數學知識內容及解決問題所隱含的相關數學概念。經由實作活動之後學生的個人行知模型，可看出對於數學原典問題，學生的解題方式，也可與數學的行知模型交互對照。從本研究中，顯示出以教學人類學的行知模型可做為分析數學史文本及刻畫學生解題所用數學知識之工具。

（三）大學數學系學生對「蟲蛀算」課程學習有正向之回應

經由學生對於五分量表問卷的回應，在九個問題的平均分數為 4.11 分。從學生的質性回應，我們看到「蟲蛀算」主題，可以讓學生經驗到數學思考、數學的文化體驗以及對數學的觀點三個面向的潛能。從量化問卷、質性填答及訪談資料，顯示本次課程活動受到學生正向的肯定。

二、研究反思

（一）「蟲蛀算」教學實作改進

對於問卷回應得分最低的第七題「我覺得邀請同學挑戰並解題能幫助我提升溝通的能力」，研究者也對此進行反思。如前所述，之所以讓學生進行「蟲蛀算」擬題並邀請同儕作答，原本的設計理念是希望能培養學生數學溝通能力。除了前文提及十二年國教對溝通互動的關注，事實上，在之前的九年一貫數學學習領域（教育部，2008）中也相當強調「數學溝通能力」的培養，此處所謂的溝通包括理解與表達兩種能力，也就是說，數學溝通一方面要能了解別人以書寫、圖形，或口語中所傳遞的數學資訊，另一方面，也要能以書寫、圖形，或口語的形式，運用精確的數學語言表達自己的意思。數學科是一門基礎而重要的學科，數學溝通能力的培養對之後可能在教育領域服務的本校學生而言也就更形重要，研究者基於這樣的認知，才會布置此一活動。回顧此次的教學實施，針對設計題目的品質，研究者反思之後應該增加活動時間，要讓學生有充裕的時間思考擬題，也才能在邀請同儕進行解題的過程中，雙方能有更好的溝通互動。之後還可以進行全班分享互相評析，例如

研究者可以請學生在邀請同學解題後，將此部份學習工作單內容拍照上傳至本課程的數位學習平臺討論區，如此可與全班同學分享題型及解法，使此部份之設計對學生更有助益。

（二）從教學人類學觀點看「蟲蛀算」學習工作單之編排及分析

在學習工作單之內容編排方面，由於研究者原意是想要介紹日本「遺題繼承」的傳統，並呈現在此脈絡下的「蟲蛀算」研究，因此依年代順序安排算題。但是以數學內容來看，題目二只有整數運算（松岡能一，1861），題目一牽涉到小數（中根彥循，1738；神谷保貞，1745），因此如果是針對不同機構的教學，例如國中小學生，就可以讓兩題的先後對調，較有助於學生循序漸進解題。另外修改版本也可以先呈現根據「蟲蛀算」之原理發展的國內學生熟悉之題型與內容，例如前文提及的基測考題，再呈現日本之原典題目，如此或能讓學生不但對日本數學史與文化有所理解，也能領略文化脈絡相似之處，對「蟲蛀算」之學習更有概念。

雖然在本文我們主要使用數學行知模型的概念分析，但教學人類學還有幾個理論結構可茲運用，特別是教學行知模型的概念。此模型刻畫教師在教授一個數學行知模型的實踐，可用以幫助我們設計數學課程，如何引入問題並進行教學（Miyakawa & Winsløw, 2013, 2019）。以教學行知模型進一步分析歷史文本以及學生於此的數學實踐，正有待日後的研究。

本次教學實作分析日本數學知識的發展及內涵，著重於探討在社會文化的脈絡下，社會團體及社會氛圍如何影響數學的發展以及數學家之間的互動，意即闡釋數學家所處之學術環境如何影響數學家之研究，進而探討日本數學知識的發生與當代社會之進展等交互關係。研究者在「遺題繼承」脈絡下編製「蟲蛀算」教材，也利用教學人類學的數學行知模型分析日本「遺題繼承」傳統下的「蟲蛀算」文本相關史料，希望能展現數學多樣豐富的面貌。另外從學生的回應，我們也可得知此次「蟲蛀算」課程活動作為大學數學史素材編排的可能與不足。

誌謝

本文之得以完成，主要來自國科會的專題研究計畫（計畫編號：NSTC 111-2410-H-845-009-）之部分研究成果，在此感謝國科會之補助，也謝謝期刊審查委員給予的寶貴意見。

參考文獻

Kline, M.（1995）。**西方文化中的數學**（張祖貴，譯）。九章出版社。（原作出版於 1953 年）[Kline, M. (1995). *Mathematics in western culture* (Chang T.-K., Trans.). Chiuchang. (Original work published 1953) (in Chinese)]

方延明（2007）。**數學文化**。清華大學出版社。[Fang, Y.-M. (2007). *Mathematical culture.* Tsinghua University Press. (in Chinese)]

王文科、王智弘（2006）。**教育研究法**（增訂第十版）。五南圖書公司。[Wang, W.-K., & Wang, C.-H. (2006). *Methods of educational research* (10th ed.). Wu-Nan Book. (in Chinese)]

平山諦（2005）。**東西數學物語**（代欽，譯）。上海教育出版社。（原著出版於 1956）[Hirayama, A. (2005). *The story of east-west mathematics* (Tai, C., Trans.). Shanghai Education Press. (Original work published 1956) (in Chinese)]

李文林（2008）。絲路精神光耀千秋－《絲綢之路數學名著譯叢》導言。載於徐澤林（譯注），**和算選粹**（pp. iii–xiv）。科學出版社。[Li, W.-L. (2008). The spirit of the Silk Road shines through the ages: Introduction to "Silk Road Mathematics Classics Translation Series". In T.-L. Hsu (Trans. & Annotation), *Wasan collection* (pp. iii–xiv). Science Press. (in Chinese)]

洪萬生（1984）。數學史與數學教育。**科學月刊，15**（5），371–375。[Horng, W.-S. (1984). History of mathematics and mathematics education. *Science Monthly*, *15*(5), 371–375. (in Chinese)]

洪萬生（1998）。HPM 隨筆（一）。**HPM 通訊，1**（2），1–3。[Horng, W.-S. (1998). HPM Essay 1. *HPM TongXun*, *1*(2), 1–3. (in Chinese)]

洪萬生（主編）（2018）。**數學的東亞穿越**。開學文化。[Horng, W.-S. (Ed.). (2018). *Mathematics' journey through East Asia*. Open learning Publishing Co. (in Chinese)]

國中教育會考全國試務會（2002）。**91 年第一次國民中學學生基本學力測驗**。[National Examination Committee of Comprehensive Assessment Program for Junior High School Students. (2002). *The first basic academic ability test for national middle school students in academic year 91.* (in Chinese)] https://ananedu.com/cicve2/pdf/9101m.pdf

國中教育會考全國試務會（2006）。**95 年第二次國民中學學生基本學力測驗**。[National Examination Committee of Comprehensive Assessment Program for Junior High School Students. (2006). *The second basic academic ability test for national middle school students in academic year 95.* (in Chinese)] http://db.tp.edu.tw/bctestinfo/9502Math.pdf

康明昌（1991）。數學界的諾貝爾獎。**數學傳播，15**（1），33–38。[Kang, M.-C. (1991). The Nobel Prize in mathematics field. *Mathmedia*, *15*(1), 33–38. (in Chinese)]

教育部（2008）。**國民中小學九年一貫數學領域課程綱要**。作者。[Taiwan Ministry of Education. (2008). *Grade 1-9 curriculum guidelines (Mathematics)*. Author. (in Chinese)]

教育部（2014）。**十二年國民基本教育課程綱要總綱**。作者。[Taiwan Ministry of Education. (2014). *Curriculum guidelines of 12-year basic education: General guidelines.* Author. (in Chinese)]

教育部（2018）。**十二年國民基本教育數學領域課程綱要**。作者。[Taiwan Ministry of Education. (2018). *Curriculum guidelines of 12-year basic education: Elementary and junior high school and general senior high school (Mathematics)*. Author. (in Chinese)]

黃俊瑋（2013）。江戶時期和算發展之分期。**中華科技史學會學刊**，**18**，24–33。[Huang, J.-W. (2013). The division of time span of Wasan development in the Edo period. *Bulletin of Chinese Association for the History of Science, 18*, 24–33. (in Chinese)]

黃俊瑋（2019）。十九世紀初期和算問題的發展與特色－以齋藤宜義的《算法圓理鑑》為例。**中華科技史學會學刊**，**24**，11–20。[Huang, J.-W. (2019). The development of mathematic problems and related characteristics of Wasan in Early 19th century: Take Sato Nobuyoshi' Sampo Yenrikan as an example. *Bulletin of Chinese Association for the History of Science*, *24*, 11–20. (in Chinese)]

劉柏宏（2021）。數學人文教案培養數學文化素養之理論探討與反思。**臺灣數學教育期刊**，**8**（1），1–25。[Liu, P.-H. (2021). A theoretical and reflexive study on cultivating literacy of mathematical culture by using lesson plans from humanistic mathematics. *Taiwan Journal of Mathematics Education*, *8*(1), 1–25. (in Chinese)] https://doi.org/10.6278/tjme.202104_8(1).001

蕭文強（1992）。數學史和數學教育：個人經驗和看法。**數學傳播**，**16**（3），23–29。[Hsiao, W.-C. (1992). History of mathematics and mathematics education: Personal experience and opinions. *Mathmedia*, *16*(3), 23–29. (in Chinese)]

蘇意雯（2009）。遺題承繼，串起中日代數史。載於洪萬生、英家銘、蘇意雯、蘇惠玉、楊瓊茹、劉柏宏（主編），**當數學遇見文化**（頁 172–183）。三民。[Su, Y.-W. (2009). Bequeathed problems connect the history of algebra between Chinese and Japanese. In W.-S. Horng, J.-M. Ying, Y.-W. Su, H.-Y. Su, Q.-R. Yang, & P.-H. Liu (Eds.), *When mathematics meets culture* (pp. 172–183). SanMin. (in Chinese)]

蘇意雯（2015）。遺產分配問題的數學探究活動。**國教新知**，**62**（3），30–39。[Su, Y.-W. (2015). An exploratory study of inheritance distribution problem. *The Elementary Education Journal*, *62*(3), 30–39. (in Chinese)] https://doi.org/10.6701/TEEJ.201509_62(3).0003

蘇意雯（2021）。中小學數學史教案開發與實作研究。**臺灣數學教育期刊**，**8**（1），27–53。[Su, Y.-W. (2021). Research on the development and implementation of lesson plans for the history of mathematics in primary and secondary schools. *Taiwan Journal of Mathematics Education*, *8*(1), 27–53. (in Chinese)] https://doi.org/10.6278/tjme.202104_8(1).002

蘇意雯（2023）。「蟲蛀算」國小學習工作單編製探討。**HPM 通訊**，**26**（4），1–4。[Su, Y.-W. (2023). A discussion on the compilation of "Mushikuizan" worksheets for elementary students. *HPM TongXun*, *26*(4), 1–4. (in Chinese)]

一松信、岡田褘雄（主編）（2020）。**みんなと学ぶ小学校算数２年. 上**。学校図書。

佐藤健一（2016）。**数の謎解き和算塾**。研成社。

城地茂（2009）。**日本数理文化交流史**。致良。

中根彥循（1738）。**竿頭算法**。国書データベース（書誌 ID：100234659）。https://doi.org/10.20730/100234659

中原忠男（2017）。教科教育学とその課題。載於日本教科教育学会（主編），**教科教育ハンドブック－今日から役立つ研究手引き－**（頁 10–15）。教育出版。

神谷保貞（1745）。**開承算法**。国書データベース（書誌 ID：100337933）。https://doi.org/10.20730/100337933

松岡能一（1861）。**算学稽古大全**（第五版）。国書データベース（書誌 ID：100234272）。https://doi.org/10.20730/100234272

Artigue, M., & Bosch, M. (2014). Reflection on networking through the praxeological lens. In A. Bikner-Ahsbahs, & S. Prediger (Eds.), *Networking of theories as a research practice in mathematics education* (pp. 249−265). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-05389-9_15

Artigue, M., Bosch, M., Chaachoua, H., Chellougui, F., Chesnais, A., Durand-Guerrier, V., Knipping, C., Maschietto, M., Romo-Vázquez, A., & Trouche, L. (2019). The French didactic tradition in mathematics. In W. Blum, M. Artigue, M. A. Mariotti, R. Sträßer, & M. Van den Heuvel-Panhuizen (Eds.), *European traditions in didactics of mathematics* (pp. 11−56). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-05514-1_2

Asami-Johansson, Y., Attorps, I., & Winsløw, C. (2020). Comparing mathematics education lessons for primary school teachers: Case studies from Japan, Finland and Sweden. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *51*(5), 688−712. https://doi.org/10.1080/0020739X.2019.1614688

Barbin, E., Bagni, G. T., Grugnetti, L., Kronfellner, M., Lakoma, E., & Menghini, M. (2002). Integrating history: Research perspectives. In J. Fauvel, & J. van Maanen (Eds.), *History in mathematics education: The ICMI study* (pp. 63−90). Kluwer Academic Publishers. https://doi.org/10.1007/0-306-47220-1_3

Barbin, E., Guillemette, D., & Tzanakis, C. (2020). History of mathematics and education. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of mathematics education* (pp. 333−342). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_69

Barnett, J. H., Lodder, J., & Pengelley, D. (2014). The pedagogy of primary historical sources in mathematics: Classroom practice meets theoretical frameworks. *Science & Education, 23*, 7–27. https://doi.org/10.1007/s11191-013-9618-1

Bittar, M. (2022). A methodological proposal for textbook analysis. *The Mathematics Enthusiast*, *19*(2), 307–340. https://doi.org/10.54870/1551-3440.1555

Bosch, M., & Gascón, J. (2006). Twenty-five years of the didactic transposition. *ICMI Bulletin, 58*, 51–65. https://www.mathunion.org/fileadmin/ICMI/files/Publications/ICMI_bulletin/58.pdf

Braun, B., & Kahn, E. (2019). Teaching history of mathematics: A dialogue. *Journal of Humanistic Mathematics*, *9*(1), 317–325. https://doi.org/10.5642/jhummath.201901.19

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics*. Kluwer Academic Publishers.

Brousseau, G. (2010). *Glossaire de quelques concepts de la théorie des situations didactiques en mathématiques* [Glossary of some concepts of the theory of didactical situations in mathematics]. https://guy-brousseau.com/wp-content/uploads/2010/09/Glossaire_V5.pdf

Chevallard, Y. (1991). *La transposition didactique: Du savoir savant au savoir enseigné* [The didactic transposition: From scholarly knowledge to taught knowledge]. La Pensée Sauvage. (2nd revised and expanded edition, in coll. with Marie-Alberte Joshua, 1st edition 1985)

Chevallard, Y. (2019). Introducing the anthropological theory of the didactic: an attempt at a principled approach. *Hiroshima Journal of Mathematics Education, 12*, 71–114. https://doi.org/10.24529/hjme.1205

Chevallard, Y., & Bosch, M. (2019). A short (and somewhat subjective) glossary of the ATD. In M. Bosch, Y. Chevallard, F. J. García, & J. Monaghan (Eds.), *Working with the anthropological theory of the didactic in mathematics education. A comprehensive casebook* (pp. xviii–xxxvii). Routledge.

Chevallard, Y., & Bosch, M. (2020). Anthropological theory of the didactic (ATD). In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of mathematics education* (pp. 53–61). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_100034

Fauvel, J. (1991). Using history in mathematics education. *For the Learning of Mathematics*, *11*(2), 3–6. https://www.jstor.org/stable/40248010

Furinghetti, F., & Paola, D. (2003). History as a crossroads of mathematical culture and educational needs in the classroom. *Mathematics in School*, *32*(1), 37–41. http://www.jstor.org/stable/30212234

Gascón, J. (2003). From the cognitive to the epistemological programme in the didactics of mathematics: Two incommensurable scientific research programmes? *For the Learning of Mathematics*, *23*(2), 44–55. https://www.jstor.org/stable/40248420

González-Martín, A. S. (2021). $V_B - V_A = \int_A^B f(x)dx$. The use of integrals in engineering programmes: A praxeological analysis of textbooks and teaching practices in strength of materials and electricity and magnetism courses. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, *7*(2), 211–234. https://doi.org/10.1007/s40753-021-00135-y

Gulikers, I., & Blom, K. (2001). 'A historical angle', a survey of recent literature on the use and value of history in geometrical education. *Educational Studies in Mathematics*, *47*(2), 223–258. https://doi.org/10.1023/A:1014539212782

Kuzuoka, K. & Miyakawa, T. (2020). Implementing multidisciplinary study and research paths in Japanese lower secondary school teaching. *Educação Matemática Pesquisa*, *22*(4), 173–188. https://doi.org/10.23925/1983-3156.2020v22i4p173-188

Lim, S. Y., & Chapman, E. (2015). Effects of using history as a tool to teach mathematics on students' attitudes, anxiety, motivation and achievement in grade 11 classrooms. *Educational Studies in Mathematics*, *90*(2), 189–212. https://doi.org/10.1007/s10649-015-9620-4

Miyakawa, T., & Winsløw, C. (2013). Developing mathematics teacher knowledge: The paradidactic infrastructure of "open lesson" in Japan. *Journal of Mathematics Teacher Education, 16*(3), 185–209. https://doi.org/10.1007/s10857-013-9236-5

Miyakawa, T., & Winsløw, C. (2019). Paradidactic infrastructure for sharing and documenting mathematics teacher knowledge: A case study of "practice research" in Japan. *Journal of Mathematics Teacher Education, 22*(3), 281–303. https://doi.org/10.1007/s10857-017-9394-y

Radford, L., & Santi, G. (2022). Learning as a critical encounter with the other: Prospective teachers conversing with the history of mathematics. *ZDM–Mathematics Education, 54*(7), 1479–1492. https://doi.org/10.1007/s11858-022-01393-z

Solis, D., & Isoda, M. (2023). Comparing elementary school textbooks of China, Japan, and Malaysia: A praxeological and developmental progression analysis regarding length measurement. *Research in Mathematics Education, 25*(3), 359–378. https://doi.org/10.1080/14794802.2022.2103022

Takeuchi, H., & Shinno, Y. (2020). Comparing the lower secondary textbooks of Japan and England: A praxeological analysis of symmetry and transformations in geometry. *International Journal of Science and Mathematics Education, 18*(4), 791–810. https://doi.org/10.1007/s10763-019-09982-3

Tzanakis, C., Arcavi, A., de Sa, C. C., Isoda, M., Lit, C. K., Niss, M., de Carvalho, J. P., Rodriguez , M., & Siu, M. K. (2002). Integrating history of mathematics in the classroom: An analytic survey. In J. Fauvel, & J. van Maanen (Eds.), *History in mathematics education: The ICMI study* (pp. 201–240). Kluwer Academic Publishers. https://doi.org/10.1007/0-306-47220-1_7

Vergnaud, G. (2009). The theory of conceptual fields. *Human development*, *52*(2), 83–94. https://doi.org/10.1159/000202727

Wang, C., Shinno, Y., Xu, B., & Miyakawa, T. (2023). An anthropological point of view: Exploring the Chinese and Japanese issues of translation about teaching resources. *ZDM–Mathematics Education, 55*(3), 705–717. https://doi.org/10.1007/s11858-023-01477-4

Wijayanti, D., & Winsløw, C. (2017). Mathematical practice in textbooks analysis: Praxeological reference models, the case of proportion. *REDIMAT, 6*(3), 307–330. https://doi.org/10.17583/redimat.2017.2078

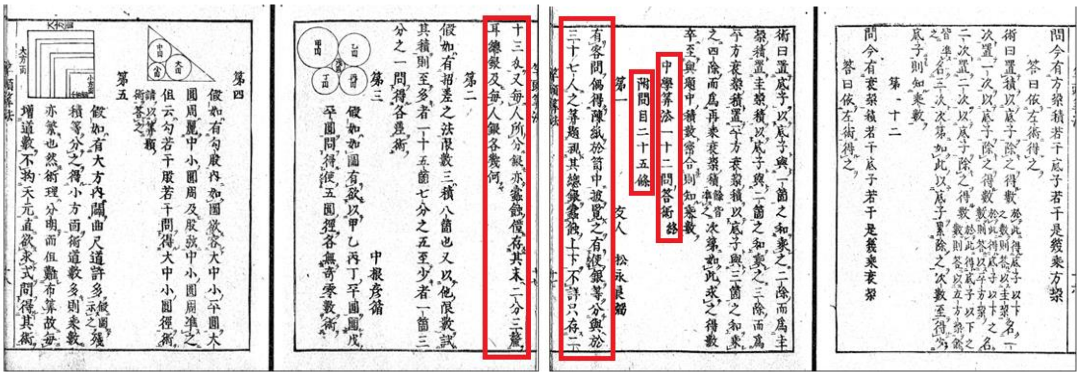
附錄

「蟲蛀算」學習工作單

班級：　　座號：　　姓名：

「蟲蛀算」的問題首次被印刷出版是因為日本「遺題繼承」之傳統。和算家中根彥循為了解答青山利永於 1719 年出版的《中學算法》的 12 條提問，於 1738 年出版了《竿頭算法》一書，並於解答之後又附上了 25 條問題，其中的第一問就是有關紙條被蟲蠹蝕的問題：

「**有客問，偶得陳紙於笥中。披覽之，有使銀等分與於三十七人之算題。視其總銀蠹蝕上下不詳，只存二十三匁，又每人所分銀亦蠹蝕，僅存其末二分三釐耳。總銀及每人銀各幾何。**」。

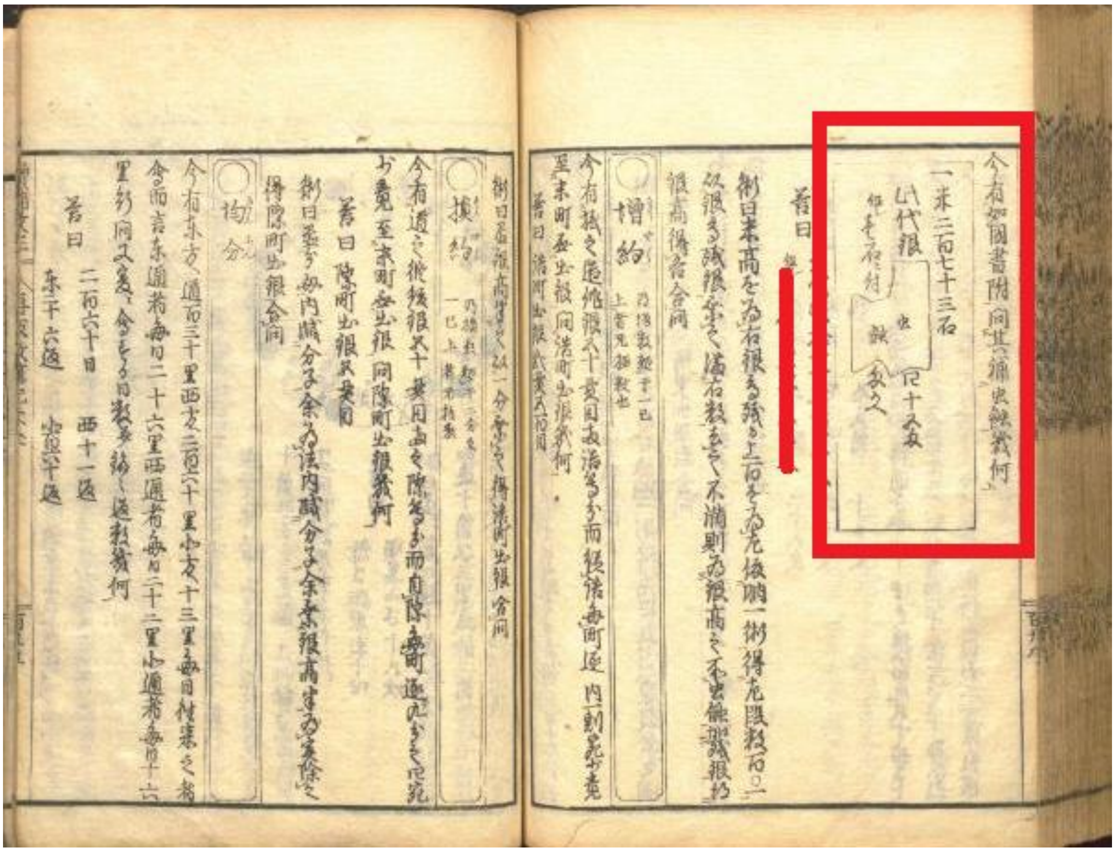


(https://kokusho.nijl.ac.jp/biblio/100234659/1?ln=ja)

此題的文意是敘述偶然在方箱中得到一張陳舊的紙，打開閱覽只知道是分銀給 37 人，銀的總量上下被蠹蝕了只看到 23 匁(もんめ)，而且每個人所分到的銀量也被蠹蝕了，只看到最後是二分三釐(0.23 匁)，問總銀及每人所分銀各是多少。匁為日本以前的重量單位，1 匁為 3.75 克。這個問題的答案在後來神谷保貞於 1745 年出版的《開承算法》中被解答出來。

問題一：請解出此問題之答案（例如：總銀_____貫____百____十____匁____分____厘，每人銀____十____匁____分____厘。）

隨著和算的蓬勃發展，很多流派也風起雲湧。1808 年發行，於 1861 年五刻的宅間流五世松岡能一之著作《算學稽古大全》中，將題目設計成一張以賣米換取銀兩的字據，但此字據被蟲蛀了一個大洞，如下圖所示。字據的意思是「二百七十三石的米可換取銀□□□四十五匁，每石米要付銀□□匁。」。



(http://codh.rois.ac.jp/iiif/iiif-curation-viewer/index.html?pages=200021598&pos=124&lang=en)

問題二：請解出此問題之答案（例如：代銀_____貫____百____十____匁，另一石米需付銀_____十____匁。）

問題三：請設計出屬於你自己的蟲蛀算，並邀請一位同學挑戰。

題目設計	挑戰同學姓名 做法	解答

問題四：請寫下對於「蟲蛀算」的學習心得。

《臺灣數學教育期刊》稿約

2013.04.03 編審委員會會議通過
2013.09.27 編審委員會會議修訂通過
2014.09.04 編審委員會會議修訂通過
2017.03.17 編審委員會會議修訂通過
2021.04.09 編審委員會會議修訂通過
2022.04.08 編審委員會會議修訂通過

壹、《臺灣數學教育期刊》（*Taiwan Journal of Mathematics Education*）（以下簡稱本刊）是國立臺灣師範大學數學系及台灣數學教育學會共同發行之期刊，內容以出版數學教育領域相關議題的原創性論文為宗旨。

貳、本刊歡迎符合宗旨的多元型態學術論文，類型如下：

一、實徵論文（research report）：透過資料收集與分析來探究理論或檢驗假設。

二、回顧性論文（review article）：整合相關之實徵研究，並提出批判性或創發思考的評析。

三、學術瞭望（academy observatory）：針對國內外數學教育理論、議題、新知、研究成果、實務發展、改革趨勢，進行說明、分析、評論、反思或建議。

四、書評（book review）：以導讀、討論、分析、闡釋，或比較，來介紹並評論數學教育領域新出版的重要書籍。

參、撰寫文別及字數如下：

一、實徵性論文與回顧性論文：可以中文或英文撰寫，中文稿件字數以20,000字、英文10,000字為上限（包含論文全文、中英文摘要、圖表、附註、參考文獻、附錄等），並需經正式審查流程（請參見第捌項之說明）。

二、學術瞭望與書評：以中文5,000字為原則，由編輯室邀稿。不經正式審查，但需通過編輯委員會議。

肆、本刊每年發行兩期，分別於四月、十月出刊，並採電子和紙本方式發行。全年徵稿，隨到隨審。

伍、本刊所刊之文稿須為原創性的學術論文之文稿，即未曾投遞或以全論文形式刊登於其他期刊、研討會彙編或書籍。若文稿在送審後自行撤稿，或出現一稿多投、修正稿回覆逾期、侵犯著作權等違反學術倫理等情況，將依下列規則處理：

一、來稿一經送審，不得撤稿。因特殊理由而提出撤稿申請者，案送主編決定；非特殊理由而自行撤稿者，一年內將不再接受該作者的投稿。

二、若文稿被發現一稿多投、侵犯著作權或違反學術倫理等情況，除文稿隨即被拒絕刊登外，一切責任由作者自負，且本刊於三年內不接受該作者來稿，並視情節嚴重程度求償。

三、作者應於發出文稿修正通知的三週內回傳修正稿及修正回覆說明書，逾期視同撤稿。若有特殊情況請先與本刊聯絡。

陸、未經本刊同意，已發表之文章不得再於他處發表。投遞本刊之學術論文須經編審委員會送請專家學者審查通過後予以刊登，被刊登文章之著作財產權歸國立臺灣師範大學數學系及台灣數學教育學會共同擁有，文責由作者自負。投稿至《臺灣數學教育期刊》之文章，若經編輯委員推薦且經作者同意，可轉稿至《臺灣數學教師》。

柒、中文文稿格式請參考本期刊論文撰寫體例的說明或已發行之文稿，若為英文撰寫之文稿、引用英文文獻以及數學符號、公式等請參考APA第七版出版手冊。投稿時應注意下列事項：

一、填寫投稿資料

(一) 文稿基本資料。

(二) 通訊作者之姓名、服務單位、職稱、通訊地址、聯絡電話和電子郵件地址。一位以上作者時，非通訊作者只需填寫姓名、服務單位和職稱。

(三) 任職機構及單位：請寫正式名稱，分別就每位作者寫明所屬系所或單位。

(四) 頁首短題（running head）：中文以不超過15個字、英文以不超過40個字元為原則。

(五) 作者註（author note）：說明與本篇研究相關的資訊。

二、除文稿正文外，還需包含中英文摘要，相關規定請詳見《臺灣數學教育期刊》論文撰寫體例。

三、若為修正稿，遞交修正的文稿（上述第伍項第三點之資料）上請以色字標示修改處，並需依審查意見逐項說明修改內容或提出答辯。

捌、本刊審查流程分為預審與正式審查兩個階段：

一、預審：不符合本刊宗旨、品質要求，或撰寫體例者，逕行退稿或退回請作者修改後再上傳。

二、正式審查：為雙向匿名審查，除基本資料表外，不得出現任何足以辨識作者身份之資料，包括請先省略誌謝。

玖、文稿透過線上投稿系統（http://tjme.math.ntnu.edu.tw）方式投遞。當文稿被接受，作者需在本刊提供的著作財產權讓與同意書上簽名，以掃描檔或紙本方式寄回。作者應負論文排版完成後的校對之責。被接受刊登之文稿，作者需提供文獻之doi，以及中文參考文獻之英譯資料。被接受刊登的英文文稿，作者需自行負責檢查文稿中的用詞、語法、拼寫、含意和邏輯的正確性，編輯委員僅負責格式上之校對。

壹拾、期刊助理聯絡郵箱：TJME.taiwan@gmail.com

《臺灣數學教育期刊》研究論文撰寫體例

2013.04.03 編審委員會會議通過
2013.09.27 編審委員會會議修訂通過
2014.09.04 編審委員會會議修訂通過
2017.03.17 編審委員會會議修訂通過
2022.04.08 編審委員會會議修訂通過

本期刊原則上依循美國心理學會（American Psychological Association）的撰寫格式，中文文稿請參考下面的說明或本刊已發表的文稿，若為英文撰寫之文稿、引用英文文獻以及數學符號、公式等請參考 APA 第七版出版手冊。文稿請使用 Microsoft Word 98 以上之繁體中文文書軟體處理。除另有規定外，中文字型一律採用新細明體，英文字型一律為 Times New Roman。

壹、撰稿格式

一、**稿件順序：**投稿除需要附上作者基本資料表檔案外，中文稿件內容依序為中文摘要頁（含關鍵字）、英文摘要頁（含關鍵字）、正文（包括圖、表、附註、誌謝、參考文獻）以及附錄（若無必要可省略）；英文稿件之撰寫順序相同，唯中英文摘要頁位置對調。

二、**稿件版面：**以單欄版面橫向印列的A4規格紙張，上下左右各留2.5公分空白，除基本資料表頁外每頁需加註頁碼。文稿字數（包含摘要、正文、圖表、附註、參考文獻、附錄等）中文以20,000字為上限，英文以10,000字為上限。

三、**中文文稿的中文摘要在前，英文摘要在後**：中文摘要頁內容包括論文題目（粗體20級字、置中）、摘要（不分段，限500字以內）、與關鍵字（以五個為上限，並依筆畫順序由少到多排列）。英文摘要頁內容包括 Title（bold, 20 pt, central）、Abstract（不分段，限300字以內）及 Keywords（字詞及順序須與中文關鍵詞相對應）。

四、**英文文稿的英文摘要在前，中文摘要在後：**英文摘要頁內容包括 Title（bold, 20 pt, central），Abstract（不分段，限300字以內）及 Keywords（以五個為上限，並依字母順序排列）；中文摘要頁內容包括論文題目（粗體20級字、置中）、中文摘要（不分段，限500字以內）及中文關鍵詞（字詞及順序須與英文關鍵詞相對應）。

五、**字級與行距：**除各項標題、表之註記與另起一段之引文外，內文不分中英文均為12級字，單行行距。

六、**字型與符號：**除另有規定外，中文字型一律採用新細明體，標點符號及空白字為全形字；英文字型一律為Times New Roman。

貳、正文規格

一、**正文內容：**原則上包括「緒論」、「文獻探討」、「方法」、「結果」、「討論」與「參考文獻」等六部分，「緒論」含研究動機與目的、假設或研究問題等內容。前述格式為原則性規定，作者可依論文性質斟酌改變。

二、**標題的層次、選用次序與字體**：

(一) 標題請用字簡明，勿用句號或冒號。若逢頁尾最後一行，應移至次頁首行。第一級標題為「緒論」、「文獻探討」、「方法」、「結果」、「討論」與「參考文獻」等，各層次標題選用次序為：壹、一、(一)、1、(1)、A 最多以六個層次為原則。

(二) 第一層次標題置中，其餘靠左對齊。第一、二、三、四、五層次標題請使用粗體。第一層次標題使用 16 級字，第二層次標題使用 14 級字，其餘 12 級字。

(三) 第一、二、三層次標題為單行間距，並與前後段距離均為 1 行；第四、五、六層次標題為 12 點最小行高，並與前後段距離均為 0.5 行。

(四) 第五、六層次標題內縮 1.5 字元，而第六層次標題加上底線。

壹、16級字、粗體、置中

一、14級字、粗體、靠左對齊

(一)12級字、粗體、靠左對齊

1. 12級字、粗體、靠左對齊

(1)內縮1.5字元、12級字、粗體、靠左對齊

A.<u>內縮1.5字元、12級字、底線、靠左對齊</u>

三、**英文統計符號：**須用斜體字，例如*F*(1, 53) = 10.03, *t*, *F*, *M*, *SD*, *N*, *r*, *p*等。希臘字母則不要斜體，例如：α, β, ε, η。

四、**資料分析結果的有效位數須全文一致：**恆小於「1」的數值，例如*KR20*, α, *p*等統計數值的個位數字「0」請省略。

五、**誌謝與附註：**

(一) 誌謝應力求簡短扼要，置於正文之後。誌謝二字為 16 級字、粗體、置中。誌謝文另行起、第一行內縮 2 字元、12 級字。

(二) 附註應置於參考文獻之前，每項附註均另起一行，並以阿拉伯數字編號，依順序排列。

參、文獻引用格式

一、注意事項

(一) 引用文獻時，必須有作者姓名（中文作者姓名全列，英文作者僅列姓氏）及論文年份（中文文獻及英文文獻均使用西元年份）。

(二) 相同作者在同一段中重複被引用時，第一次須寫出年代，第二次以後，在不造成混淆的情況下年代可省略。若在不同段落中重複引用時，則仍須完整註明。

(三) 本文中引用之文獻必須在參考文獻中列出。

二、引用部分文獻內容

若引用特定文獻時，資料來自於特定章、節、圖、表、公式，須標明特定出處；如引用整段原文獻資料，須加註頁碼。中文以「頁」表示；西文單頁為“p.”、兩頁以上為“pp.”。

範例： 吳昭容（2019，頁9）或（洪萬生，2006，頁167）
(Dubinsky, 1991, p. 102) 或 (Heath, 1956, pp. 251-252)

三、作者人數為一人、二人、三人以上或機構：

(一) 作者人數為一人

中文格式 作者（年代）或（作者，年代）

英文格式 Author (Year) 或 (Author, Year)

範例： 劉柏宏（2021）或（劉柏宏，2021）
Heinz (2015) 或 (Heinz, 2015)

(二) 作者人數為二人。每次引用均須列出全部作者，在行文中，以「與」連接；在括號和參考文獻中，中文以頓號「、」，西文以“&”連接。

中文格式 作者 1 與作者 2（年代）或（作者 1、作者 2，年代）

英文格式 Author 1 與 Author 2 (Year) 或 (Author 1 & Author 2, Year)

範例： 蔡政樺與秦爾聰（2021）或（蔡政樺、秦爾聰，2021）
Yang 與 Idris (2021) 或 (Yang & Idris, 2021)

(三) 作者人數為三人以上。

1. 僅需要寫出第一位作者，後面再加上「等人」或 「et al.」。
2. 若作者縮減後與其他文獻會產生混淆（第一作者與年代皆相同），請將作者逐一列出至可區辨者。
3. 若僅最後一位作者不同，則每次引用時都要將所有作者列出。

範例 1： 呂鳳琳等人（2018）或 （呂鳳琳等人，2018）或 Green 等人(2014)
Sherry et al. (2010) 或 (Sherry et al., 2010)

範例 2： Hong、Hwang、Liu 等人（2014）
Hong、Hwang、Tai 等人（2014）

範例 3： Mullis、Martin、Foy 與 Arora（2012）
Mullis、Martin、Foy 與 Drucker（2012）

(四) 當作者或作者之一為機構。第一次引用應寫出機構全名，並以中括號註明慣用之簡稱，第二次之後即可使用簡稱替代。

範例：行政院國家科學委員會（國科會，2011）或（行政院國家科學委員會 [國科會]，2011）
National Science Council (NSC, 2011) 或 (National Science Council [NSC], 2011)

四、**同一作者不同著作：**在文章中引用同一作者在同一年的多篇著作時，應在年代後加註 a, b, c……以茲區別。

範例：（教育部，2009a，2009b，2009c，2009d）

五、**引用相同姓氏作者：**當兩筆西文文獻之第一作者同姓時，須引用全名，且採「名在前姓在後」方式書寫。

範例：A. J. Bishop（1985）和 E. Bishop（1970）都認為……。

六、**同時引用多筆文獻：**依作者姓名筆畫（英文用字母）排序；若同時有中英文作者，則先列中文作者。不同作者之間用分號分開，相同作者不同年代之文獻用逗號隔開年代。

範例：（陳學志、賴惠德、邱發忠，2010；Lai et al., 2013; Yen & Yang, 2016）

七、**引用翻譯文獻：**採用（原作者，原著出版年代/譯本出版年代）或原作者（原著出版年代/譯本出版年代）的標示方式。

範例：Skemp (1987/1995) 或 (Skemp, 1987/1995)

八、**間接引註：**當引用之觀念或陳述，來自第二手資料時，應將原始資料和第二手資料同時註明。在括號中首先列出原始作者與年代，接續中文以「引自」註明第二手資料之作者與年代，並說明出處頁碼；或直接引出第二手資料之文獻。

範例：（Garner, 1988，引自蘇宜芬、林清山，1992，頁246）
（引自蘇宜芬、林清山，1992，頁246）

九、**直接引述：**引文超過中文 80 字（西文 40 字），則須另起一段，並改為標楷體 10 級字，左右縮排 2 字元，與正文間前後空一行，且在引文前後無需用引號。

範例：

Schoendfeld (1992, p.335) 有一段話可以用來討論：

> 數學從其創生之始就是一種社會活動，在此活動中一群訓練有素的實踐者（數學科學家）從事組型的科學—基於觀察、研究和實驗，有系統地試圖要決定一個公理化或理論化之系統中的規律的性質和原理（此為純數學），或者從實在世界物體中抽象出來之系統的模式（此為應用數學）。數學的工具是抽象、符號表徵、和符號操作。然而學會運用這些工具，其意義乃謂一個人以數學方式思考而非如一個工匠使用工具。以數學的方式思考就是：（1）形成數學觀點—珍視數學與抽象的歷程，並偏愛其應用，（2）發展此學科的工具的能力，並應用這些工具以協助我們理解結構—數學的建構意義（mathematical sense-making）。

肆、圖與表格：

一、圖與表格均配合正文出現。圖和表格標題需分為上、下兩行，置左。圖表序在上行，以阿拉伯數字序碼，且需粗體；圖表名在下行，精簡命名，不粗體。

二、若有資料來源，應於圖表下方附加說明，同時可視需要加以註解，圖表中文字可用簡稱，若簡稱尚未約定俗成或未曾在正文中出現，則須於圖表的註解中列出全稱。

三、表格之製作以簡明清楚、方便閱讀為原則，頂端與底端採用粗線（1.5pt）繪製，中間與兩邊不必畫線。

四、每一個圖表的大小以不超過一頁為原則，如超過時，須在續表之表序後加上（續）/ (continued)，但無須重現圖表名，如：表1（續）或 Table 1 (continued).。

五、圖和表格內容若有解釋的必要，可作註記。註記與圖表之左邊界切齊，列在圖、表之下方，每註另起一行，按編號順序排列，句末須句號。

(一) 一個註解：中文稿件以「註：」表示；英文稿件以「*Note.*」表示（*Note.*為斜體）。

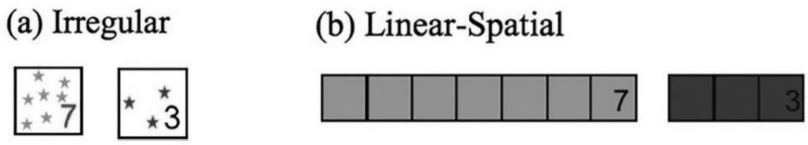
(二) 一個註解以上，註解順序依序為：

1. 一般註解：限定、解釋或提供表、圖的相關資訊（以「註」表示）。
2. 特別註解：特定的某個直欄、橫欄或個別的條目有關（以上標「a、b、c」分段表示）
3. 機率註解：指出顯著性考驗的結果（以「*p < .05. **p < .01. ***p < .001.」表示）。

圖例：

圖 2

兩種不同的表徵(a)不規則排列的表徵(b)線性排列的表徵



引自“Materials count: Linear-spatial materials improve young children's addition strategies and accuracy, irregular arrays don't,” by J. Schiffman and E. V. Laski, 2018, *Plos One*, *13*(12), p. 4.

表例：

表2

實驗教學前兩組學生的作文成績比較（獨立*t*考驗）項目

項目	控制組		實驗組		兩組平均差[c]	*t*值
	平均數	標準差	平均數	標準差		
內容[a]	5.25	1.03	3.73	1.08	1.52	4.57***
組織[a]	5.23	.95	3.85	1.07	1.38	4.31***
文法[a]	5.44	1.08	4.17	1.18	1.27	3.53*
語辭[a]	5.39	1.08	4.15	1.13	1.24	3.55**
整體[b]	21.32	3.81	15.90	4.18	5.42	4.28***

註：控制組與實驗組受試者各20名。

[a] 各項目的滿分為10。

[b] 整體分數為四個分項的得分加總。

[c] 兩組平均差＝控制組平均數－實驗組平均數。

$*p < .05$. $**p < .01$. $***p < .001$.

伍、參考文獻格式

一、注意事項

(一) **排序方式：**正文中引用過之文獻，必須全部列舉在參考文獻內，且不得列出未引用之文獻。中文文獻依作者姓氏筆畫順序排列，外文文獻則依作者姓氏字母順序排列。每個作者第一行由第一格開始寫，第二行中文內縮三個字；英文內縮六個字母。

(二) **標點符號：**中文文獻應使用全形的標點符號，英文文獻則使用半形的標點符號，在半形標點符號後須空一格半形空格書寫。

(三) **英文名稱之大小寫：**期刊篇名與書名除了第一個、冒號之後或專有名詞之第一個字母大寫外，其餘均使用小寫。期刊名稱除了介系詞與連接詞外，每個字的第一個字母大寫。

(四) **中文姓名英譯寫法：**中文姓名的英譯若有”-”（例如：Li-Li Huang），則寫法為Huang, L.-L.；若沒有（例如：Lung Hung Chen），則寫法為Chen, L. H.。此部分請作者在投稿前自行確認原始參考文獻為何種用法。

(五) **多人文章**

1. 作者為一到二十位：須全列出作者姓名，如果為英文文獻，須在最後一位作者前加上「&」。
2. 二十一位（含）以上作者群：僅列出前十九位與最後一位作者姓名，中間以「…」連接。

(六) **接受刊登之稿件**

1. 作者應提供參考文獻之數位物件辨別碼（DOI），格式請使用「https://doi.org/xxxxx」。
2. **中文參考文獻皆須英文化**，附加於該筆中文文獻之後，並置於方頭括號［］內。
3. 若中文參考文獻已有相對應英文翻譯，請以現成的英文意譯為主；沒有相對應英文翻譯時，有些作者姓名在學術界已有慣用拼法，有些名詞（如：數學）也已有通行或正式的拼法，請採用通行或官方拼法，請勿自行音譯。

二、期刊論文

(一) 已發表：

中文格式

作者名（年代）。篇名。**期刊名，卷數**（期數），頁數。[Author, A. A. (Year). Title of article. *Title of Periodical, xx*(xx), xxx–xxx.] https://doi.org/xxxxx

英文格式

Author, A. A. (Year). Title of article. *Title of Periodical, xx*(xx), xxx–xxx. https://doi.org/xxxxx

範例：

蔡文榮、張鈞淇、劉柏宏（2019）。臺灣學術界數學史研究之現況分析與建議：以 1992 年至 2017 年學位論文為例。**臺灣數學教育期刊，6**（1），27–51。[Tsai, W.-J., Chang, C.-C., & Liu, P.-H. (2019). Analysis of current state and recommendations for HPM research in Taiwan: The case of theses and dissertations from 1992 to 2017. *Taiwan Journal of Mathematics Education*, *6*(1), 27–51. (in Chinese)] https://doi.org/10.6278/tjme.201904_6(1).003

(二) 已接受，未發表

中文格式

作者名（付梓中）。篇名。**期刊名**。[Author, A. A. (in press). Title of article. *Title of Periodical.*]

英文格式

Author, A. A. (in press). Title of article. *Title of Periodical.*

範例：

張子貴（付梓中）。數學系學生對函數極限的錯誤認知與解題困境。**臺灣數學教育期刊**。[Chang, T.-K. (in press). Math Students' Misunderstandings and Obstacles in Learning Limits of Functions. *Taiwan Journal of Mathematics Education.* (in Chinese)]

三、未出版碩博士論文

中文格式

作者名（年代）。**論文名**（未出版博士/碩士論文）。學校名稱。[Author, A. A. (Year). *Title of article* (Unpublished doctoral dissertation/master's thesis). Name of Institution. (in Chinese)]

英文格式

Author, A. A. (Year). *Title of article* [Unpublished doctoral dissertation/master's thesis]. Name of Institution.

四、**學術研討會論文**

(一) 未出版：

中文格式

作者名（年代，日期）。**篇名**（壁報/口頭發表論文）。研討會名稱，舉辦城市，國家。[Author, A. A. (Year, Month Day). *Title of contribution* (Paper presentation/Poster presentation/Symposium presentation). Conference Name, Location, Country. (in Chinese)] 研討會議程網址

英文格式

Author, A. A. (Year, Month Day). *Title of contribution* [Paper presentation/Poster presentation/Symposium presentation]. Conference Name, Location, Country. https://xxxxx

(二) 有出版：

1. 期刊：與「期刊論文」相同格式，請見第二項。
2. 書：與「編輯書」相同格式，請見第六項。

五、**專書**

中文格式

作者名（出版年）。**書名**。出版社名稱。[Author, A. A. (Year). *Book Title*. Publisher Name. (in Chinese)] https://doi.org/xxxxx

英文格式

Author, A. A. (Year). *Book Title*. Publisher Name. https://doi.org/xxxxx

六、**編輯書：**主編只有一位時用「(Ed.)」，兩位以上用「(Eds.)」。

中文格式

主編名（主編）（出版年）。**書名**。出版社。[Author, A. A. (Ed./Eds.). (Year). *Book title*. Publisher Name. (in Chinese)] https://doi.org/xxxxx

英文格式

Author, A. A. (Ed./Eds.). (Year). *Book title*. Publisher Name. https://doi.org/xxxxx

七、**書籍中的專章：**英文專書主編「名字」縮字放在「姓」之前。

中文格式

作者名（出版年）。章節名稱。載於主編單位/主編名（主編），**書名**（頁 xx–xx）。出版社名稱。[Author, A. A. (Year). Title of chapter. In E. E. Editor (Ed./Eds.), *Book title* (pp. xx–xx). Publisher Name. (in Chinese)] https://doi.org/xxxxx

英文格式

Author, A. A. (Year). Title of chapter. In E. E. Editor (Ed./Eds.), *Book title* (pp. xx–xx). Publisher Name. https://doi.org/xxxxx

八、**翻譯作品：**若為中文譯本，其文獻須列於中文文獻最前面，如有兩筆以上翻譯文獻，依照英文字母排序，但若譯本有將原作者名翻譯為中文者，須使用其中文名，依筆劃，插入中文文獻之內；若沒有則維持原作者名。

中文格式

原作者名/譯名（翻譯本出版年代）。**翻譯書名**（譯者名，譯）。譯本出版社。（原著出版於 xxx 年）[Author, A. A. (Year). *Book title* (Translator, Trans.). Publisher. (Original work published Year) (in Chinese)]

英文格式

Author, A. A. (Year). *Book title* (Translator, Trans.). Publisher. (Original work published Year)

範例1：

Struik, D. J.（2014）。**數學史**（吳定遠，譯）。水牛。（原作出版於 2012 年）[Struik, D. J. (2014). *A Concise History of Mathematics*. (Wu, D.-Y., Trans.). Buffalo Book Company. (Original work published 2012) (in Chinese)]

範例2：

赫爾曼（2009）。**數學恩仇錄**（范偉，譯）。博雅書屋。（原作出版於 2006 年）[Hellman, H. (2009). *Great feuds in mathematics: Ten of the liveliest disputes ever* (Fan, W., Trans.). Goodness Publishing House. (Original work published 2006) (in Chinese)]

九、**研究計畫報告：**若沒有計畫編號或網址，則無須填寫。當機構名稱與出版單位相同時，可省略出版單位。

中文格式

機構名稱或作者名稱（年代）。**篇名**（計畫編號：xxx）。出版單位。[Name of Group. (Year). *Title of report* (Report No. xxx). Publisher name. (in Chinese)] 計畫網址

英文格式

Author/Name of Group. (Year). *Title of report* (Report No. xxx). Publisher name. https://xxxxx

十、**網路資訊：**檢索時間不需列出，除非該網路資料經常變動。括弧內日期為文章登錄於網站上的日期，如無日期可查，中文文獻則在括弧內註明為（無日期），英文文獻註明為 (n.d.)。日期可用形式為（年代）、（年月）、（年月日）、（無日期）。

中文格式

作者/單位名（年月日）。**篇名**。網站名稱。[Author, A. A. (Year, Month Day). *Article title.* Website Name. (in Chinese)] 網址

英文格式

Author, A. A. (Year, Month Day). *Article title.* Website Name. http://xxxxx

範例：

國教署（2020 年 12 月 8 日）。**臺灣參加國際數學與科學教育成就趨勢調查（TIMSS 2019）成果發表**。教育部全球資訊網。[K-12 Education Administration. (2018, December 8). *The report of trends in international mathematics and science study 2019 for Taiwan*. Taiwan Ministry of Education. (in Chinese)] https://www.edu.tw/News_Content.aspx?n=9E7AC85F1954DDA8&s=B822E38553C1D561

《臺灣數學教育期刊》投稿基本資料表

篇名	(中文)	
	(英文)	
總字數	稿件全文（含中英文摘要、正文、參考文獻、附錄等）共________字。	
關鍵詞(最多五個)	(中文)	
	(英文)	
頁首短題 (running head)	(請以不超過15個中文字或40個英文字元為原則。)	
通訊作者資料 **姓名**	(中文)	(英文)
職稱		
服務單位 (或就讀校系)	(中文)	
	(英文)	
E-mail		
通訊地址		
電話	辦公室：(　　)　　　　　　　　分機	
	行動電話：	

如為共同著作，請詳填以下共同著作人欄位，非共同著作則不需填寫。(以下欄位不敷填寫時請自行增加)

共同著作人	**姓名**	**服務單位**(或就讀校系)	**職稱**
第一作者 （□通訊作者）	(中文)	(中文)	
	(英文)	(英文)	
第二作者 （□通訊作者）	(中文)	(中文)	
	(英文)	(英文)	
第三作者 （□通訊作者）	(中文)	(中文)	
	(英文)	(英文)	

作者註 (可複選)	□ 本篇論文為碩、博士論文改寫，指導教授為______________。 □ 本篇論文曾於______________發表。 □ 本篇論文獲國科會補助，計劃編號：______________。

1.茲保證本論文符合研究倫理。

2.茲保證所填基本資料正確，文稿未曾以任何方式出版或發行，且無一稿多投、違反學術倫理，或違反著作權相關法令等事情。

3.茲瞭解並同意貴刊著作權授權規範，並保證有權依此規範進行相關授權。

4.茲保證文稿已經所有作者同意投稿至《臺灣數學教育期刊》。

填表人：______________________　　　　　填表日期：______年______月______日

《臺灣數學教育期刊》著作財產權讓與同意書

茲同意投稿至國立臺灣師範大學數學系與台灣數學教育學會共同發行的《臺灣數學教育期刊》之一文，名稱為：

____

立書人聲明及保證本著作為從未出版之原創性著作，所引用之文字、圖表及照片均符合著作權法及相關學術倫理規範，如果本著作之內容有使用他人以具有著作權之資料，皆已獲得著作權所有者之（書面）同意，並於本著作中註明其來源出處。著作人並擔保本著作未含有毀謗或不法之內容，且絕未侵害他人之智慧財產權，並同意無償授權國立臺灣師範大學數學系與台灣數學教育學會於本著作通過審查後，以論文集、期刊、網路電子資料庫等各種不同方法形式，不限地域、時間、次數及內容利用本著作，並得進行格式之變更，且得將本著作透過各種公開傳輸方式供公眾檢索、瀏覽、下載、傳輸及列印等各項服務。國立臺灣師範大學數學系與台灣數學教育學會並得再授權他人行使上述發行之權利。惟著作人保有下列之權利：

1.本著作相關之商標權及專利權。

2.本著作之全部或部份著作人教學用之重製權。

3.出版後，本著作之全部或部份用於著作人之書中或論文集中之使用權。

4.本著作用於著作人受僱機關內部分送之重製權或推銷用之使用權。

5.本著作及其所含資料之公開口述權。

著作人同意上述任何情形下之重製品應註明著作財產權所屬，以及引自《臺灣數學教育期刊》。

如果本著作為二人以上之共同著作，下列簽署之著作人已通知其他共同著作人本同意書之條款，並經各共同著作人全體同意，且獲得授權代為簽署本同意書。如果本著作係著作人於受僱期間為雇用機構所作，而著作權為讓機構所有，則該機構亦同意上述條款，並在下面簽署。

本著作之著作財產權係屬（請勾選一項）

☐ 著作人所有

☐ 著作人之僱用機構所有

立同意書人（著作人或僱用機構代表人）簽章：______________________

著作人姓名或僱用機構名稱：______________________

（正楷書寫）

中華民國　　年　　月　　日

《臺灣數學教育期刊》編審辦法

2013.04.03 編審委員會會議通過

壹、《臺灣數學教育期刊》（以下簡稱本刊）之審查包括預審、正式審查兩個階段：

一、預審：檢視來稿是否符合本刊稿約之宗旨、論文品質以及進行論文格式之審查；

二、正式審查：審查委員與投稿者採雙向匿名方式進行。主編就審查委員的回覆意見及論文品質決定接受或拒絕文稿，或是需要作者修改後再進行審查或檢核。需要「修正後再審」之稿件，交原審查委員或委由主編委任進行再審。所有文稿最後須經編輯委員會審查通過後，方能刊出。

稿件之最終審查決定以投稿後六個月內完成並通知作者。

貳、審查委員針對稿件之學術原創性、正確性及價值等條件從嚴審查，以確保所刊文稿的品質。審查委員可提供作者具建設性的修改建議，以利文稿的修正及品質提昇，並以下列其中一種的刊登建議回覆：

一、「同意刊登」：論文不需要修改可作原稿刊登。

二、「修正後刊登」：通知作者依審查意見修改或答辯後刊登。

三、「修正後再審」：要求作者依審查意見修改或答辯，修正稿由編輯委員會送原審查委員或委由主編委任進行再審。

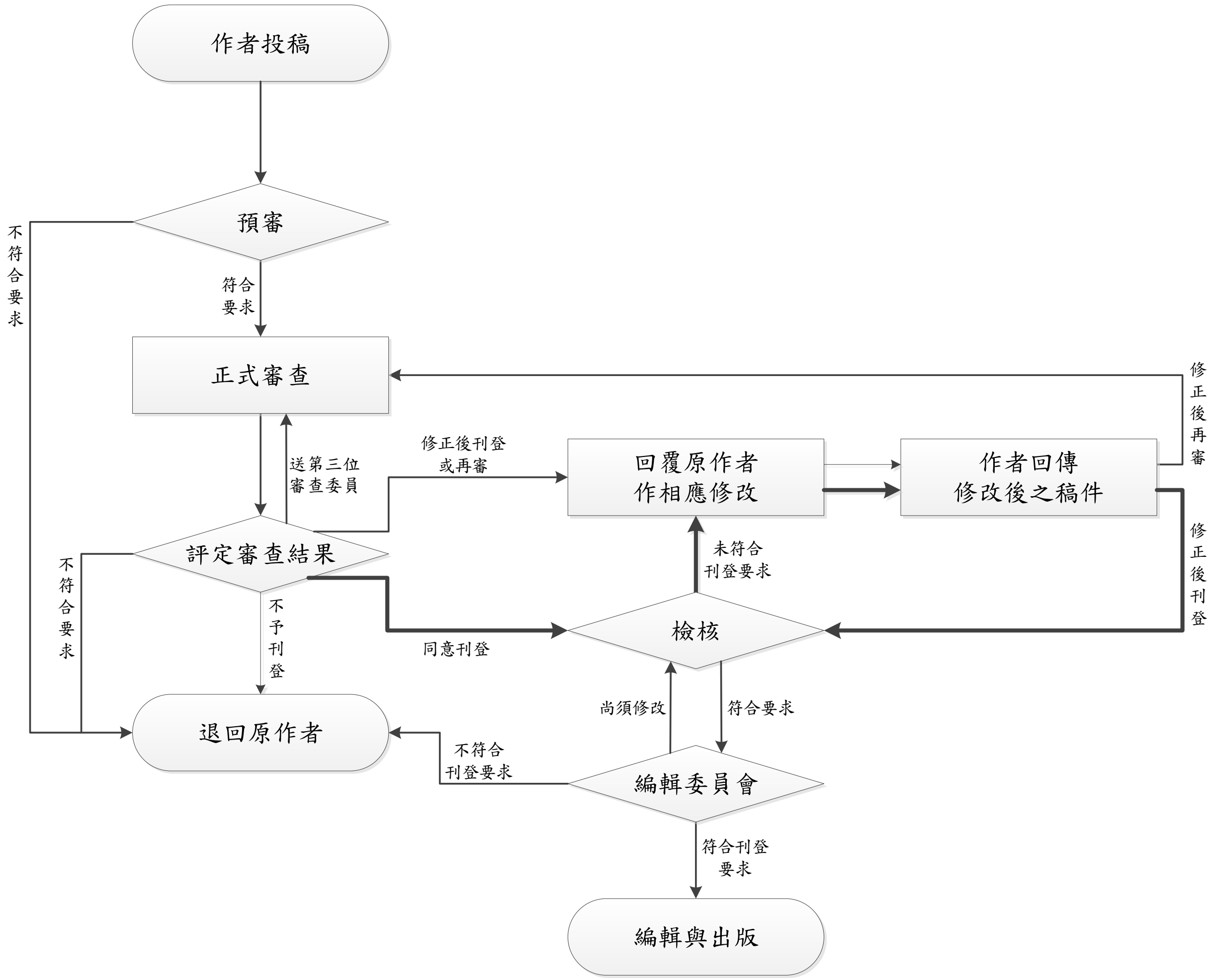
四、「不宜刊登」：通知作者退稿。

稿件審查的時間以三週為限，若超過期限，編輯委員會將去函提醒審查委員儘速審查，若逾六週審查者仍未寄回審查意見，則編輯委員會得再聘請另一位審查者取代之。每位審查者皆為無償審查，但會在每年第二期期刊中列名致謝。

參、本刊主編、副主編或編輯委員如投稿本刊，該委員應迴避推薦審查委員名單、參與審查結果決定之討論或經手處理與個人稿件有關的資料(包括審稿者資料、推薦審查委員名單、審稿意見等)。

肆、本刊預計每年四月和十月出版，稿件刊登順序由主編原則上依文稿性質與投稿時間之先後次序決定之，而第一作者的文稿以一篇為限，超過篇數之稿件留至下期刊登。

伍、本刊稿件之編審流程如下圖所示：


作者投稿
預審
不符合要求
符合要求
正式審查
送第三位審查委員
修正後刊登或再審
回覆原作者作相應修改
作者回傳修改後之稿件
修正後再審
評定審查結果
不符合要求
不予刊登
同意刊登
未符合刊登要求
檢核
修正後刊登
退回原作者
尚須修改
符合要求
不符合刊登要求
編輯委員會
符合刊登要求
編輯與出版

Taiwan Journal of Mathematics Education Vol. 11, No. 1 April, 2024

Publisher Department of Mathematics, National Taiwan Normal University
Taiwan Association for Mathematics Education

Address: No.88 Sec. 4, Ting-Chou Rd., Taipei City, Taiwan, R.O.C.
Department of Mathematics, National Taiwan Normal University
"*Taiwan Journal of Mathematics Education*"
TEL: 886-2-7749-3678
FAX: 886-2-2933-2342
E-mail: TJME.taiwan@gmail.com
Website: http://tjme.math.ntnu.edu.tw/contents/contents/contents.asp?id=21