ISSN: 2312-5810
DOI: 10.6278/tjme

第 11 卷　第 2 期
二〇二四年十月
VOL. 11　NO. 2
October　2024

臺灣數學教育期刊
Taiwan Journal of Mathematics Education

國立臺灣師範大學數學系
Department of Mathematics,
National Taiwan Normal University

TAME
台灣數學教育學會
Taiwan Association
for Mathematics Education

臺灣數學教育期刊

第 11 卷 第 2 期　2024 年 10 月

地址	臺北市汀州路四段 88 號國立臺灣師範大學數學系 《臺灣數學教育期刊》
電話	886-2-7749-3678
傳真	886-2-2933-2342
電子郵件	TJME.taiwan@gmail.com
網址	http://tjme.math.ntnu.edu.tw/contents/contents.asp?id=21

主編的話

第 11 卷 第 2 期　2024 年 10 月

本刊第 11 卷第 2 期刊登四篇文章，依序為「五歲與六歲幼兒加減法可逆概念的理解」、「學生的角概念及教師對角的教學相關知識之探討」、「國中八年級學生在數學創造力問題表現之分析」，與「探究導向專業學習模式對數學科初任教師教學策略知識展現之個案研究」，四篇的數學議題分別針對幼兒、國小、國中，以及教師，而在研究方法上前三篇都使用到測驗表現分析，其中第二篇針對教師部分的訪談資料則另採質性編碼分析，而第四篇為質性研究的個案分析。每篇論文除了經過至少兩位外審委員的審查，還有責任編輯的檢視與協助，以及編輯會議中所有委員的建議。

第一篇的作者是余孟儒、賴孟龍。加減法可逆概念不僅反映幼兒是否透徹地掌握了加法與減法，同時也是初階代數思維的展現。本研究透過幼兒在可逆題與標準題表現的對照，以及操弄起始量的大小以比較在較難與相對簡單試題的解題速度，用以回答幼兒加減法可逆概念的發現。本研究運用精巧的試題設計推論幼兒隱微的概念發展，頗值得參考。

第二篇的作者為黃幸美。在探討四年級學生的角知識方面，本文透過文獻回顧匯集了相當廣泛的評量試題，在多名學生的一對一初試、專家審題、102 位學生的預試之後，確立正式施測的題目，測驗編製程序嚴謹。在探究教師對學生角知識的認知與教學安排方面，則透過訪談七位教師進行質性編碼。對照學生實際的表現與教師對學生表現的預期，確實能為數學教育提供啟示。

第三篇的作者為許慧玉、姚辰豫、張芸夢、Sigal Klein、Roza Leikin。本研究以八年級學生在數學創造力測驗、一般創造力測驗，以及數學成就測驗上的表現，探討中學生的數學創造力表現，並回應了創造力是一般性能力還是特定領域能力的問題。本研究在控制了數學成就之後，數學創造力與一般創造力並無相關，顯示數學創造力與領域知識的關聯強，支持數學創造力是特定領域能力。

第四篇的作者是劉沛妏、秦爾聰、簡啟東。研究者提出「探究導向專業發展模式」，並與一位專家教師和一位初任教師展開為期兩年的個案研究。本文分析兩位個案在課程修習、教學觀察、教學實作中的教學影片、課後討論、反思日誌等資料，並以所提出的模式來詮釋初任教師數學教學策略知識的展現。

這一年來，有越來越多的作者投稿本刊，而文章品質也通過層層審查。為了讓學者的研究心血能及早面世、對學界產生影響，本刊將展開預刊的編輯作業，在 2025 年四月出版第 12 卷第 1 期之前將推出預刊文章，敬請研究社群關注與閱覽。

《臺灣數學教育期刊》主編

吳昭容 謹誌

臺灣數學教育期刊

第 11 卷　第 2 期

2014 年 4 月創刊　　2024 年 10 月出刊

目錄

Taiwan Journal of Mathematics Education

Vol. 11 No. 2

First Issue: April 2014 Current Issue: October 2024

CONTENTS

余孟儒、賴孟龍（2024）。
五歲與六歲幼兒加減法可逆概念的理解。
臺灣數學教育期刊，**11**（2），1–28。
doi: 10.6278/tjme.202410_11(2).001

五歲與六歲幼兒加減法可逆概念的理解

余孟儒[1,2]　賴孟龍[2]
[1]雲林縣義峰高級中學
[2]國立嘉義大學幼兒教育學系

加減法可逆概念係指一個起始量在加減相同數量之後，不會改變原本的數量，即 a+b−b＝a，為加減運算邏輯中相當重要的概念（Baroody & Lai, 2007）。過去研究大多使用單一工具探究幼兒在加減法可逆原則的理解程度，然而單一工具有其限制，故本研究同時採用兩種任務作為測驗工具，客觀地釐清五歲與六歲幼兒在加減法可逆概念的理解情形與差異。研究對象為五歲與六歲幼兒各 20 名，材料為代數推理（森林小鳥、池塘青蛙）與運算捷徑任務（籃子蘋果、水草小魚），四種情境皆含「可逆題」（a+b−b）與「標準題」（a+b−c），測驗題目以情境式動畫呈現。研究發現，五歲與六歲幼兒的加減法可逆概念理解程度在代數推理及運算捷徑任務之間表現類似，已經達到基礎理解程度，而且在年齡之間並無表現差異。

關鍵字：加減法可逆原則、代數推理、情境式動畫、運算捷徑

通訊作者：賴孟龍，e-mail：laimenglung@gmail.com
收稿：2024 年 4 月 13 日；
接受刊登：2024 年 10 月 9 日。

Yu, M. R., & Lai, M. L. (2024).
Comprehension of addition-subtraction inverse principle in 5- and 6-year-old children.
Taiwan Journal of Mathematics Education, *11*(2), 1–28.
doi: 10.6278/tjme.202410_11(2).001

Comprehension of Addition-Subtraction Inverse Principle in 5- and 6-year-old Children

Meng-Ru Yu [1, 2]　　Meng-Lung Lai [2]

[1] Yi-Feng Senior High School

[2] Department of Early Childhood Education, National Chiayi University

Addition-Subtraction Inverse Principle (ASIP), understanding that adding and subtracting the same number will leave the original amount unchanged, plays an important role in children's arithmetic development (Baroody & Lai, 2007). Previous studies on ASIP mostly adopted either computational shortcut tasks or algebraic-reasoning tasks, in which the former was targeted on procedural knowledge and might overestimate children's ASIP and the latter on conceptual knowledge and might underestimate children's ASIP. In this study, we examined children's comprehensive understanding of ASIP using both computational shortcut tasks and algebraic-reasoning tasks, which were presented through 4 animations designed to attract these preschoolers' attention. By doing so, we could clearly reveal children's unbiased understanding of the ASIP. Twenty 5-year-old and 6-year-old children (N = 40) from central Taiwan participated. Instruments included algebraic-reasoning tasks (e.g., forests and birds) and computational shortcut tasks (e.g., baskets and apples), in which 6 inversion trials and 6 standard trials were created for each scenario. The results showed that Taiwanese 5-year-old and 6-year-old children's understanding of ASIP was similar on both tasks and these participants already exhibited marginal competence on ASIP. Interestingly, participants performed better on the inversion trials than on the standard trials in the computational shortcut tasks while performing similarly on both trials in the algebraic-reasoning tasks. Finally, educational implications and future research questions are provided.

Keyword: addition-subtraction inverse principle, algebraic-reasoning task, animations, computational-shortcut task

Corresponding author：Meng-Lung Lai，e-mail：laimenglung@gmail.com
Received：13 April 2024;
Accepted：9 October 2024.

壹、緒論

幼兒的成長歷程中，常透過平時生活中接觸的各項數學經驗，發展出大量的非正式數學知識（Baroody & Wilkins, 1999），進而學習與探索各種數學概念。在幼兒日常生活中，研究者觀察到幼兒除了能算出班級慶生會中的同學數量，還能分配給每一個人兩塊餅乾；在限制六個人操作的學習區中，幼兒能觀察到已經有四位幼兒進入學習區的情況之下，尚有兩個名額的空間；在戶外活動時，幼兒能觀察到不同種類的花朵有不同數量的花瓣，因此比賽誰能夠最快蒐集到 20 片花瓣。上述例子在在說明生活中有許多經驗可以啟發幼兒的數學概念，奠定幼兒未來數學學習的基礎，對未來數學理解能力的影響相當大（Eaves et al., 2019; Robinson et al., 2006; Sherman & Bisanz, 2007; Wong et al., 2021）。

學齡前的數學經驗有助於發展早期的數概念，過去的研究顯示三歲到五歲半的幼兒已經開始能理解一對一對應、基數概念、口頭計數、辨認數字、甚至簡單的加法與減法運算等基礎數學概念（Litkowski et al., 2020）。此外，三歲到四歲的幼兒能夠透過觀察題目來判斷使用加法或減法，並進行估算與驗算（Zur & Gelman, 2004），甚至能夠運用數數策略來解決簡單的小數量加減法問題（張麗芬，2005），可見三到四歲幼兒在計數和算術原理已經具備基礎的理解。

然而，雖然幼兒有基礎加法與減法的概念，但並不代表他們能完全理解與靈活運用加法與減法，唯有當幼兒能了解加減法之間的可逆（inverse）關係，才算完全理解加法與減法的概念（Sherman & Bisanz, 2007）。換言之，理解加減法可逆原則為學齡前幼兒學習算術原理的關鍵，有助於學習結合律（associative law）和分配律（distributive law）等重要的數學定律（Eaves et al., 2019; Robinson et al., 2006）。

加減法可逆原則（起始數量在加減相同數量之後，不會改變原本的數量，即 $a+b-b=a$）是一個相當複雜的概念，除了本身包含許多運算原則，也影響其他數學概念的發展（Wong et al., 2021）。過去研究顯示，甚至三歲幼兒就已經能察覺到加減法可逆原則（Sherman & Bisanz, 2007），且隨著年齡發展與經驗累積，學齡前幼兒漸漸習得加減法可逆原則（Canobi et al., 2002）。除了年齡的因素之外，學者們進一步探討影響加減法可逆原則表現的因素。例如，Ching（2023）考量可逆題（$a+b-b=a$）與標準題（$a+b-b=a$），以及具體物與數字符號等變項對幼兒加減法可逆原則表現的影響，Ching 發現五歲幼兒只有在可逆題中顯示具體物的表現優於符號的現象，而標準題則無此現象。由此可知，幼兒的加減法可逆原則表現會受到年齡、題型與表徵的影響，幼兒可透過具體物的表徵方式提升加減法可逆原則的表現。此外，近年來有學者發現情境式動畫對學習的益處，不但有助於幼兒使用有效的策略來解題（Yamana & Inoue, 2006），還能提升幼兒的學習興趣與增進記憶力及專注度（Birisci et al., 2010; Handayani et al., 2020），因此，本研究使用「情境式動畫」探究五歲與六歲幼兒在加減法可逆原則的表現。

過去有許多學者（Baroody & Lai, 2007; Bryant et al., 1999; Gilmore & Bryant, 2006; Lai et al., 2008; Rasmussen et al., 2003; Siegler & Stern, 1998）探究幼兒在加減法可逆概念的理解與表現時，大多使用單一工具（代數推理任務或是運算捷徑任務）來進行測驗，因而導致可能高估或是低估幼兒的能力（Baroody & Lai, 2007），故本研究將採用兩種任務以更能全面呈現幼兒在加減法可逆概念的理解程度。

綜上所述，加減法可逆概念的發展對幼兒未來的學習極為重要，由於五歲與六歲幼兒已具備基本加法與減法的運算能力，因此若能在學齡前階段掌握其加減法可逆概念的發展程度，則有助於幼小銜接，提升未來正式教育的數學學習成就。基於上述動機，本研究的研究目的為：一、探究五歲與六歲幼兒之加減法可逆概念的理解程度差異；二、探究五歲與六歲幼兒在代數推理及運算捷徑任務之加減法可逆概念的答對率差異；三、探究五歲與六歲幼兒在可逆題型與標準題型的答對率及答題速度。

貳、文獻探討

一、加減法可逆原則的相關研究

加減法可逆原則，係指一個起始量在加減同一個數量之後，最後得到的數量不變，如 $a+b-b = a$，為加減運算邏輯中相當重要的概念（Baroody & Lai, 2007）。Sherman 與 Bisanz（2007）指出，加減法可逆原則是理解算術的重要關鍵，當幼兒了解加法與減法間的可逆關係，才算完全理解加減法的概念；換句話說，理解加減法可逆原則代表能夠靈活運用加法與減法的概念，明白數量能夠分解與合成（如：$a+b = c$，所以 $c-b = a$），以及進一步了解數量中部分－部分－整體（part-part-whole）的關係（Bryant et al., 1999; Ding & Auxter, 2017）。

此外，Robinson 等人（2006）及 Eaves 等人（2019）發現若能理解加減法可逆原則，將對彈性使用結合律（associative law）解題有幫助。例如「$27+8-4 = \square$」，先計算「$8-4$」再加上 27，不需非得由左至右的機械化運算。Siegler（2006）進而探討兒童在加減法可逆原則的學習歷程，研究結果發現兒童在處理加減法可逆問題時使用了計算、逆反（negation）及捷徑（shortcut）等策略，其中計算策略花費較長的時間且正確率較低，逆反策略所花費的時間縮短、正確率提升，而捷徑策略則能在短時間內說出正確答案。然而，臺灣的教育體系中，在國小數學課程中才會開始正式出現加減法運算的題型，那麼在進入國小之前，幼兒是否能夠具備如此重要的概念呢？

有關幼兒在「加減法可逆原則」的發展，一直是發展心理學者相當重視的議題，直至今日，仍陸續有許多研究在探討此重要的數學概念。依據 Piaget（1964）的觀察與研究，認為學齡前幼兒尚未發展出可逆性之邏輯思考，但從近代學者的研究結果看來，學齡前階段就能開始發展可逆概念的雛形（Baroody & Lai, 2007; Bryant et al., 1999; Gilmore & Bryant, 2006; Lai et al., 2008; Rasmussen et al., 2003; Siegler & Stern, 1998）。

綜上所述，本研究欲探討幼兒在進入國民小學前的可逆概念發展情形，以及其理解程度有多深？過去探討「加減法可逆原則」發展之研究的主要研究工具為代數推理與運算捷徑任務，詳細說明如下。

（一）代數推理任務（Algebraic-Reasoning Tasks）的相關研究

代數推理任務的特色為受試者使用邏輯推理的方式來判斷，在加減某個數量之後，結果量是否與起始量一樣多；例如，動畫中呈現樹上原本有 5 隻小鳥，飛進來 2 隻小鳥之後，再飛出去 2 隻小鳥，最後請受試幼兒回答樹上的小鳥跟原本比起來，一樣多還是不一樣多？Baroody 與 Lai（2007）使用代數推理概念設計實驗，透過覆蓋物品的題目來探究 48 位四至六歲的幼兒對加減法可逆原則的理解；研究結果發現只有 1 位四歲幼兒能夠正確回答，而五歲幼兒有 25%的正確率，直到六歲幼兒達到 37.5%的正確率，代表幼兒在「加減法可逆原則」的理解能力會隨著年齡成長而發展。

此外，Lai 等人（2008）利用代數推理任務設計加減法可逆測驗，將 60 位四歲與五歲幼兒分為實驗組與控制組，利用具體物，設計純加法、純減法及混和加減法的題目進行八週的訓練實驗。研究結果發現，四歲幼兒在前測中只有 3.3%的正確率，而在培訓後的表現雖然還是不佳，但是仍明顯優於控制組；五歲幼兒在前測中的正確率為 33.3%，在培訓後進步為 75%的正確率。因此，研究者推論五歲幼兒的表現明顯優於四歲幼兒，也具有更豐富的學習潛力。

將上述研究與過去加減法可逆概念的相關研究（Bryant et al., 1999; Gilmore & Bryant, 2006; Rasmussen et al., 2003）相較，例如，Rasmussen 等人（2003）利用運算捷徑任務探究四歲與六歲幼兒的可逆概念，發現四歲幼兒的答對率為 50%，六歲幼兒的答對率為 75%，而在代數推理任務的研究中，四歲幼兒只有 1 位答對，六歲幼兒的答對率為 37.5%（Baroody & Lai, 2007），可以發現同齡幼兒在運算捷徑任務的表現較佳，換言之，以代數推理任務評估幼兒的加減法可逆能力有低估之虞，可能有以下原因：一、對幼兒來說屬於相對陌生的推理形式；二、需要仔細關注轉換關係；三、需要理解任務重點為「結果量與起始量的比較」，而非單純使用計算來回答「結果量」（Baroody & Lai, 2007）。

（二）運算捷徑任務（Computational Shortcut Tasks）的相關研究

運算捷徑任務的特色為受試者若已習得加減法可逆原則，就能省略繁瑣的運算步驟，在短時間內（若反應時間少於三秒則判斷為使用可逆概念解題）正確地說出答案。過去，Bryant 等人（1999）透過可逆題與標準題檢視年齡、加減順序及加減數量大小對幼兒可逆概念的影響，研究結果發現，年齡較大的幼兒表現較佳，而且幼兒在先加後減和先減後加題目之間的表現差異不大；此外，加減不同數量對於可逆題並無影響，而是在標準題的表現有顯著差異。無獨有偶，Rasmussen 等人（2003）使用一對一訪談方式，設計可逆題（$a+b-b$）與標準題（$a+b-c$）探究 48 位四歲與六歲幼兒是否能運用可逆原則回答問題，研究結果顯示四歲幼兒在可逆題的答對率為 50%，六歲幼兒在可逆題的答對率為 75%，而且全體受試

幼兒在可逆題的答對率皆高於標準題。研究者認為四歲幼兒似乎能意識到加減法可逆原則，但仍尚未穩定理解加減法可逆原則。為了探究幼兒在不同形式材料的加減法可逆題型的表現，Gilmore 與 Bryant（2006）使用數字、文字及圖片呈現測驗題目來探究 59 位六歲與七歲幼兒的答題表現，研究結果發現受試幼兒在圖片形式材料中更能運用加減法可逆原則解題，且可逆題的表現優於標準題。

除此之外，賴孟龍等人（2022）進而探究學齡前幼兒在加減法可逆原則的習得歷程，透過微觀發展論設計運算捷徑任務，將 34 位五歲幼兒分組為 16 位接受全部為可逆題（a+b−b）的一般組及 18 位接受一半可逆題與一半標準題（a+b−c）的助長組，進行兩個月的實驗，實驗以情境式動畫進行，共分為七個階段，包含前測、加減法練習與後測。研究結果發現，雖然助長組能比一般組更快發現加減法可逆原則，但兩組幼兒的後測表現皆優於前測表現，代表密集的可逆題練習有助於幼兒在加減法可逆原則的認知發展。

過去研究所使用的單一測驗工具有各自的限制，比如代數推理任務需要運用邏輯思考來解題，Baroody 與 Lai（2007）認為，這種推理模式對幼兒來說較新穎，故幼兒可能因為對此任務較陌生而影響表現，進而導致研究者低估幼兒在加減法可逆概念的能力；而運算捷徑任務需要依賴運算過程來解題，受試者可能通過計算的方式，而非使用加減法可逆概念來得知答案（Baroody et al., 2009; Bryant et al., 1999; Klein & Bisanz, 2000），進而導致研究者高估受試者的表現。為了能夠更完整了解幼兒對加減法可逆概念的發展與理解程度，本研究同時檢視五歲與六歲幼兒在代數推理（運用概念性知識解題）與運算捷徑（運用程序性知識解題）任務的表現，透過可逆題與標準題探討五歲與六歲幼兒在加減法可逆原則的理解程度。

二、情境式動畫的相關研究

過去研究者使用積木、文字與圖片等靜態材料來設計測驗，然而近年來有學者發現情境式動畫對學習的益處，不但能夠提升兒童的學習興趣、增進記憶力及專注度（Birisci et al., 2010; Handayani et al., 2020），也有助於兒童使用有效的策略來解題（Yamana & Inoue, 2006），還能降低學習的壓力（Wiryanto et al., 2021），進而提升數學能力（McCarthy et al., 2018; Nusir et al., 2012）。

為了檢視動畫對幼兒學習的影響，Lin（2019）使用單詞、圖片及動畫為材料，探究 60 位幼兒的語文學習表現，研究結果顯示，使用動畫學習的組別在閱讀和理解方面的表現均優於使用單字和圖片的組別，代表動畫可以為幼兒帶來更好的學習表現。

黃志雄（2022）以 90 位幼兒為對象，分別設計動畫、語音及無聲版本等三種型式之電子繪本，藉此探討幼兒在閱讀過程中的腦波注意力與繪本理解表現之差異。研究結果發現，幼兒在閱讀動畫繪本時的腦波注意力與繪本理解力皆高於語音繪本及無聲繪本，因此推薦教師可運用動畫媒材作為教學調整之策略，不但能提升幼兒之興趣與注意力，還能對學習內容的理解有所幫助。此外，賴孟龍等人（2022）以情境式動畫為研究工具，探究學齡前

幼兒在加減法可逆原則的習得歷程；研究結果發現，幼兒在情境式動畫呈現加減法可逆原則的表現優於其他靜態媒介。

過去的研究顯示，大部分的學生認為數學是一門困難的學科，因此教師需要突破傳統的教學方式，引導學生激發學習興趣與動機；而在教學中使用動畫輔助對兒童的數學能力產生正向的影響（Nusir et al., 2012），除了能增強學生的數學感知能力、增加他們對更高階學習技能的運用之外（Yang & Li, 2013），還能提升學習意願及理解能力（Weng & Yang, 2017）。Wahyudi 等人（2020）則發現，動畫能夠激發學生產生批判性思考，強化創意思維及問題解決的能力。

由上述可知，情境式動畫能夠提升幼兒的學習興趣與動機，增加理解能力與解決問題的意願。故本研究使用情境式動畫呈現題目，探究幼兒在加減法可逆概念的理解程度。

參、研究設計

一、研究對象

本研究對象來自臺灣南部一所私立幼兒園，採主題式混齡教學，以主題活動及學習區操作為主，未強調運算練習。幼兒大多來自中產階級的家庭，家長的職業為白領階級（例如：教師與公務人員），分別有 20 位五歲（男生 10 位、女生 10 位，平均年齡五歲七個月）及 20 位六歲（男生 11 位、女生 9 位，平均年齡六歲八個月）幼兒參與研究。

在邀請研究對象後，研究者經由紙筆測驗確認受試幼兒皆已具備基本加法與基本減法的運算能力，足以應對本測驗題目的考驗；此外，Klein 與 Bisanz（2000）及 Rasmussen 等人（2003）指出，幼兒的運算能力與可逆概念的表現並無相關性，擅長計算的幼兒不一定具備可逆概念。因此，本研究將透過二階段加減法題目來探究受試幼兒是否能運用加減法可逆原則解題。

二、研究工具與計分方式

為讓受試幼兒在測驗過程中維持興趣及專注力，本研究共編製四組在幼兒生活經驗中較熟悉的情境（森林小鳥、池塘青蛙、籃子蘋果、水草小魚），每組情境各 12 題。以下將介紹測驗工具、題目設計、施測指導語以及測驗結果計分方式。

（一）加減法可逆概念測驗工具

本研究的加減法可逆概念測驗工具包含代數推理與運算捷徑任務。在兩種測驗中，分別設計「可逆題」（a+b−b）24 題與「標準題」（a+b−c）24 題，測驗內容總表如表 1。

表 1
測驗內容總表

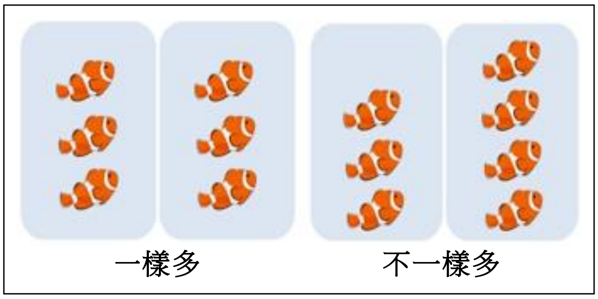
情境	題目模式	題目範例	代數推理 （第 1 次測驗）	運算捷徑 （第 2 次測驗）
森林小鳥	a+b−b=？ a+b−c=？	9+3−3=？ 9+3−2=？	可逆題 6 題 標準題 6 題	
池塘青蛙	a−b+b=？ a−b+c=？	9−3+3=？ 9−3+2=？	可逆題 6 題 標準題 6 題	
籃子蘋果	a+b−b=？ a+b−c=？	6+4−4=？ 6+4−3=？		可逆題 6 題 標準題 6 題
水草小魚	a−b+b=？ a−b+c=？	6−4+4=？ 6−4+3=？		可逆題 6 題 標準題 6 題

參考 Baroody 與 Lai（2007）及 Lai 等人（2008）的研究設計，為了避免幼兒透過計算得出起始量，或因數量過大而感到挫折，本研究將起始量設定在 5 到 10 之間；此外，為使幼兒能透過視知辨識數量，故設計操弄加減的數量為 2 到 4，讓幼兒能快速判斷操弄的數量是否有可逆的關係。為了確認受試幼兒是真正理解可逆概念，而非使用計算方式解題，故設計可逆題處理的總數量大於標準題，例如可逆題為 6+3−3，須處理的總數量為 12；標準題為 6+3−2，處理的總數量則為 11。若幼兒未使用可逆概念而採用由左至右的運算方式解題，以工作記憶能力來看，總數量較大的可逆題在計算上會比較困難（Rasmussen et al., 2003），故幼兒回答的速度可能較慢或是錯誤率較高；但若幼兒能在難度較高的題型中仍有更好的表現，便能判斷幼兒當下使用可逆概念來解題。兩種題型安排為不固定的穿插交替順序，相同題型不連續出現三次（含）以上，避免幼兒因重複性而習慣使用相同方式解答。

1. 代數推理任務

代數推理任務設計一個較大的起始量（例如：9 與 10），在題目中不唸出數量，以「這麼多」代替，並提醒受試幼兒不需計算。在加減某一數量後，讓受試幼兒回答結果量與起始量一樣多還是不一樣多。為檢視幼兒是否具備分辨「一樣多」和「不一樣多」的能力，在測驗前先讓受試幼兒透過圖卡執行辨識能力測試，確認受試幼兒能夠進行數量的比較與辨識，如圖 1。

圖 1
數量比較辨識測驗



若受試幼兒能夠在觀看圖卡後正確回答「一樣多」和「不一樣多」，代表已經具備數量辨識與比較的能力，即接著進行代數推理測驗。

（1）代數推理任務題目設計

代數推理任務的題目分別設計為先加後減與先減後加的順序，下列以先加後減的情境式動畫「森林小鳥」為例：「早上，有這麼多隻小鳥在樹上，飛進來 2 隻小鳥，飛出去 2 隻小鳥，現在，樹上的小鳥跟早上比起來，一樣多還是不一樣多？」呈現畫面如圖 2。

圖 2

「森林小鳥」影片分鏡圖

<table>
<tr><td colspan="4">9 + 2 − 2 = ?</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>早上，有這麼多隻小鳥在樹上</td><td>飛進來 2 隻小鳥</td><td>飛出去 2 隻小鳥</td><td>現在，樹上的小鳥跟早上比起來，一樣多還是不一樣多？</td></tr>
</table>

（2）練習題的指導語

A. <u>說明施測方式的指導語</u>

你會先看到樹上有一些小鳥，
不久之後，會有幾隻小鳥飛進來，然後，會有幾隻小鳥飛出去，
你只要跟老師說，
最後樹上的小鳥跟本來的小鳥比起來，一樣多還是不一樣多！

B. <u>受試幼兒回答正確時的指導語</u>（練習題：7+1−1）

沒錯！有一隻小鳥飛進來，有一隻小鳥飛出去，
最後樹上的小鳥跟本來的小鳥比起來，數量是一樣多的。

C. <u>受試幼兒回答錯誤時的指導語</u>

要仔細注意看喔！
有一隻小鳥飛進來，有一隻小鳥飛出去，
最後樹上的小鳥跟本來的小鳥比起來，數量應該是一樣多的喔！

2. 運算捷徑任務

運算捷徑任務須使用運算的方式解題，故起始量設計得比代數推理的起始量小（例如：5 與 6），並由旁白於題目中唸出起始數量以幫助幼兒識別，在加減某一數量後，請受試幼兒盡快回答結果量。

為了分辨幼兒透過運算方式（耗時較長）亦或使用加減法可逆原則（耗時較短）解題，本研究將檢視幼兒的反應時間；情境式動畫播放過程約 20 秒，在動畫結束後請幼兒開始答題並同時計算反應時間，讓所有受試幼兒使用同樣的標準施測，並將反應時間在三秒內定義為使用加減法可逆原則解題（Siegler & Stern, 1998），若反應時間超過三秒則定義為使用運算方式解題。

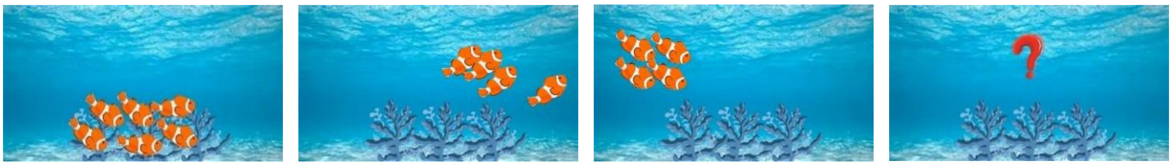
（1）運算捷徑任務題目設計

題目分別設計為先加後減與先減後加的順序，下列以先減後加的情境式動畫「水草小魚」為例：「水草裡有 6 條魚，游出去 4 條魚，游進來 4 條魚，水草裡還剩下幾條魚？」呈現畫面如圖 3。

圖 3

「水草小魚」影片分鏡圖

6	−	4	+	4	=	?



水草裡有 6 條魚	游出去 4 條魚	游進來 4 條魚	水草裡剩下幾條魚？

（2）練習題的指導語

A. <u>說明施測方式的指導語</u>
你會看到水草裡有一些魚，
不久之後，會游出去幾條魚，然後，再游進來幾條魚。
你要趕快跟老師說，水草裡還剩下幾條魚。

B. <u>受試幼兒回答正確時的指導語</u>（練習題：4−1+1）
沒錯！水草裡原本有四條魚，
游出去一條魚，再游進來一條魚，
最後水草裡還剩下四條魚。

C. <u>受試幼兒回答錯誤時的指導語</u>
要仔細注意看喔！
水草裡原本有四條魚，
游出去一條魚，再游進來一條魚，
最後水草裡應該剩下四條魚喔！

（二）測驗計分方式

1. 計分標準

針對可逆題型，回答正確得 1 分，總分 24 分；若受試幼兒在施測過程中連錯 3 題（連續 3 題將包含標準題與可逆題，代表幼兒未能理解題目內容或無法正確解題），即終止測驗，後續計分為 0 分。

若發現幼兒在測驗中盲目作答（12 題中有 10 題），例如在代數推理任務中盲目回答「一樣多」或「不一樣多」，或是在運算捷徑任務中盲目回答「起始量」（代表在可逆題型中會答對，但是在標準題型中會答錯），則判定為作答誤差，記為 0 分。

施測者於測驗過程中記錄受試幼兒之答案，在測驗結束後透過核對錄音檔與計分表之紀錄來計算受試幼兒分數，每題答對得 1 分，總分 48 分。

2. 理解程度

為分析幼兒在加減法可逆概念的個別程度，根據受試幼兒在測驗中獲得的分數，參考 Baroody 與 Lai（2007）及 Lai 等人（2008）之研究設計，將可逆理解能力區分為「穩定理解」、「基礎理解」及「尚未習得」三個層次，分別說明如下：

「穩定理解」：答對 10 題（含）以上（答對率 83%以上）；根據二項式定理，12 題中猜對 10 題以上的可能性僅有 2%（p = .019），穩定理解的受試幼兒在加減法可逆的精熟程度高達 98%。

「基礎理解」：答對 7−9 題（答對率 51%至 82%）；根據二項式定理，12 題中猜對 9 題、8 題與 7 題的可能性均大於 5%（p = .368）。

「尚未習得」：答對 6 題（含）以下（答對率低於 50%）；根據二項式定理，12 題中猜對 6 題以下的可能性為 61%（p = .613），此數據表示受試幼兒猜對 6 題（含）以下的機率高達 61%，故判斷其未能理解加減法可逆概念，歸類為尚未習得。

3. 解釋類型

為了釐清幼兒解題的策略，研究者在每位幼兒回答可逆題型（隨機選擇 2 題）後詢問如此答題的原因（你為什麼會覺得一樣多／不一樣多？），並參考 Potgieter 與 Blignaut（2018）的分析方式，將幼兒的解釋類型依據答題正確性與解釋的內容區分為四個層次：外顯精熟、內隱理解、潛在理解與尚未習得。以題目 5+2−2 為例：

早上，有這麼多隻小鳥在樹上，飛來了 2 隻小鳥，又飛出去 2 隻小鳥，
請問，現在的小鳥和早上比起來，一樣多還是不一樣多？

（1）外顯精熟

答案正確，而且敘述能夠運用加減法可逆原則，例如：

一樣多，因為 2 隻小鳥飛進來，又有 2 隻小鳥飛出去。

一樣多，他來了 2 隻又飛走了，現在和早上的小鳥一模一樣。

（2）內隱理解

答案正確，但是敘述未運用加減法可逆原則，例如：

一樣多，因為剛剛的鳥還在裡面，進去的鳥就飛出來了。

一樣多，好像又有 2 隻飛出去。

（3）潛在理解

答案錯誤，但是敘述能夠具體對應影片的內容，例如：

不一樣多，原本的多了 2 隻又少了 2 隻。

不一樣多，因為 2 隻小鳥飛進來，又有 2 隻小鳥飛出去。

（4）尚未習得

答案錯誤，而且敘述無法具體對應影片的內容，例如：

不一樣多，因為我猜少了很多隻。

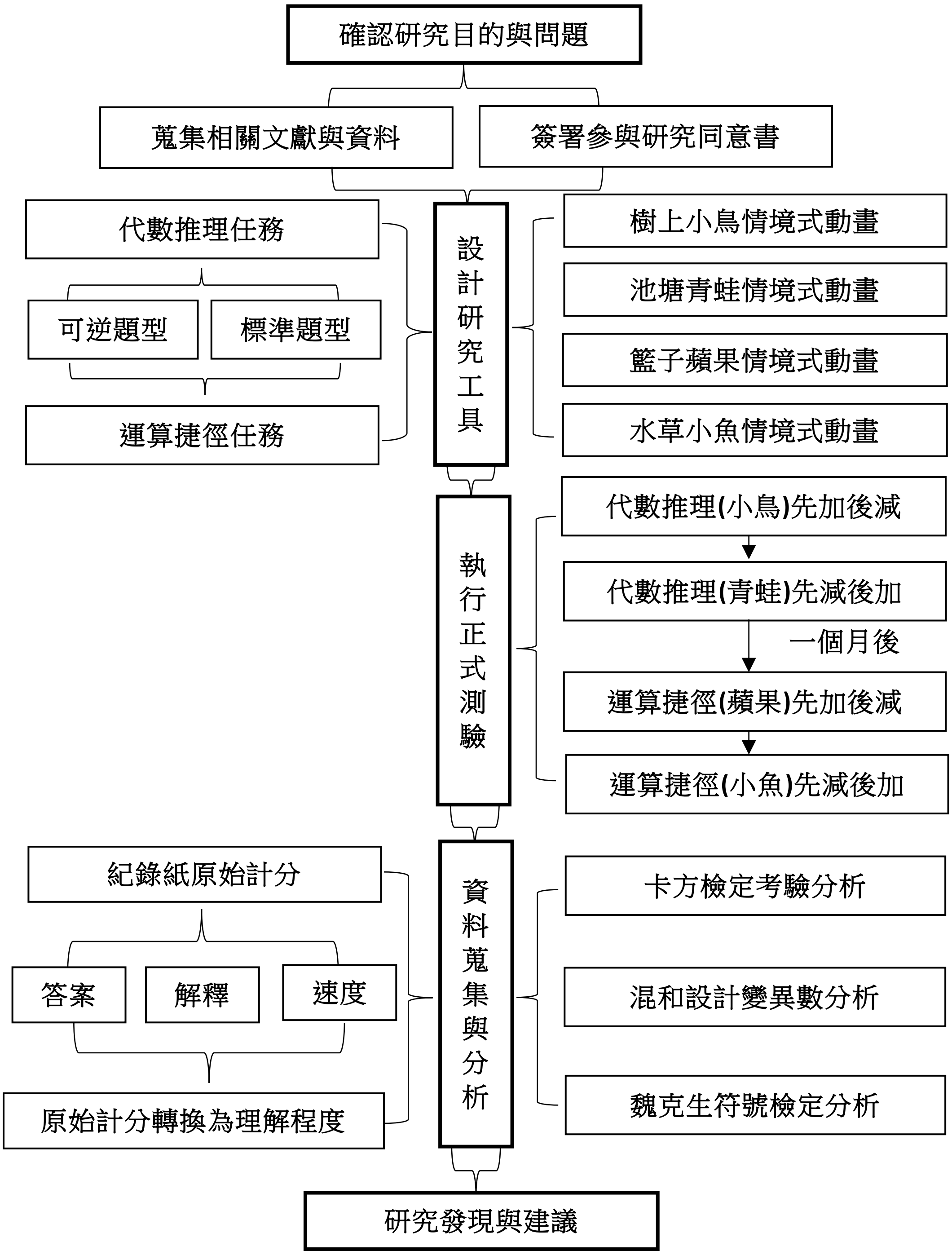
不知道，我感覺他越來越多、越來越多。

三、研究流程

為避免受試幼兒習慣運算捷徑概念的計算邏輯，進而影響作答方式，故本研究分為兩次測驗，第一次先給予代數推理任務，一個月後再進行運算捷徑任務。施測場域為臺灣的兩所私立幼兒園，由施測者與受試幼兒進行一對一的單獨測驗；考量學齡前幼兒的專注力與耐心程度，測驗的單題時間約 20 秒，每次施測的時間控制在 15 分鐘以內。若在施測過程中發現受試幼兒呈現分心、疲憊或是其他會影響施測結果的情形，則中止測驗，並待下回受試幼兒狀態恢復後，再接續上次未完成的測驗。

本研究設計兩種任務，包含四種情境，每次任務正式題目之前安排 2 題練習題，搭配指導語讓受試幼兒瞭解測驗的模式與答題方法後，接著才會進行 24 題正式測驗。在正式測試過程中施測者只會給予「很好」、「快完成了」等中性用語鼓勵受試幼兒完成任務。測驗過程採全程錄音，施測者利用筆記型電腦播放情境式動畫影片，並請受試幼兒直接說出答案，由施測者立即在紀錄紙上記錄答案，待測驗結束後以錄音檔核對成績，爾後分析結果。研究流程如圖 4。

圖 4
研究流程


確認研究目的與問題
蒐集相關文獻與資料
簽署參與研究同意書
代數推理任務
可逆題型
標準題型
運算捷徑任務
設計研究工具
樹上小鳥情境式動畫
池塘青蛙情境式動畫
籃子蘋果情境式動畫
水草小魚情境式動畫
執行正式測驗
代數推理(小鳥)先加後減
代數推理(青蛙)先減後加
一個月後
運算捷徑(蘋果)先加後減
運算捷徑(小魚)先減後加
紀錄紙原始計分
答案
解釋
速度
原始計分轉換為理解程度
資料蒐集與分析
卡方檢定考驗分析
混和設計變異數分析
魏克生符號檢定分析
研究發現與建議

四、資料蒐集與分析方法

（一）資料蒐集

研究者透過紙本記錄受試幼兒的答案，爾後藉由回放錄音檔加以核對，接著將其輸入 Microsoft Office Excel 軟體，並將答案轉換為原始計分（每題答對得 1 分）。扣除練習題，代數推理任務總分為 24 分；運算捷徑任務總分為 24 分。

為了確保研究的品質和正確性，研究者若發現受試幼兒發生盲目作答的情況，則判定為作答誤差，記為 0 分。分析數據後發現，40 位受試幼兒在 2 次代數推理任務中，因盲目作答而得到 0 分有 3 人（3.75%）；而在運算捷徑任務中並無幼兒盲目作答。

（二）分析方式

1. 受試幼兒在代數推理與運算捷徑任務表現的差異

分析方式採用卡方檢定，考驗幼兒在兩種任務中的理解程度；接著使用 2（年齡：五歲 vs.六歲）× 2（可逆概念：代數推理 vs.運算捷徑）二因子混合樣本變異數分析方法，其中自變項為受試幼兒年齡，依變項為受試幼兒兩種任務之答題正確率；最後透過魏克生符號檢定來探討五歲與六歲幼兒分別在兩種任務之表現差異。

2. 受試幼兒在加減法可逆概念表現的差異

分析方式採用 2（可逆概念：代數推理 vs.運算捷徑）× 2（題型：可逆題 vs.標準題）二因子混合樣本變異數分析方法，其中自變項為代數推理與運算捷徑兩種任務，依變項為受試幼兒分別在可逆題與標準題之答題正確率；接著進一步使用成對樣本 t 檢定，探討受試幼兒在加減法可逆概念中的表現；最後透過魏克生符號檢定檢視五歲與六歲幼兒在可逆題與標準題的答題速度差異。

肆、研究結果

一、五歲與六歲幼兒在加減法可逆概念的理解程度差異

（一）五歲與六歲幼兒在代數推理與運算捷徑任務中之加減法可逆概念的理解程度

如表 2 所示，五歲幼兒在代數推理任務中之加減法可逆概念的理解程度為「穩定理解」的人數為 12 人、「基礎理解」的人數為 5 人及「尚未習得」的人數為 3 人；在運算捷徑任務中之加減法可逆概念的理解程度為「穩定理解」的人數為 12 人、「基礎理解」的人數為 5 人及「尚未習得」的人數為 3 人。而六歲幼兒在代數推理任務中之加減法可逆概念的理解程度為「穩定理解」的人數為 13 人、「基礎理解」的人數為 3 人及「尚未習得」的人數為 4 人；在運算捷徑任務中之加減法可逆概念的理解程度為「穩定理解」的人數為 14 人、「基礎理解」的人數為 3 人及「尚未習得」的人數為 3 人。

表 2
五歲與六歲幼兒在兩種任務中之加減法可逆概念的理解程度

年齡	任務	理解程度	人數	百分比	χ^2 值	顯著性
五歲	代數推理	穩定理解	12	60%	0.00	1.000
		基礎理解	5	25%		
		尚未習得	3	15%		
	運算捷徑	穩定理解	12	60%		
		基礎理解	5	25%		
		尚未習得	3	15%		
六歲	代數推理	穩定理解	13	65%	0.18	.914
		基礎理解	3	15%		
		尚未習得	4	20%		
	運算捷徑	穩定理解	14	70%		
		基礎理解	3	15%		
		尚未習得	3	15%		

經卡方檢定考驗五歲幼兒在兩種任務中之加減法可逆概念的理解人數差異，發現五歲幼兒在兩種任務的理解人數並無顯著差異，χ^2 (1, N = 19) = 0.00，p = 1.000，代表五歲幼兒在代數推理與運算捷徑任務中之加減法可逆概念的理解程度表現類似。經卡方檢定考驗六歲幼兒在兩種任務中之加減法可逆概念的理解人數差異，發現六歲幼兒在兩種任務的理解人數並無顯著差異，χ^2 (1, N = 19) = 0.18，p = .914，代表六歲幼兒在代數推理與運算捷徑任務中之加減法可逆概念的理解程度表現類似。

（二）受試幼兒在代數推理及運算捷徑任務之加減法可逆概念的理解程度差異

受試幼兒在兩種任務中的理解程度差異如表 3 所示。

表 3
代數推理與運算捷徑之加減法可逆概念的理解程度比較

年齡	理解程度	運算捷徑		
		穩定理解	基礎理解	尚未習得
五歲	代數推理			
	穩定理解	8 a	4 b	0 b
	基礎理解	3 c	1 a	1 b
	尚未習得	1 c	0 c	2 a
六歲	代數推理			
	穩定理解	12 a	1 b	0 b
	基礎理解	0 c	2 a	1 b
	尚未習得	2 c	0 c	2 a

註：a 代數推理的表現同於運算捷徑；b 代數推理的表現優於運算捷徑；c 代數推理的表現差於運算捷徑。

五歲幼兒在兩種任務中，表現相同的人數有 11 人，代數推理任務表現較佳的人數有 5 人，運算捷徑任務表現較佳的人數有 4 人。經魏克生符號檢定考驗五歲幼兒在兩種任務中之加減法可逆概念的理解人數差異（5 vs. 4），發現五歲幼兒在兩種任務中的理解人數並無顯著差異（$Z = 0.00, p = 1.000$）。

六歲幼兒在兩種任務中，表現相同的人數有 16 人，代數推理任務表現較佳的人數有 2 人，運算捷徑任務表現較佳的人數有 2 人。經魏克生符號檢定考驗六歲幼兒在兩種任務中之加減法可逆概念的理解人數差異（2 vs. 2），發現六歲幼兒在兩種任務中的理解人數並無顯著差異（$Z = 0.00, p = 1.000$）。整體而言，五歲與六歲幼兒在代數推理及運算捷徑任務之加減法可逆概念的理解程度表現類似，五歲與六歲幼兒的加減法可逆能力相近。

（三）受試幼兒在加減法可逆測驗之解釋類型分析

本研究將受試幼兒的答題表現與答題解釋合併分析，將答題類型定義為四個層次：答題正確而且解釋有條理，定義為外顯精熟；答題正確但解釋不清楚，定義為內隱理解；答題錯誤但解釋有條理，定義為潛在理解；答題錯誤而且解釋無邏輯，定義為尚未習得。為了檢視幼兒在不同任務的答題解釋類型，以下分析五歲與六歲幼兒在上述四個解釋層次的表現差異。

1. 五歲幼兒在代數推理及運算捷徑任務中之答題解釋類型分析

五歲幼兒在代數推理任務中之答題解釋類型出現次數分別為：外顯精熟 34 次、內隱理解 2 次、潛在理解 1 次及尚未習得 3 次。卡方適合度檢定結果呈現顯著差異，$\chi^2 (3, N = 19) = 77.00$，$p < .001$，因此推論五歲幼兒在代數推理任務中多屬於外顯精熟。

五歲幼兒在運算捷徑任務中之答題解釋類型出現次數分別為：外顯精熟 26 次、內隱理解 10 次、潛在理解 0 次及尚未習得 4 次。卡方適合度檢定結果呈現顯著差異，$\chi^2 (3, N = 19) = 19.40$，$p < .001$，因此推論五歲幼兒在運算捷徑任務中多屬於外顯精熟。

2. 六歲幼兒在代數推理及運算捷徑任務中之答題解釋類型分析

六歲幼兒在代數推理任務中之答題解釋類型出現次數分別為：外顯精熟 36 次、內隱理解 3 次、潛在理解 1 次及尚未習得 0 次。卡方適合度檢定結果呈現顯著差異，$\chi^2 (3, N = 19) = 90.60$，$p < .001$，因此推論六歲幼兒在代數推理任務中多屬於外顯精熟。

六歲幼兒在運算捷徑任務中之答題解釋類型出現次數分別為：外顯精熟 29 次、內隱理解 10 次、潛在理解 1 次及尚未習得 0 次。卡方適合度檢定結果呈現顯著差異，$\chi^2 (3, N = 19) = 54.20$，$p < .001$，因此推論六歲幼兒在運算捷徑任務中多屬於外顯精熟。

二、五歲與六歲幼兒在不同加減法可逆概念的答對率差異

（一）五歲與六歲幼兒在代數推理及運算捷徑任務之可逆題型得分表現

五歲與六歲幼兒在兩種任務之可逆題型得分表現如表 4 所示。

表 4
代數推理及運算捷徑任務之可逆題型得分

任務	年齡	人數	平均數	標準差	t 值	顯著性
代數推理	五歲	20	9.05	3.10	−0.60	.554
	六歲	20	9.60	2.70		
運算捷徑	五歲	20	8.75	3.65	−0.51	.610
	六歲	20	9.40	4.41		

註：總題數 12 題，總分最高 12 分。

在代數推理任務中的可逆題型表現，五歲幼兒平均得分為 9.05（SD = 3.10），六歲幼兒平均得分為 9.60（SD = 2.70），五歲與六歲幼兒在代數推理任務中的可逆題型表現未達顯著差異，$t(38) = -0.60$，$p = .554$。

在運算捷徑任務中的可逆題型表現，五歲幼兒平均得分為 8.75（SD = 3.65），六歲幼兒平均得分為 9.40（SD = 4.41），五歲與六歲幼兒在運算捷徑任務中的可逆題型表現未達顯著差異，$t(38) = -0.51$，$p = .610$。

以 2（年齡：五歲 vs.六歲）× 2（任務：代數推理 vs.運算捷徑）混和設計變異數分析檢視五歲與六歲幼兒在可逆題型的得分表現，結果發現年齡之間未達顯著差異，$F(1, 38) = 0.36$，$p = .550$，任務之間未達顯著差異，$F(1, 38) = 0.27$，$p = .606$，在年齡與任務的交互作用亦未達顯著差異，$F(1, 38) = 0.01$，$p = .918$。整體而言，五歲與六歲幼兒在代數推理及運算捷徑任務中的可逆概念表現類似，五歲與六歲幼兒的加減法可逆能力差不多，可能源自混齡教學的環境提供不同年齡的幼兒在互動中影響學習，因而有相近的表現。

（二）五歲與六歲幼兒在先加後減及先減後加題型之得分表現

五歲與六歲幼兒在兩種題型之可逆題表現如表 5、表 6 所示。

表 5
五歲與六歲幼兒在代數推理任務之可逆題型表現得分

年齡	題型	人數	平均數	標準差	t 值	顯著性
五歲	先加後減	20	7.80	4.69	−2.60	.017
	先減後加	20	10.20	2.71		
六歲	先加後減	20	8.65	4.63	−2.45	.024
	先減後加	20	10.95	1.50		

註：總題數 12 題，總分最高 12 分。

表 6
五歲與六歲幼兒在運算捷徑任務之可逆題型表現得分

年齡	題型	人數	平均數	標準差	t 值	顯著性
五歲	先加後減	20	7.25	4.33	−0.30	.769
	先減後加	20	7.75	4.83		
六歲	先加後減	20	5.40	5.14	−1.86	.078
	先減後加	20	8.25	4.52		

註：總題數 12 題，總分最高 12 分。

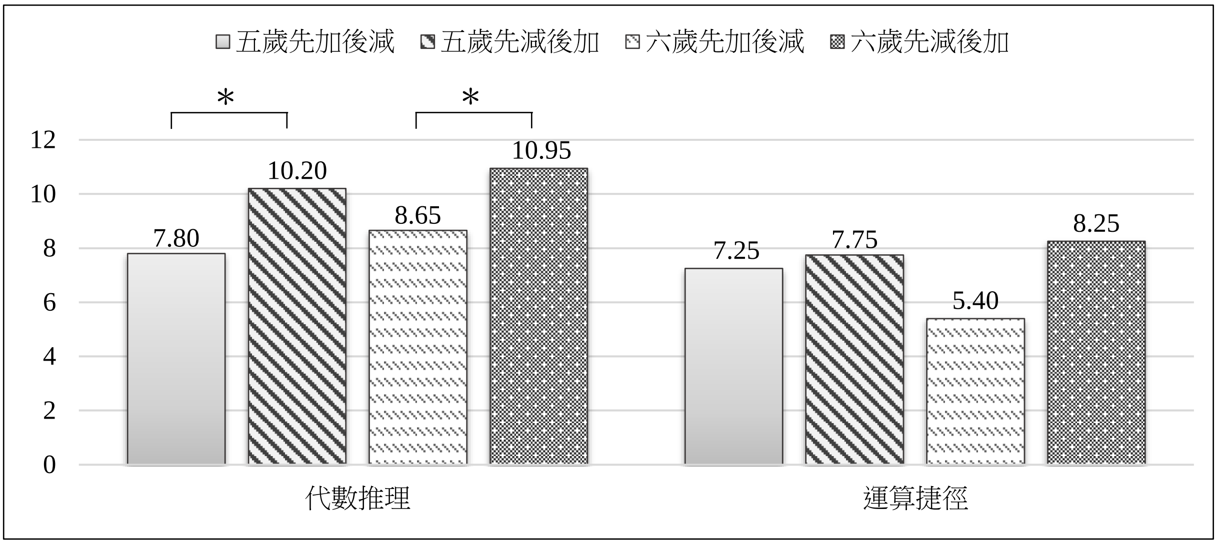
五歲幼兒在代數推理任務中的答題表現，先加後減的題目平均得分為 7.80（$SD = 4.69$），先減後加的題目平均得分為 10.20（$SD = 2.71$），五歲幼兒在代數推理任務中的兩種題型之答題表現有顯著差異，$t(19) = -2.60$，$p = .017$。在運算捷徑任務中的答題表現，先加後減的題目平均得分為 7.25（$SD = 4.33$），先減後加的題目平均得分為 7.75（$SD = 4.83$），五歲幼兒在運算捷徑任務中的兩種題型之答題表現並無顯著差異，$t(19) = -0.30$，$p = .769$。由此可知，五歲幼兒在代數推理任務之兩種題型的表現不同（第二次施測的先減後加題型表現較佳），卻在運算捷徑任務中表現相似。

六歲幼兒在代數推理任務中的答題表現，先加後減的題目平均得分為 8.65（$SD = 4.63$），先減後加的題目平均得分為 10.95（$SD = 1.50$），六歲幼兒在代數推理任務中的兩種題型之答題表現有顯著差異，$t(19) = -2.45$，$p = .024$。在運算捷徑任務中的答題表現，先加後減的題目平均得分為 5.40（$SD = 5.14$），先減後加的題目平均得分為 8.25（$SD = 4.52$），六歲幼兒在運算捷徑任務中的兩種題型之答題表現有邊際顯著差異，$t(19) = -1.86$，$p = .078$。由此可知，六歲幼兒在代數推理及運算捷徑任務兩種題型的表現皆有所不同，在第二次施測的先減後加題型表現較佳。

以 2（任務：代數推理 vs.運算捷徑）× 2（題目：先加後減 vs.先減後加）相依樣本變異數分析，幼兒在不同任務的答題表現有顯著差異，$F(1, 39) = 13.44$，$p = .001$，$\eta^2 = .26$，具體而言，幼兒在代數推理任務的表現顯著優於運算捷徑任務；幼兒在不同題型的表現有邊際顯著差異，$F(1, 39) = 3.73$，$p = .061$，$\eta^2 = .09$，具體而言，幼兒在先減後加題型（第二次施測）的表現比先加後減題型（第一次施測）還要好，推論幼兒的加減法可逆概念有學習效應，如圖 5 所示。

圖 5

五歲與六歲幼兒在代數推理與運算捷徑任務之可逆題型得分



此外，任務與題目的交互作用達顯著水準，$F(1, 39) = 8.15$，$p = .007$，$\eta^2 = .17$。在代數推理任務中，先加後減題目的表現（8.23 分）比先減後加題目的表現（10.58 分）還要差，$t(39) = -3.62$，$p = .001$；但在運算捷徑任務中，先加後減題目的表現（7.50 分）比先減後加題目的表現（6.83 分）還要好，$t(39) = 0.94$，$p = .353$。整體來說，幼兒在代數推理任務中，兩種題型的表現有顯著差異，在運算捷徑任務中，兩種題型的表現並無顯著差異；與代數推理任務相較，幼兒在運算捷徑任務的平均得分雖然較低，但是兩次施測的可逆概念表現較一致。

（三）五歲與六歲幼兒在可逆題中加減不同數量之題目表現

為了檢視受試幼兒的表現是否受到題目數量大小的影響，本研究探討五歲與六歲幼兒在可逆題中加減不同數量之題目表現。

五歲與六歲幼兒在可逆題中加減不同數量之題目表現如表 7 所示。

表 7

五歲與六歲幼兒在可逆題中加減不同數量題目之表現

年齡	任務	*SS*	*df*	*MS*	*F* 值	*p* 值
五歲	代數推理	0.90	2	0.45	0.66	.521
	運算捷徑	3.03	2	1.52	4.23	.022
六歲	代數推理	1.90	2	0.95	3.16	.054
	運算捷徑	0.40	2	0.20	0.92	.407

註：加減之不同數量為加減 2、加減 3、加減 4。

以重複測量變異數分析，五歲幼兒在代數推理任務之可逆題中加減不同數量的題目表現並無顯著差異，$F(2, 38) = 0.66$，$p = .521$；代表加減不同數量的題目在代數推理任務中並未影響五歲幼兒的表現。相反的，五歲幼兒在運算捷徑任務之可逆題中加減不同數量的題目表現，在加減 2 的平均得分為 3.00（$SD = 1.26$），加減 3 的平均得分為 2.70（$SD = 0.98$），加減 4 的平均得分為 3.25（$SD = 1.25$），具有顯著差異，$F(2, 38) = 4.23$，$p = .022$，$\eta^2 = .18$；具體來說，五歲幼兒在加減 4 的題目表現最好，加減 3 的題目表現最差。

六歲幼兒在代數推理任務之可逆題中加減不同數量的題目表現，在加減 2 的平均得分為 2.95（$SD = 1.19$），加減 3 的平均得分為 3.30（$SD = 0.92$），加減 4 的平均得分為 3.35（$SD = 0.88$），具有邊際顯著差異，$F(2, 38) = 3.16$，$p = .054$，$\eta^2 = .14$；具體來說，六歲幼兒在加減 4 的題目表現較好，加減 2 的題目表現較差。相反的，六歲幼兒在運算捷徑任務之可逆題中加減不同數量的題目表現並無顯著差異，$F(2, 38) = 0.92$，$p = .407$；代表加減不同數量的題目在運算捷徑任務中並未影響六歲幼兒的表現。

三、五歲與六歲幼兒在可逆題與標準題的答對率及答題速度

為了檢視受試幼兒如何使用加減法可逆原則解題，本研究探討幼兒在代數推理及運算捷徑任務中可逆題及標準題的答題表現；如果受試幼兒使用加減法可逆原則解題，可逆題的答題表現將優於標準題。基於上述分析結果可知，五歲與六歲幼兒的表現並類似，故將兩個年齡之數據合併在一起分析。

（一）幼兒在代數推理及運算捷徑任務中之可逆題與標準題的答題表現

幼兒在可逆題與標準題的答題表現如表 8 所示。

表 8

任務與題型之表現比較

任務	題型	題數	平均數	標準差	*t* 值	顯著性
代數推理	可逆題	12	9.33	2.89	−3.14	.003
	標準題	12	10.43	2.40		
運算捷徑	可逆題	12	9.08	3.96	6.47	.000
	標準題	12	6.48	3.69		

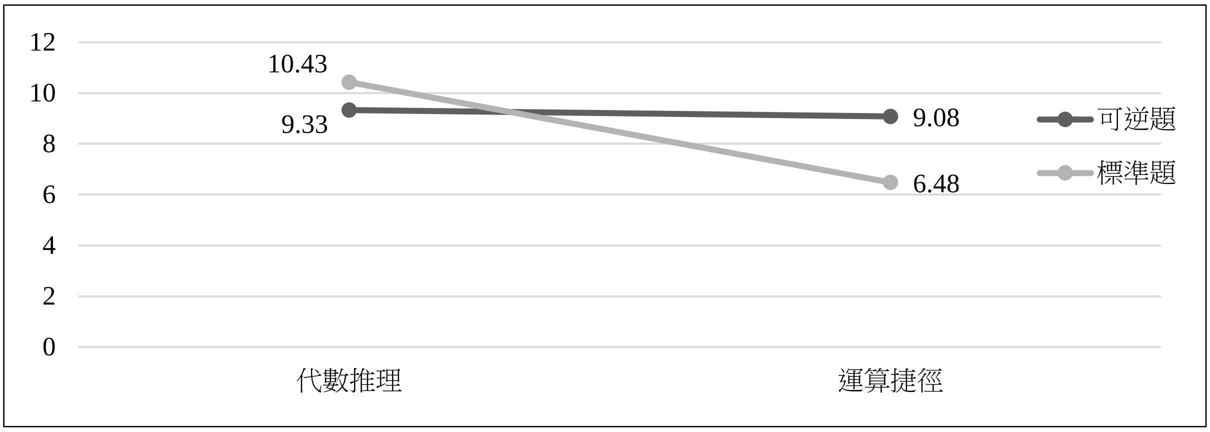
註：總題數 12 題，總分最高 12 分。

幼兒在代數推理任務中，可逆題的平均數為 9.33（$SD = 2.89$），標準題的平均數為 10.43（$SD = 2.40$），幼兒在代數推理任務中的可逆題與標準題表現有顯著差異，$t(39) = -3.14$，$p = .003$，於標準題的表現較佳；在運算捷徑任務中，可逆題的平均數為 9.08（$SD = 3.96$），標準題的平均數為 6.48（$SD = 3.69$），幼兒在運算捷徑任務中的可逆題與標準題表現有顯著差異，$t(39) = 6.47$，$p < .001$，於可逆題的表現較佳。

以 2（任務：代數推理 vs.運算捷徑）× 2（題型：可逆題 vs.標準題）混和設計變異數分析，幼兒在不同任務的答題表現有顯著差異，$F(1, 39) = 24.43$，$p < .001$，$\eta^2 = .61$，具體而言，幼兒在代數推理任務的表現顯著優於運算捷徑任務的表現；幼兒在不同題型上有顯著差異，$F(1, 39) = 6.19$，$p = .017$，$\eta^2 = .14$；整體而言，幼兒在可逆題型的表現較穩定，反之，在標準題型的表現卻因任務不同而產生落差。

此外，任務與題型的交互作用達顯著水準，$F(3, 36) = 77.68$，$p < .001$，$\eta^2 = .87$。在代數推理任務中，可逆題的表現（9.33 分）比標準題的表現（10.43 分）還要差，$t(39) = -3.14$，$p = .003$；但在運算捷徑任務中，可逆題的表現（9.08 分）比標準題的表現（6.48 分）還要好，$t(39) = 6.47$，$p < .001$。整體而言，幼兒在標準題的表現受到任務影響，但是對於可逆題而言，表現類似，如圖 6 所示。

圖 6
題型在任務中之表現



（二）五歲與六歲幼兒在運算捷徑任務之可逆題及標準題的答題速度差異

在運算捷徑任務施測時，除了提醒幼兒盡快回答之外，參考賴孟龍等人（2022）的答題反應時間之定義，若幼兒答題時間多於 3 秒鐘則表示其使用計算策略，故施測者將於紀錄紙上標註答題時間超過三秒的題目。在 40 位幼兒答題時間超過三秒的題數中，標準題較多的有 20 位，可逆題較多的有 1 位，可逆題與標準題一樣多的有 19 位。依據測驗統計結果顯示，五歲與六歲幼兒答題時間超過三秒的題數分別為可逆題 34 題、標準題 69 題，卡方適合度檢定結果呈現顯著差異，$\chi^2(1, N = 39) = 12.58$，$p < .001$，可知在答題速度中，五歲與六歲幼兒在標準題型所花費的時間多於可逆題，代表幼兒在面對標準題時使用運算的方式來解題，需要花費較長時間，而在可逆題中能夠運用可逆概念答題，因此不需要太多的反應時間。

伍、研究發現與建議

一、研究發現

（一）超過八成的五歲與六歲幼兒在加減法可逆概念達到基礎理解以上

從研究結果發現，五歲與六歲幼兒的加減法可逆概念已經達到基礎理解程度，具體而言，在兩種任務的表現中，幼兒對加減法可逆概念的理解程度在「穩定理解」所佔的比例最高，尚未習得最低；整體而言，五歲與六歲幼兒的加減法可逆概念已經達到基礎理解以上的程度。

在過去，依據 Piaget 認知發展理論的發展階段敘述，前運思期階段（2~7 歲）的幼兒開始發展推理能力，但尚不具保留概念及缺乏可逆性，需要到具體運思期（7~12 歲），兒童才獲得基礎的邏輯運算能力；而在實證研究中，Bryant 等人（1999）發現，五歲幼兒已經開始能夠使用加減法可逆原則來解題；Rasmussen 等人（2003）認為，四歲幼兒似乎能意識到加減法可逆的概念，但尚未穩定理解加減法可逆原則，而六歲幼兒已經能夠使用加減法可逆概念來解題。

本研究發現，五歲與六歲幼兒已經具備基礎的加減法可逆知識。與過去的研究結果（Baroody & Lai , 2007; Bryant et al., 1999; Gilmore & Bryant, 2006; Lai et al., 2008; Rasmussen et al., 2003）相較之下，五歲與六歲幼兒在本研究中皆有更好的表現。許多研究者指出，動態的情境式動畫能降低幼兒的學習壓力、增加參與動機、維持答題專注力、提升題目理解能力等（Birisci et al., 2010; Handayani et al., 2020; Nusir et al., 2012; Weng & Yang, 2017; Wiryanto et al., 2021），研究者推論本研究採用動態的情境式動畫，而非靜態的圖片、文字、或數字，因此幼兒能夠有較好的表現。

（二）幼兒在代數推理及運算捷徑任務之加減法可逆概念理解程度並無差異

從研究結果發現，幼兒在兩種任務的理解程度類似，具體而言，五歲與六歲幼兒在兩種任務表現相同的人數占最高比例（55%與 80%），且在「代數推理表現較佳」與「運算捷徑表現較佳」的人數相當，可以推論幼兒在兩種任務之加減法可逆概念的理解程度並無顯著差異。進而分析幼兒在兩種任務的表現，五歲與六歲幼兒在加減法可逆概念的平均得分均無顯著差異。

針對運算捷徑任務的答題速度來看，在可逆題型中，五歲與六歲幼兒回答所花費超過三秒時間的題數相同（17 題與 17 題）；在標準題型中，五歲與六歲幼兒回答所花費超過三秒時間的題數相當（34 題與 35 題），可知在可逆題及標準題的答題速度中，五歲與六歲幼兒並無顯著差異，而且在標準題型中所花費的時間較多。

由以上結果可以推論，無論是在代數推理或是運算捷徑任務，五歲與六歲幼兒在加減法可逆概念的表現上並無顯著差異。由於過去的研究顯示，運算捷徑任務會高估幼兒的能

力，而代數推理任務則是低估幼兒的能力，但依據本研究發現，受試幼兒在兩種任務的理解程度類似，與過去的研究結果有所差異，故檢視幼兒的表現是否會因本研究之題目設定的起始量（5 和 6）比過去之研究的題目起始量（3 和 4）還大而受到影響，分析幼兒在起始量為 5 與起始量為 6 的題目得分差異。經由成對樣本 t 檢定結果，發現幼兒在起始量為 5 的題目（平均數為 4.15 分）與起始量為 6 的題目（平均數為 4.00 分）的表現並無顯著差異（p = .352），因此可以排除題目中起始量所造成的表現與過去研究結果不同的因素。

研究者推論五歲與六歲幼兒在加減法可逆概念的表現類似可能有以下兩個因素，第一個可能的因素是五歲與六歲幼兒同處於具體運思期的階段，具有相似的認知發展能力（Piaget, 1964），雖然受試幼兒的年齡相差一歲，但是在認知發展的表現上並不會有明顯的差異；第二可能的因素是受試幼兒來自採取混齡教學的幼兒園，學習發展受到社會互動的影響，藉由與能力較高的同儕合作學習（五歲與六歲共學）來提升學習表現（Vygotsky, 1978）。近來有許多研究發現在教學中運用合作學習與異質分組（Heterogeneous group）能促使年長的學童自然而然引導年幼的學童，提升年幼學童的學業成績與認知表現，相對於同質分組來說有更顯著的進步（Murphy et al., 2017; Ong et al., 2000; Smit & Engeli, 2015; Zamani, 2016）。

（三）幼兒在加減法可逆概念的表現不會受題目類型產生影響

整體而言，五歲與六歲幼兒在兩種任務中的答題解釋皆表現出外顯精熟的能力，對於可逆概念的理解狀態亦能達到基礎理解以上的程度；在答題速度上，幼兒在回答可逆題的花費時間較短，代表幼兒已經能夠運用加減法可逆概念來解題。進一步針對兩種任務的答題表現進行分析，在代數推理任務中，幼兒在標準題的表現較佳，而在運算捷徑任務中，幼兒在可逆題的表現較佳。

針對幼兒在兩種任務中的表現差異，研究者進行分析與推論；根據研究結果發現，幼兒在代數推理任務的表現顯著優於運算捷徑任務（$p < .001$），代表對幼兒來說，代數推理任務比運算捷徑任務還要容易答對，表示比起需要計算的題目，幼兒更擅長處理關係推理的測驗模式。

有趣的是，加減不同數量的題目在代數推理任務中對五歲與六歲幼兒的表現沒有明顯的影響，卻在運算捷徑任務中對五歲幼兒的表現造成影響，細言之，在加減 4 的題目中得分最高，而在加減 3 的題目表現最差，推論五歲幼兒在運算捷徑任務中題型出現表現落差的原因除了運算能力不如六歲幼兒熟練之外，也可能與題目的呈現順序（加減 2→加減 4→加減 3→加減 3→加減 2→加減 4）有關，加減 3 在測驗中間階段，呼應認知發展軌跡中 U 型曲線的理論，表示注意力發展的過程分為三個階段，在前後的表現較好，而中間階段可能由於注意力變差導致表現不佳（Carlucci & Case, 2013）。

然而，在兩種任務中，幼兒的可逆題表現並無顯著差異（$p = .820$），卻在標準題的表現有顯著差異（$p < .001$），而且在運算捷徑任務的得分最低，表示幼兒在答題時能夠穩定運用可逆原則解題，但在使用運算過程解題時反而較容易有錯誤發生。

經由上述研究發現可以得知，幼兒在可逆題的測驗中，即使面對不同的任務仍然能有穩定的表現，表示幼兒在可逆概念的理解程度並未因題目類型不同而產生影響。

（四）幼兒加減法可逆測驗的答題表現會因測試經驗的累積而進步

本研究發現，幼兒在加減法可逆測驗的答題表現會因測試經驗的累積而進步。具體而言，在代數推理任務中，五歲幼兒在第二次測驗的平均數較第一次測驗提升了 2.40 分；六歲幼兒在第二次測驗的平均數較第一次測驗提升了 2.30 分。在運算捷徑任務中，五歲幼兒在第二次測驗的平均數較第一次測驗提升了 0.50 分；六歲幼兒在第二次測驗的平均數較第一次測驗提升了 2.85 分。整體而言，無論是在代數推理或是運算捷徑任務中，五歲與六歲幼兒在第二次測驗的表現皆優於第一次測驗。

一般來說，幼兒經由正數的方式學習加法（例如：1 顆糖果、2 顆糖果、3 顆糖果……桌子上總共有 3 顆糖果），相對的，減法便須利用倒數方式的逆向思維來進行，依據 Piaget 認知理論的發展階段而言，減法會比加法還要困難；然而，幼兒在比較困難的第二次先減後加測驗皆表現得比第一次先加後減測驗還要好，代表幼兒已經能夠從施測過程中獲取經驗，並且經由經驗的累積，不自覺的提升加減法能力，進而在答題時有更好的表現。

Lai 等人（2008）設計加減法測驗探討 60 位幼兒對加減法可逆原理的學習潛力，結果發現幼兒會在第二階段的測驗中表現出學習效果，即使未經訓練的對照組也能有進步的表現。除此之外，賴孟龍等人（2022）採用「微觀發展論設計」，透過情境式動畫探究 34 位五歲幼兒在密集接觸兩階段加減法題目後的表現差異；研究結果發現，幼兒在加減法可逆概念的表現與反應時間皆有顯著的提升，表示幼兒能夠從測試本身掌握解題的原則。

二、研究建議

（一）教師之加減法課程規劃不只依據幼兒年齡層，需多方考量加以設計

本研究發現五歲與六歲幼兒無論在加減法可逆概念的理解程度或是具體表現上皆無顯著差異，代表在此概念的理解及表現中，五歲幼兒沒有因為年齡較小而表現比較差；幼兒園教師一般在規劃課程難度時會以年齡作為設計參考，但依據本研究結果呈現，建議教師在加減法課程或是可逆概念的引導中，可以多參考幼兒本身的特性與學習潛力，不須因幼兒年齡長幼來限制難度，進而能夠提升幼兒學習的空間。

（二）未來研究者可探討不同環境條件對幼兒發展加減法可逆概念的影響

本研究之研究對象為中產階級家庭的幼兒，透過代數推理與運算捷徑任務探討他們在加減法可逆概念的表現。研究結果發現，無論在年齡或是任務之間，幼兒皆無表現差異，代表幼兒在中產階級的環境條件中，具有發展可逆概念的機會，並且在面對問題時能夠穩定的發揮。建議未來的研究者，可以針對不同環境條件的研究對象，比如勞動階級家庭或是在偏鄉生活的幼兒，探討其在加減法可逆概念的表現，便能進一步了解環境對幼兒發展可逆概念的影響。

（三）未來研究者透過不同測驗媒材探究幼兒在加減法可逆概念的理解程度

過去研究曾使用故事、積木、文字、數字、圖片等測驗媒材設計加減法可逆概念的測驗，而本研究透過幼兒熟悉的情境式動畫來呈現題目為幼兒施測，方呈現以上的研究結果。建議未來對加減法可逆概念有興趣的研究者可以使用不同的測驗媒材，比如起源於英格蘭的板球、盛產於非洲的刺角瓜等幼兒陌生的物品，或是正方形、三角形等未經裝飾的樸素樣態，利用不同表徵方式探討更多可能影響幼兒加減法可逆概念表現的因素。

（四）未來研究者探討運算捷徑任務與基本加減法運算能力的相關性

依據本研究的結果發現，幼兒在不同任務中的可逆題並無表現差異，而在標準題中不但有表現差異，且在運算捷徑任務的得分最低。由此可知，與可逆題相較之下，幼兒在需要使用運算過程解題的標準題中表現相對不穩定。建議對幼兒數學發展有興趣的研究者，未來可以探討運算捷徑任務與基本加減法運算能力是否具有相關性，探究二者對幼兒算術能力的影響。

誌謝

本文改寫自余孟儒在賴孟龍指導下完成的碩士論文，感謝國科會計畫（計畫編號 NSTC 111-2410-H-415-002）的經費補助，以及匿名審查者與編輯委員提供的修正建議。

參考文獻

張麗芬（2005）。兒童數能力的發展。**兒童與教育研究，1**，85–109。[Chang, L.-F. (2005). The development of children's numerical abilities. *The Journal of Study in Child and Education, 1*, 85–109. (in Chinese)]

黃志雄（2022）。電子繪本對發展遲緩與非發展遲緩幼兒之閱讀腦波注意力與繪本理解表現影響之研究。**幼兒教保研究期刊，25**，23–47。[Huang, C.-H. (2022). Study on the influence of e-storybooks on reading attention by the EEG and reading comprehension for young children with and without developmental delay. *Journal of Early Childhood Education & Care, 25*, 23–47. (in Chinese)]

賴孟龍、李甄甄、張晉瑋（2022）。以微觀發展論設計與情境式動畫探究 5 歲幼兒加減法可逆原則的認知發展。**數位學習科技期刊，14**（3），57–92。[Lai, M.-L., Lee, C.-C., & Chang, C.-W. (2022). A microgenetic study with animations on 5-year-old preschoolers' development of the addition-subtraction inverse principle. *International Journal on Digital Learning Technology, 14*(3), 57–92. (in Chinese)] https://doi.org/10.53106/2071260X2022071403003

Baroody, A. J., & Lai, M. L. (2007). Preschoolers' understanding of the addition-subtraction inverse principle: A Taiwanese sample. *Mathematical Thinking and Learning, 9*(2), 131–171. https://doi.org/10.1080/10986060709336813

Baroody, A. J., & Wilkins, J. L. M. (1999). The development of informal counting, number, and arithmetic skills and concepts. In J. V. Copley (Ed.), *Mathematics in the early years* (pp. 48–65). National Association for the Education of Young Children.

Baroody, A. J., Lai, M. L., Li, X., & Baroody, A. E. (2009). Preschoolers' understanding of subtraction-related principles. *Mathematical Thinking and Learning, 11*(1–2), 41–60. https://doi.org/10.1080/10986060802583956

Birisci, S., Metin, M., & Karakas, M. (2010). Pre-service elementary teachers' views on concept cartoons: A sample from Turkey. *Middle-East Journal of Scientific Research, 5*(2), 91–97.

Bryant, P., Christie, C., & Rendu, A. (1999). Children's understanding of the relation between addition and subtraction: Inversion, identify, and decomposition. *Journal of Experimental Child Psychology, 74*(3), 194–212. https://doi.org/10.1006/jecp.1999.2517

Canobi, K. H., Reeve, R. A., & Pattison, P. E. (2002). Young children's understanding of addition concepts. *Educational Psychology, 22*(5), 513–532. https://doi.org/10.1080/0144341022000023608

Carlucci, L., & Case, J. (2013). On the necessity of U-shaped learning. *Topics in Cognitive Science, 5*(1), 56–88. https://doi.org/10.1111/tops.12002

Ching, B. H.-H. (2023). Inhibitory control and visuospatial working memory contribute to 5-year-old children's use of quantitative inversion. *Learning and Instruction, 83*, 101714. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2022.101714

Ding, M., & Auxter, A. E. (2017). Children's strategies to solving additive inverse problems: A preliminary analysis. *Mathematics Education Research Journal, 29*, 73–92. https://doi.org/10.1007/s13394-017-0188-4

Eaves, J., Attridge, N., & Gilmore, C. (2019). Increasing the use of conceptually-derived strategies in arithmetic: Using inversion problems to promote the use of associativity shortcuts. *Learning and Instruction, 61*, 84–98. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2019.01.004

Gilmore, C. K., & Bryant, P. (2006). Individual differences in children's understanding of inversion and arithmetical skill. *British Journal of Educational Psychology, 76*(2), 309–331. https://doi.org/10.1348/000709905X39125

Handayani, S., Haryono, H., & Ahmadi, F. (2020). The effectiveness of animation film media to know ability mathematical concept of early childhood based on gender. *Journal of Primary Education, 9*(2), 161–167.

Klein, J. S., & Bisanz, J. (2000). Preschoolers doing arithmetic: The concepts are willing but the working memory is weak. *Canadian Journal of Experimental Psychology, 54*(2), 105–116. https://doi.org/10.1037/h0087333

Lai, M. L., Baroody, A. J., & Johnson, A. R. (2008). Fostering Taiwanese preschoolers' understanding of the addition–subtraction inverse principle. *Cognitive Development, 23*(1), 216–235. https://doi.org/10.1016/j.cogdev.2007.06.002

Lin, C. H. (2019). Exploring the effectiveness of using animation to learn Chinese verbs: A case of young preschool children. *Journal of Chinese Language Teaching, 16*(3), 1–27.

Litkowski, E. C., Duncan, R. J., Logan, J. A. R., & Purpura, D. J. (2020). When do preschoolers learn specific mathematics skills? Mapping the development of early numeracy knowledge. *Journal of Experimental Child Psychology, 195,* 104846. https://doi.org/10.1016/j.jecp.2020.104846

McCarthy, E., Tiu, M., & Li, L. (2018). Learning math with curious George and the odd squad: Transmedia in the classroom. *Technology, Knowledge and Learning, 23*(2), 223–246. https://doi.org/10.1007/s10758-018-9361-4

Murphy, P. K., Greene, J. A., Firetto, C. M., Li, M., Lobczowski, N. G., Duke, R. F., Wei, L., & Croninger, R. M. V. (2017). Exploring the influence of homogeneous versus heterogeneous grouping on students' text-based discussions and comprehension. *Contemporary Educational Psychology, 51*, 336–355. https://doi.org/10.1016/j.cedpsych.2017.09.003

Nusir, S., Alsmadi, I., Al-Kabi, M., & Sharadgah, F. (2012). Studying the impact of using multimedia interactive programs at children ability to learn basic math skills. *Acta Didactica Napocensia, 5*(2), 17–32.

Ong, W., Allison, J., & Haladyna, T. M. (2000). Student achievement of 3rd-graders in comparable single-age and multiage classrooms. *Journal of Research in Childhood Education, 14*(2), 205–215. https://doi.org/10.1080/02568540009594764

Piaget, J. (1964). Part I: Cognitive development in children: Piaget development and learning. *Journal of Research in Science Teaching*, *2*(3), 176–186. https://doi.org/10.1002/tea.3660020306

Potgieter, P., & Blignaut, P. (2018). A system to determine if learners know the divisibility rules and apply them correctly. In S. N. Spencer (Ed.), *Proceedings of the 2018 ACM Symposium on Eye Tracking Research & Applications* (Article No. 6, pp. 1–8). The Association for Computing Machinery. https://doi.org/10.1145/3204493.3204526

Rasmussen, C., Ho, E., & Bisanz, J. (2003). Use of the mathematical principle of inversion in young children. *Journal of Experimental Child Psychology, 85*(2), 89–102. https://doi.org/10.1016/S0022-0965(03)00031-6

Robinson, K. M., Ninowski, J. E., & Gray, M. L. (2006). Children's understanding of the arithmetic concepts of inversion and associativity. *Journal of Experimental Child Psychology*, *94*(4), 349–362. https://doi.org/10.1016/j.jecp.2006.03.004

Sherman, J., & Bisanz, J. (2007). Evidence for use of mathematical inversion by three-year-old children. *Journal of Cognition and Development, 8*(3), 333–344. https://doi.org/10.1080/15248370701446798

Siegler, R. S. (2006). Microgenetic analyses of learning. In W. Damon, & R. M. Lerner (Eds.), *Handbook of child psychology: Vol. 2. Cognition, perception, and language* (6th ed., pp. 464–510). John Wiley & Sons.

Siegler, R. S., & Stern, E. (1998). Conscious and unconscious strategy discoveries: A microgenetic analysis. *Journal of Experimental Psychology: General, 127*(4), 377–397. https://doi.org/10.1037/0096-3445.127.4.377

Smit, R., & Engeli, E. (2015). An empirical model of mixed-age teaching. *International Journal of Educational Research, 74*, 136–145. https://doi.org/10.1016/J.IJER.2015.05.004

Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in society: The development of higher psychological processes.* Harvard University Press. https://doi.org/10.2307/j.ctvjf9vz4

Wahyudi, W., Waluya, S. B., Suyitno, H., & Isnarto, I. (2020). The impact of 3CM model within blended learning to enhance students' creative thinking ability. *Journal of Technology and Science Education, 10*(1), 32–46. https://doi.org/10.3926/jotse.588

Weng, T. S., & Yang, D. C. (2017). Research on mathematical animation using pascal animation as an example. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 13*(6), 1687–1699. https://doi.org/10.12973/eurasia.2017.00692a

Wiryanto, W., Mariana, N., Budiyono, B., Rahmawati, I., Indrawati, D., Rachmadiyanti, P., & Mintohari, M. (2021). Analysis of the use of mathematic animation video as a line learning alternative to learning motivation. *Journal of Physics: Conference Series, 1987*, 012040. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1987/1/012040

Wong, T. T.-Y., Leung, C. O.-Y., & Kwan, K. T. (2021). Multifaceted assessment of children's inversion understanding. *Journal of Experimental Child Psychology, 207*, 105121. https://doi.org/10.1016/j.jecp.2021.105121

Yamana, Y., & Inoue, T. (2006). How can we use animations to help preschoolers to obtain more efficient distribution strategies? *Japanese Psychological Research, 48*(1), 54–63. https://doi.org/10.1111/j.1468-5884.2006.00306.x

Yang, D. C., & Li, M. N. (2013). Assessment of animated self-directed learning activities modules for children's number sense development. *Educational Technology & Society, 16*(3), 44–58. https://www.jstor.org/stable/jeductechsoci.16.3.44

Zamani, M. (2016). Cooperative learning: Homogeneous and heterogeneous grouping of Iranian EFL learners in a writing context. *Cogent Education, 3*(1), 1149959. https://doi.org/10.1080/2331186X.2016.1149959

Zur, O., & Gelman, R. (2004). Young children can add and subtract by predicting and checking. *Early Childhood Research Quarterly, 19*(1), 121–137. https://doi.org/10.1016/j.ecresq.2004.01.003

黃幸美（2024）。
學生的角概念及教師對角的教學相關知識之探討。
臺灣數學教育期刊，**11**（2），29–57。
doi: 10.6278/tjme.202410_11(2).002

學生的角概念及教師對角的教學相關知識之探討

黃幸美
臺北市立大學學習與媒材設計學系

本研究在於探討國小四年級學生（$N = 171$）從生活中的傾斜、路徑交會、旋轉情境辨識角，以及角量測的解題表現，同時了解有經驗教師（$N = 7$）對角的教與學知識。研究結果發現：（一）學生的解題表現因角情境不同而呈差異，其在角量測與路徑交會情境的表現接近，而且皆優於其他情境；學生在傾斜與旋轉情境的表現相當但也最低落。（二）學生辨識角的理由說明包含五種類型：能明確以角定義說明（16%）、定義不全（18%）、其它（語義含糊，20%）、使用角形（19%），以及不知道如何說明（27%）。五類組能成功辨識角的百分比，以定義組最高（13%）；不知道組最低（6%）。（三）從分析教師對角的教學內容知識之結果發現：教師了解學生辨識角的表現受角形是否可見及情境類型影響；教師對學生理解圖形角的難度評估，符合學生的實際解題表現，但對旋轉角的概念理解則呈高估現象；教師的角教學活動重視觀察、操作與討論。本研究依據分析結果，針對角概念理解的教與學及課程與教學，提出討論與建議。

關鍵字：角情境、角概念、辨識角、角的教與學知識

通訊作者：黃幸美，e-mail：hhuang22@utaipei.edu.tw
收稿：2024 年 7 月 9 日；
接受刊登：2024 年 10 月 11 日。

Huang, H.-M. E. (2024).
Study of students' conceptions of angles and teachers' knowledge about teaching and learning angles.
Taiwan Journal of Mathematics Education, *11*(2), 29–57.
doi: 10.6278/tjme.202410_11(2).002

Study of Students' Conceptions of Angles and Teachers' Knowledge about Teaching and Learning Angles

Hsin-Mei E. Huang
Department of Learning and Materials Design, University of Taipei

This study aimed to explore fourth-grade students' (N = 171) performance of identifying angles embedded in daily life situations, including slopes, path intersections, turns, and angle measurement. Experienced teachers' (N = 7) knowledge of teaching and learning angles was also examined. The findings showed a significant effect of angle situation on students' problem-solving performance. The students performed equally well on solving problems of angle measurement and path intersection situations. They also performed equally well on slopes and turns, but their performance on these two situations was poorer than that on the former two situations. The mathematical thinking that the students used for recognizing angles included five categories: using the mathematical definition of angles with accuracy and completeness (16%), using definitions with incompleteness (18%), vague explanations (20%), angle shape (19%), and don't know (27%). For the overall percentage of accurate recognition of angles, the results showed that the accuracy and completeness group was the highest (13%), whereas the don't know group was the lowest (6%). Furthermore, the teachers perceived that angle situations and whether the shape of angles was visible impacted students' performance. The teachers' evaluations of student understanding of angles with two arms accurately reflected the students' actual performance. However, they over-estimated students' understanding of angle rotations. For teaching the concepts of angles, the teachers highlighted the importance of exploring angles embedded in daily objects and operations with discussion. Teaching and learning about conceptual understanding of angles are discussed based on the findings. Suggestions for curriculum and instruction are also made.

Keyword: angle situation, conceptions of angles, identifying angles, knowledge of teaching and learning angles

Corresponding author：Hsin-Mei E. Huang，e-mail：hhuang22@utaipei.edu.tw
Received：9 July 2024;
Accepted：11 October 2024.

壹、緒論

角概念與角量測量具有空間與圖形及測量的性質，為國小三～四年級的數學課程內容。自施行九年一貫課程綱要〔九貫課綱〕（教育部，2010）及十二年國民教育課程綱要〔十二年國教課綱〕（教育部，2018）以來，此主題的教與學強調利用學生的生活經驗、直觀，發展抽象思考，並能應用知識於日常生活。同時，使用具體情境為範例、應用來提示與引導學生學習（教育部，2018），對小學階段的教學尤具意義。上述課綱對於角概念的細目詮釋或學習內容條目說明，皆強調以觀察實物與具體操作活動認識角（直角、圖形角與旋轉角）與角度的定義及使用量角器操作角量測量（教育部，2010，2018），但缺乏對角概念賦予生活情境意義為結語。日常生活情境提供角特徵的脈絡實例，對學生認識角概念及察覺其在生活的可應用性具有重要性，而且培養學生「結合理論與應用的數學素養」（教育部，2018，頁 2），了解學生應用知識於解決生活中的角問題之表現、知曉教師對角的教學內容知識，誠為數學教育研究與實務的重要議題。

Mitchelmore 與 White（2000）認為角概念可從生活中的靜態與動態情境萃取出抽象化的幾何特性，例如：從角落、路徑（交會）等靜態情境，發現具有兩條邊交會於一點的圖形角特徵；從旋轉門把的動態過程，發現單一邊繞一固定端點旋轉，自起始至終末形成單邊角。同時，生活情境多有傾斜現象（例如：傾斜的屋簷、無障礙坡道等），傾斜情境包含直線（或平面）與水平線（或水平面）在三維空間中交會形成的夾角，此類夾角可使用二維圖示表徵角形。此外，使用圖示表徵角情境時，因角的兩邊是否具體呈現於圖像表徵，可區分為雙邊的角與僅呈現一個邊的單邊角。當以圖像表徵生活中的傾斜現象時，若圖像無具體呈現水平線（面），此圖因角的一邊隱而未現而呈現單邊角特徵。為利於區別說明，本文將表徵角的兩邊張開程度的圖形稱為雙邊角；而呈現單一邊的角圖形稱為單邊角。

在探討國小學生角概念理解方面，有些研究使用可觀察與操作的具體情境（例如：角落、交會、彎曲、傾斜、旋轉等），探討學生使用數學（標準角）概念模擬角情境的能力（柯慶輝、梁淑坤，2001；Mitchelmore & White, 1998, 2000）。柯慶輝與梁淑坤（2001）仿 Mitchelmore 與 White（1998）的研究，發現三年級生（$N = 12$）在角落、彎曲物（例如：彎曲的肢體）及交會情境皆有 65%以上的學生能使用標準角模擬情境，但在斜坡與無限旋轉情境則分別約為 46%與 28%的學生能達成。鍾方怡（2019）參考 Mitchelmore 與 White（2000）的具體角情境，調查 107 位四年級生分類的表現並從中抽取 9 名學生訪談分類角情境的基準，訪談結果發現有 3 名學生能在傾斜情境（歪掉的路牌）正確指出角之所在，但無受訪者在無限旋轉情境（輪子）正確指出角。上述研究對了解學生的角概念發展具有貢獻，然而對於具備學習角概念與角度量測經驗的學生，如何從文字與圖示表徵的角情境問題辨識角之所在，並說明辨識理由，則尚待進一步探討。

同時，柯慶輝與梁淑坤（2001）及鍾方怡（2019）發現：三或四年級生從傾斜與無限旋轉情境分類角，皆存有挑戰。此可能由於前述情境物件表徵角的邊未能顯見時，學生需

運用心像建構角的邊，當所需自行建構的角邊數愈多的情境物件，分類難度也因而提升（Mitchelmore & White, 1998）。然而，學生從動態與靜態的單邊角情境辨識角的表現與差異如何，先前的文獻猶有不足。

在角度量測方面，操作量角器與角大小比較皆為數學課程綱要的學習內容（教育部，2010，2018），而且角度估測亦納入新課綱內容。中～高年級學生使用量角器測量角度及解決角度運算的表現，堪稱理想（黃幸美，2021），然而，使用直角為心理參照以估測角度的估測能力則有待檢視。

教學品質良窳繫之於教師知識之建構（Hill, Ball, et al., 2008; Hill, Blunk, et al., 2008）。Hill 等人（2005）及 Hill、Ball 等人（2008）指出教師的數學教學知識（mathematical knowledge for teaching）與教學成效密切相關。Ball 等人（2008）提出數學教學知識包含學科與教學內容知識，而且教師的教學內容知識實由所認知的數學課程與教學知識及學生知識（knowledge of students）交織而成。不過，教師可能有充分的數學學科與課程內容知識，但是對學生知識的認知未必充足（Hill, Ball, et al., 2008）。類似地，在角概念教學方面，Sbaragli 與 Santi（2011）發現教師教學多依據個人的教學目的與教科書內容，缺乏考量學生如何理解角概念。教師了解學生的數學知識、具備教材內容與教學知識，乃為教師知識的重要內涵（Dreher et al., 2021）。然而，探討教師對學生角知識的認知與教學觀等教學相關知識，文獻相當寡少。

有視於角概念的教與學為數學教育的重要議題，本研究探討學生從不同角情境辨識角的表現及對角概念的認知，並分析教師對學生角知識的認知與教學相關知識（後文簡稱教師知識），一方面了解教與學兩主體的知識認知內涵，並期以從所收集的資料，勾勒教師對學生角知識所持的認知，裨益提供角教材研發及教師的教學專業知能發展之參研。

貳、文獻探討

一、國小數學課程的角概念

國內學者（周筱亭、黃敏晃，2003；劉好，1997）從數學觀點及生活應用來描述角，指出圖形角為表徵二維角形，具有兩線段交會的頂點及鄰近區域；旋轉角則指具體呈現起始與終止位置及旋轉方向；若僅記出起始與終邊，不強調旋轉方向，此種角圖像與圖形角相似，但使用張開角描述角兩邊所張開的程度，具有溝通旋轉程度的意義。數學領域課程手冊（國家教育研究院，2020）描述角具有頂點與兩邊，而角度的概念是關心「張開的幅度」（頁 204），非角中區域的面積亦非角邊長。旋轉角則是角度學習的應用，描述由始邊依著旋轉方向轉到終邊，構成一個角（教育部，2010）。可見學者對角概念的內涵與意義界定與數學課程相互呼應。

角量測量乃從等切分圓一半徑將圓均分成 360 分而來（Freudenthal, 1983），旋轉一等分定義為 1 度（1°）。角量具有保留性、可合成與分解、比較及測量的性質（周筱亭、黃敏晃，2003），各性質分別簡述如下。（一）保留性：角的大小不因開口方向、邊長短與粗細，以及切割與重組歷程而改變。（二）比較：比較角大小可使用視覺（直觀）、疊合（直接），或複製第三角（間接）比較。（三）測量：測量角度的過程可藉由使用一個基準單位的角，以合成（或分解）與運算，將角量數值化。（四）合成與分解：合成指將兩或數個角組成一個新合成的角；將原來的角切分成兩（或數）個角即為分解。此外，直角常被當作測量角度的一種單位，運用合成與分解等角度運算（Freudenthal, 1983），認識 90°與 180°的角，進而應用於估測角度。

上述的角概念教材與教學，強調從觀察角、操作與製作活動，認識圖形角與旋轉角定義，進而測量角度與運算。三年級教材包含：圖形角定義、比較角的大小，以及角邊長與角大小的關係等概念；四年級課程則以認識旋轉角概念、量角器與角度測量為主（教育部，2010，2018）。此外，量的測量知能與估測能力密切相關，透過操作量角器測量角度、估測與運算角度，以及測量 30°、45°、90°、180°等特別角度的經驗，發展量感與應用於估測角度（教育部，2018）。估測能力指能針對待測量的屬性，在無使用工具實測的情況下，使用同屬性的基準量或心理單位估計待測的量（黃幸美，2016）。低～中年級學生能從觀察生活中的垂直與水平現象，認識直角、平角與周角（教育部，2010，2018），Mitchelmore 與 White（1998）也發現約 78%（28/36）的四年級生能正確展示直角，能結合測量經驗與應用特殊角為參照基準為估測角度的重要知能。學生能應用實測 45°、90°等特殊角度的經驗，建立量感（國家教育研究院，2020）為教學活動內容，冀期學生不使用測量工具時，能將角張開的程度估得合理。

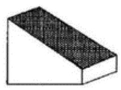
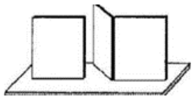
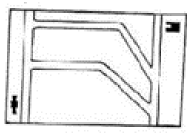
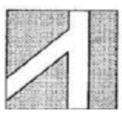
二、學生的角概念認知特質

van Hiele（1986）提出幾何思考發展理論描述不同層次的幾何認知特質，Mitchelmore 與 White（1998, 2000）以實證研究分析不同學齡學生分類角情境的概念發展。上述學者的觀點普受國小數學課程發展研究與編製者參研，也為本研究探討角概念的理論基礎。

van Hiele（1986）將幾何認知區分為五個思考層次，隨著幾何知識學習與經驗增加，思考層次依序發展，以下簡述學前~國小階段學生的幾何思考特質。第 0 層（視覺期）：能藉由視覺觀察並以實物輪廓辨識圖形，但忽視構成要素的特質。第 1 層（分析期）：能認識、使用圖形的構成要素描述圖形，但尚未能分析圖形之間的關係。第 2 層（非正式演繹期）：能了解圖形之間的抽象關係（例如：四邊形與三角形類屬與特性），作簡單的演繹推論。繼而，Wilson 與 Adams（1992）以 van Hiele 的理論為基礎，描述處於視覺期～非正式演繹期的認知情形：（一）視覺期：能指出圖形的角與角落但不瞭解其性質；（二）分析期：能瞭解角的性質、屬性及測量意義，例如：認識直角且能比較角的大小；（三）非正式演繹期：能利用角的性質及圖形內角與角度的關係，處理非正式演繹問題，例如：應用「三角形的三個內角和為 180°」的性質，推論三角形是否可形成。

Mitchelmore（1997, 1998）及 Mitchelmore 與 White（1998, 2000）取材日常物品與情境，設計組合作業，以晤談探討學生分類情境、脈絡的角及抽象的角概念發展，描述角概念認知的三個階段。茲將上述學者所提出的角概念發展階段及其研究使用的角情境圖例，整理為表 1，並簡述各發展階段的角概念認知。（一）情境的角概念（situated angle concepts）。國小初期的學生從生活經驗獲得非正式的角知識，依所觀察不同情境之間的表面相似性而建立連結，因此，角知識囿於特定情境。（二）脈絡的角概念（contextual angle concepts）。國小中期學生（約 9−10 歲）從觀察情境與操作經驗萃取出角的特徵相似性，再類化到其他情境，發展幾何的角概念（包含：構成要素、表徵、旋轉及其與空間的關係、詞彙）。學生從認識角的物理特徵進而理解抽象的角概念時，需藉助空間推理運思，統整視覺與動作經驗所建構的空間知覺、察覺不同情境的角特徵與相似性，認識靜態與動態角的定義。此階段學生能使用相同的幾何圖形來表徵不同情境之間的角特徵相似性，也能區分傾斜、旋轉、路徑交會及角落等脈絡角概念，但在偵測某些情境之間的相似性及跨脈絡推論，困難猶存。（三）抽象角概念（abstract angle concepts）。學生能付諸身體或心理行動的再認處理，跨脈絡地偵測相似性，檢視不同角情境的特徵相似性，再進階分類。若一個概念的產生是來自比較、萃取自先前經驗中的相似性特徵，則抽象概念由此形成。

表 1
Mitchelmore 與 White 研究的角概念發展與角情境圖例隅

發展階段	概念認知	分類角情境的表現	Mitchelmore 與 White 的角情境圖例隅
情境的角	依所觀察情境的表面相似性認識角	例舉式的、特定的情境（例如：三角形有尖尖的一個角）。	三角形
脈絡的角	1.認知角的物理特徵，指出不同角脈絡之間的表面相似性，且能類化到其他情境。 2.能區分傾斜、旋轉、路徑交會及角落等脈絡角概念，但對於某些跨脈絡地推論，尚有困難。	1.能指出傾斜的屋簷和像山丘樣的斜坡都有角。 2.能知道有轉彎或彎曲的地方有角；但未能指認一個彎曲的物件和打開門形成的角具有相似性。	1.坡  2.開門 
抽象的角	1.能透過反思不同角情境之間的相似性，萃取出角的構成要素。 2.能跨脈絡地偵測相似性，檢視不同角情境的特徵相似性，再進階分類。	多數四年級生能指認交會與彎曲具有兩線交會於一點的相似性；約半數學生能指認斜坡與角落之間或旋轉、交會與彎曲之間具有相似性。	1.彎曲  2.交會 

註：1. 坡、開門及交會圖引自“Development of angle concepts by progressive abstraction and generalisation,” by M. C. Mitchelmore, & P. White, 2000, *Educational Studies in Mathematics, 41*, p. 221。
2. 彎曲圖引自“Young students’ concepts of turning and angle,” by M. C. Mitchelmore, 1998, *Cognition and instruction, 16*(3), p. 271。

Casas-García 與 Luengo-González（2013）調查小學至大學共 458 位學生對角定義及角情境的概念建構，發現：學生認識角概念起始於對物理特徵的注意，當情境例隅具有角形特徵時，則容易認識，而且學生需藉歸納特徵相似性以建構概念之間的關聯性，進而逐漸擴展至較抽象的概念（例如：打開、旋轉等）；然而學生傾向注意教學情境的例子而非抽象概念。此研究結果支持 van Hiele（1986）及 Mitchelmore 與 White（2000）的觀點。

三、影響學生角概念學習與表現之因素

靜態的圖形角與動態的旋轉角各有其定義（Mitchelmore & White, 2000），學生對不同角定義的學習難度也呈現差異。本研究從角概念性質（Mitchelmore & White, 1998, 2000）、角問題的表徵形式（Devichi & Munier, 2013），以及學習經驗（White & Mitchelmore, 2010; Wilson & Adams, 1992），分別論述之。

（一）角概念

學生能藉觀察角形特徵認識角與構成要素，但是要求描述角的定義，或從角圖像解讀其所表徵的旋轉意義時，則具有難度（Mitchelmore, 1998）。Mitchelmore（1997, 1998）及 Mitchelmore 與 White（1998）發現學生可直覺地了解「繞著一個定點而旋轉」的意義，但未必能自發地察覺相交於一點的兩個邊所表徵的旋轉關係。而且，學生將不同旋轉情境的旋轉角抽象化處理的程度不盡相同，多數二~四年級生及部分六年級生未能主動地連結不同物件旋轉的情境（例如：將轉彎與開門的門把旋轉連結）。鍾方怡（2019）調查 107 位四年級生分類具體角情境的表現，僅有 25%的學生能完全使用數學觀點分類，有 59%的學生無數學觀點，16%的學生則從物件材質與使用方式作分類及未完成分類。由此可見，中年級生對角性質的熟悉程度不足，不容易察覺生活情境與數學之間的關連。

在角情境的分類與辨識角方面，柯慶輝與梁淑坤（2001）發現：雖然多數三年級生能掌握角形的特徵，但傾向依據情境的表面特徵（例如：兩條邊及其交會點）分類角，使用生活語詞描述角形（例如：尖、彎的地方）；學生使用角的定義說明無限旋轉與傾斜情境，則存有困難。Prescott 等人（2002）也發現學生能將角情境依特徵分類為五種，依其辨識角的難易程度排序為：角落、張開、旋轉、傾斜與方向，其中角落與傾斜屬於靜態性質；張開與旋轉屬於動態性質，方向則兼具前兩種性質。由此可見，學生從動態及角形特徵隱晦的情境辨識角，具有挑戰。

在應用旋轉角概念解決問題方面，學生需理解圖形角與旋轉角的定義、結合角概念與視覺空間推理，運用心像處理旋轉移動（Owens & Highfield, 2015），此種較高階的運思需求，可能產生解題困難。文獻也顯示：高年級生在此類問題之解題通過率未達 60%，而且此種低落現象持續多年（黃幸美，2021）。

（二）角情境問題的表徵形式

解讀幾何圖形時，學習者需了解圖本身所蘊含的幾何特性、相關的定義與原理，將概念意義與心像統合，方能助益解題；否則，可能受圖形的表面特徵誤導（Stavy & Tiroch, 1996），而解題失敗。圖形表徵影響判斷角大小的現象，尤多見之於小學生。例如：黃金泉（2003）發現約有 87−96%的四年級生（N = 253）能從教室或圖形成功地指認角，但卻容易受邊長短、粗細及標示角的弧線長短影響而誤判角的大小，整體而言，錯誤率約為 50%及以上。類似地，賴文正（2005）使用類似黃金泉的評量工具調查五年級生（N = 458）的表現，發現：學生的答錯率約為 10−50%以下。據此推論──學生隨著年級遞增及學習幾何與測量經驗加增，更能了解──角的大小不受角邊的長短、粗細影響。

有關直角的概念，學生能辨識 90°的直角（Cope et al., 1992）且找出生活物件中的直角（鍾靜，2010），但當直角被歪斜擺置時，則辨識成功率降低（Devichi & Munier, 2013）。學生對經旋轉某些角度之後的直角圖產生判讀困難，可能由於此種辨識需統合處理心理意象與旋轉概念，複雜的運思容易導致失誤。

（三）角概念的學習經驗

Wilson 與 Adams（1992）及 White 與 Mitchelmore（2010）認為學生的角概念薄弱，可能導因於教材與教學所提供的學習機會不足。檢視國內的角教材，其內容安排順序乃參考前文所述的角概念發展理論。然而，教科書的角情境與圖示表徵多為角形特徵可見（例如：西式屋頂、扇子、指針鐘面等），鮮少單邊角情境。當角情境表徵的角構成要素不足時，學生辨識角需使用心像自行建構角的另一邊，例如：在晷針與地面交會的單邊角情境，學生從地面的水平日晷指認角時，需想像晷針與地平面交會形成角，辨識單邊角的難度較雙邊角高（Huang et al., 2018），尤其當缺乏此類情境的探索經驗時，辨識成功率也可能降低。

在角的測量方面，中～高年級學生在使用量角器測量與報讀角度之通過率可達 75%或 80%以上，而且善於運算角度（黃幸美，2021）。在角度估測方面，Cope 等人（1992）發現多數 10−11 歲學生（10/12，N = 12）能辨識直角，然而僅有 1 位學生成功辨識 60°與 120°。由此可見，學生使用 90°的直角為參照單位，做心理性的分割、合成以估測角度的表現不理想。

四、教師知識

Hill、Ball 等人（2008）剖析教師知識內涵及其在教學歷程的角色，指出教師對學科與教材內容知識的認知、知道學生如何學（學生知識，包含：了解不同問題性質對學生解題的難易程度、迷失概念）以及如何教（使用語言、表徵與策略），三者在教學歷程相互影響。Leatham 等人（2015）指出教師了解學生數學知識理解的情形，此認知助益教師於教學時選用例隅、表徵與語言，而且能利用學生想法做討論，裨益學生理解概念。教師對學生知識的認知，影響其教學歷程中對學生想法的注意與回應，也關乎教學品質（Dreher et al., 2021）。

在探討教師對學生角知識的認知方面，Prescott 等人（2002）調查 12 位參與三年級實驗教學的教師，評論學生學習各類角情境（例如：剪刀、鐘指針旋轉、開門形成的角；傾斜角等）與概念的難易程度，教師們指出學生學習雙邊角的表現優於單邊角。此研究提供教師知識的訊息，惟其資料來源僅限於實驗教師且缺乏教學觀點的資料。

Sbaragli 與 Santi（2011）探討教師與學生在角概念的教與學情形，首先，經分析 20 位教師的教學觀點，結果發現：教師們重視決定教哪些概念及選用教學語詞與表徵，卻常忽略學生在教學歷程中所提的不同想法。多數教師利用周遭物件，讓學生觀察、觸摸及肢體動作來認識角；只有兩位教師以學生表達的想法為教學起始，但當學生可以說出角的意義時，教師傾向隨即將教學轉至介紹定義，無再深入討論。而且，在忽視學生的想法與討論溝通下，學生受教材圖示影響而引發的迷失概念，也自此產生，例如：當角的弧線位置改變或角邊變長而具內角弧線變大時，學生可能因而誤判角的大小。後續，Sbaragli 與 Santi 調查受訪教師所任教的班級共 160 名五年級生的角概念，結果發現：學生對角定義的認識雖非完全與教師的教學直接相關，但從分析學生的迷失概念可得知──教師的想法與迷思摻合學生的想法與誤解，共同導致學生的錯誤認知。此研究也顯示教師知識在執行教學及學生理解概念上所扮演的角色與重要性。

綜合上述，本研究問題包含三方面：（一）學生解決不同角情境問題的表現是否有差異？本研究比較學生在傾斜、路徑、旋轉、角量測情境等問題的解題表現。針對此問題的研究假設為：學生解決不同角情境問題的表現有顯著差異。（二）學生在傾斜與旋轉情境問題辨識角的正確性與理由說明情形如何？（三）教師對學生角知識的認知及教學觀為何？

參、研究方法

本研究包含兩部分，發展角概念評量工具並調查四年級學生的角知識，以及訪談教師對學生角知識的認知與教學觀點。

一、角概念評量、試題分析及正式施測

傾斜、路徑及旋轉情境為生活常見的角情境，上述三種情境潛存圖形角與旋轉角的概念，此外，角量測為數學課程內容（教育部，2010，2018），因此，角量測與前述三類情境同為本研究關注的角情境類型。本研究參考先前研究（柯慶輝、梁淑坤，2001；鍾方怡，2019；Mitchelmore & White, 1998, 2000）的角情境分類，以及賴文正（2005）、數學與科學成就評量（林陳湧等人，2017），結合生活中的角情境題材，設計 51 大題的角概念評量題本。經初試評量試題之後，編製為預試工具並分析其信度、試題難度與鑑別度。繼而，調整試題以形成正式評量並施測。

預試包含四類角情境問題，各情境皆提供文字敘述與圖示。1.傾斜：呈現斜坡或傾斜於水平地面的情境，此類問題隱含單邊角性質。2.路徑：呈現兩線交會的路徑情境，問題隱含

圖形角（雙邊角）性質。3.旋轉：包含張開及旋轉角概念的應用，以有限旋轉為主。4.角量測：包含辨識直角、比較角大小、角度實測與估測，以及繪製角。

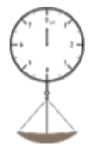
角問題包含兩大類型：1.單一題項。例如：辨識並圈出角的位置（填充圈選題）。2.題組型。由兩個或以上的題項組合，例如：辨識角結合判斷數學想法之正確性（數學判斷題），或以文字說明理由（說明題）。數學判斷與說明題項，目的在於評量學生的數學概念理解（Huang, 2017）。以下茲舉一題組問題為例並呈如圖一所示。從圖 1 可見：此題組結合填充與說明題。

圖 1

單指針秤題組例隅

12-1. 右圖是一個吊秤。當指針向順時針方向旋轉半圈以後，指針所指的刻度是多少？ (　　　　)

12-2. 指針向順時針方向旋轉半圈的過程，有沒有產生角？ (　　　　)
為什麼？



本研究的初試評量題本經 2 位有經驗的國小教師審核其評量的適合度，並以臺北市公立國小的 2 班三～四年級學生進行初試與一對一晤談，初步分析學生解題表現及理由說明類型。在效度建構方面，Kubiszyn 與 Borich（2024）指出建構效度關切評量試題能否測量得欲測的知能，試題內容的專家效度分析，顯示一種質化的試題分析，可與量化的試題分析共同呈現試題品質。因此，本研究邀請 5 位數學教育學者進行專家效度評量。結果顯示：傾斜情境問題（例如：斜坡、摺疊梯）非屬教材內容，約為 40−60%專家對此類試題的適合度持不同意；其他情境問題則有 60−100%的專家評核為同意與非常同意。研究者參考專家建議修改試題，但在傾斜情境問題方面，本研究除參考先前研究（柯慶輝、梁淑坤，2001；鍾方怡，2019），欲進一步收集學生從熟悉的生活情境之傾斜情境，如何察覺角的存在及說明辨識理由，藉此了解學生應用角概念以察覺不同角情境所潛存的角及數學想法，因此仍予保留。

在預試方面，預試試題包含 14 大題，並自新北市一所國小選取 4 班四年級生共 102 位（男生 55 人；女生 47 人）進行預試。預試資料經使用古典測驗理論的試題分析，檢驗各試題難度與鑑別度分析，經刪除不理想的試題與調整試題後，形成正式評量。

正式評量包含傾斜、路徑、旋轉及角量測情境問題，題數分別為三、二、四與七大題（參附錄 1）。試題題項包含：填充圈選、填充（無圈選）、選擇、繪圖、數學判斷題與說明題。各題項的評分原則呈如表 2 所示，並簡述如下。1.填充圈選：依填答與標記角位置的正確性，得 1 或 0 分。2.填充（無圈選）：依正確性得 0 或 1 分。3.選擇：依正確性得 1 或 0 分。4.繪圖：依所繪的角形及角度是否符合要求，得 0 或 2 分。5.有關題組型的評分原則，說明如下。(1)填充題組類：此類各填充題項之評分（例如：辨識直角），如填充（無圈選）。

經各別評核題項得分後，計算該題組總分。(2)數學判斷題與說明題組，前者依其判斷正確性，得 0 或 1 分；後者則依理由的正確性與完整性得 0−2 分。(3)填充（無圈選）與說明題組：填充題依說明題是否得分，得 0 或 1 分。當填答正確且說明題得部分分數（0.5 分）及以上，得 1 分；若填答正確但說明題無得分，得 0 分。(4)填充圈選與說明題組：填充圈選皆正確，得 1 分；否則 0 分。說明題的評分原則如前文所述。有關估測問題（Q10 與 Q15）的評分，使用黃幸美（2016）的估測合理程度區分：若估測值介於實際值的±10%之內，得 2 分；介於實際值的±10%− ±25%者，得 1 分；超過與低於實際值的±25%，得 0 分。正式評量之最高總得分為 45 分。

表 2
正式評量各類角情境試題、題項、問題類型與計分

情境	題號	試題	題項	題型	計分	各大題最高得分
傾斜	Q1.	斜坡	填充圈選	單一題	0 或 1	1
	Q3-1.	摺疊梯	填充圈選	題組	0 或 1	3
	Q3-2.	為什麼	說明		0~2	
	Q8a.	大頭針	填充圈選	題組	0 或 1	3
	Q8b.	為什麼	說明		0~2	
路徑	Q5-1a.	是否同意	數學判斷	題組	0 或 1	6
	Q5-1b.	為什麼	說明		0~2	
	Q5-2a.	是否同意	數學判斷	題組	0 或 1	
	Q5-2b.	為什麼	說明		0~2	
旋轉	Q11a.	指針旋轉	填充	題組	0 或 1	3
	Q11b.	怎麼知道	說明		0~2	
	Q12-1.	報讀刻度	填充	題組	0 或 1	4
	Q12-2a.	單指針秤	填充		0 或 1	
	Q12-2b.	為什麼	說明		0~2	
	Q13-1.	開盒蓋	填充	題組	0 或 1	3
	Q13-2.	說明理由	說明		0~2	
	Q14a.	指甲剪	填充圈選	題組	0 或 1	3
	Q14b.	為什麼	說明		0~2	
角測量	Q2.	辨識直角	填充	單一題	1~4	4
	Q4.	角大小比較	選擇	單一題	0 或 1	1
	Q6-1.	圖形內角大小比較	填充	題組	0 或 1	4
	Q6-2a.	是否同意	數學判斷		0 或 1	
	Q6-2b.	為什麼	說明		0~2	
	Q7a.	向右移位後的角比較	數學判斷	題組	0 或 1	3
	Q7b.	為什麼	說明		0~2	
	Q9a.	向左移位後的角比較	數學判斷	題組	0 或 1	3
	Q9b.	為什麼	說明		0~2	
	Q10.	角度估測	填充	單一題	0~2	2
	Q15.	繪製角	繪圖	單一題	0~2	2
最高可能得分						45

檢驗正式評量的信度，信度係數（Cronbach α）為 .77。在試題分析方面，每題項的難度與鑑別度分析結果呈如附錄 2。從附表 1 之試題分析結果顯示：本評量鑑別度較低的題項為比較角大小（Q4、Q6-1 與 Q6-2a）及路徑（Q5-2a），上述試題為角教材內容，所檢測的概念是學生學過的，學生的答題正確率高，他們在這些題項的解題表現差異不大，試題鑑別度因而較低（例如：Q6-1 與 Q6-2a 鑑別度為 .12 與 .05）。同時，學生在上述題項的答題正確性高，也顯示題項難度較低（例如：Q6-1 與 Q6-2a 難度為 .90 與 .95）。除上述題項以外，其他試題難度為 .15− .81，鑑別度為 .23− .82；在傾斜與旋轉試題的難度為 .15− .64，鑑別度為 .25− .67；角度估測問題的難度與鑑別度分別為 .22 與 .28 以上。

正式施測的樣本，使用便利取樣方法，對臺北市三所公立國小共 8 班四年級生 171 名（男生 84 人；女生 87 人）施測。受試者已接受角單元正式教學。

二、教師訪談樣本與工具

本研究訪談 7 位有經驗、教授過中年級數學的角單元、志願參與訪談的臺北市公立國小正式教師。受訪者的教學年資為 15−25 年，平均為 20.86 年。訪談過程全程錄音、轉成文字稿，並讓受訪者確認記錄的正確性。

訪談工具的設計乃參酌角概念評量問題，包含五大題：（一）教師如何引導學生認識圖形角及其定義？請評估您所任教班級學生理解概念的情形如何？（二）教師如何引導學生認識旋轉角及其定義？請評估您所任教班級學生理解概念的情形如何？（三）在提供文字描述及圖示下，學生從路徑（a，兩線交會）、傾斜（b，斜坡）、張開（c，打開扇子與剪刀）及旋轉（d，單指針轉動）情境辨識角的難易程度排序為何？為什麼？（四）學生解決下列問題的難易程度排序為何？（a）角的邊長與角大小的關係；（b）辨識直角；（c）利用直角估測 45°角與 135°角。（五）學生應用先前學習磅秤與指針轉動的經驗，辨識單針磅秤的指針轉動形成旋轉角的表現如何？為什麼？

三、資料處理

角概念評量結果的分析包含兩方面：（一）各題項依得分情形分類為：滿分、部分及無得分，並計算人次百分比。（二）使用相依樣本的單因子變異數分析，比較學生在不同角情境問題的總得分率。

由於先前研究發現學生在傾斜與旋轉情境問題的表現較低落（柯慶輝、梁淑坤，2001；鍾方怡，2019），本研究針對 2 題傾斜（Q3 和 Q8）與 3 題旋轉（Q12、Q13 及 Q14），進一步分析學生辨識角與理由說明的表現。此分析乃依辨識正確性與理由說明，分類為填答正確與錯誤並計次統計。在理由說明分類上，參考 van Hiele（1986）及 Battista（2007）的理論，分為五類。（一）角形：使用視覺觀察、判斷情境是否有角形，描述形狀但無指出角的構成要素與定義。例如：「看起來像角」。（二）定義：使用圖形角或旋轉角的定義說明理由。例如：「有兩條線合成/交界成一個角，中間有頂點」；「因為從疊合到打開形成的旋轉角，就

是一個角」。此類學生能陳述定義，指出構成要素及旋轉過程中的始邊與終邊的空間差異。（三）定義不全：僅提出圖形角或旋轉角的部分定義或構成要素。例如：「盒子的邊邊和蓋子的邊邊都是直的」。（四）其他（語義含糊）：部分使用角構成要素的語詞，含糊地簡述有否形成角或轉動過程，但無定義內容。例如：「指針沒有不直」；「因為從側面打開又關掉，會發現一個角」。被分類於定義不全與其他類者，對於角定義缺乏明確且完整地認知，雖能記憶部分的構成要素，但對角概念的理解不全。（五）不知道：回答「不知道」或空白，未能說明理由。此類學生對於角概念缺乏理解或消極填答。在教師知識資料分析方面，依據訪談問題與逐字稿，針對角概念的教學安排、對學生解題難易程度排序評估、理由說明及教學觀，作分類與次數統計。

在評分學生的解題表現，由研究者及助理依評分原則評閱全體學生的答題。於分析評分者信度上，經兩位評分者獨立評閱 63 份試卷後，分析評分者一致性。在非說明題項上，評分者一致性達 100%；在說明題項上，Kappa 分析評分一致性的結果為 .73，$p < .001$。在理由分類上，使用 Kappa 分析兩位分類員的分類結果，同意量數為 .81，$p < .001$。

在教師訪談資料分析上，首先，參考角教材及教學相關文獻（例如：周筱亭、黃敏晃，2003；國家教育研究院，2020）建構訪談問題的結構性編碼，繼而依受訪教師的逐字稿內容進行分類與計次統計。訪談問題的結構性編碼陳述如下。（一）針對圖形角與旋轉角的教學流程，區分為兩類：1.先探索，再介紹定義（圖形角的角形與構成要素／角的起始邊、旋轉後的終邊與旋轉方向），繼而製作與指認角等活動；2.先介紹定義，再製作與指認角等活動。（二）針對教師評估任教班級學生對圖形角與旋轉角概念理解的百分比，依百分比高低分類為：低於 50%、50−59%、60−79%、80% 及以上。（三）針對教師評估學生辨識各類情境角的難易程度排序分類，以及（四）教師評估學生解決 a、b、c 三類問題的難易程度排序，此兩大題乃依受訪教師所表達的辨識角與解決問題的難易順序排列情形，作為分類項目並統計各類次數。（五）針對教師評估學生應用先前學習磅秤與觀察指針旋轉知識，辨識單指針轉動形成旋轉角的觀點，分為兩類編碼：1.學生能應用與辨識；2.若無提供教學，則學生難以辨識。依據上述編碼，研究者與一位助理分別分析訪談內容。分析結果經使用 Kappa 分析評分者一致性，同意量數為 .86，$p < .001$。

肆、研究結果

一、學生的解題表現

學生在各角情境的解題表現，如表 3 所示。表 3 顯示四類情境的非說明題項得滿分之百分比，學生在路徑及角量測之部分題項可高達 92%，在旋轉（開盒蓋）約 55%，傾斜約 42−66%；但在說明題項表現不理想，尤以傾斜和旋轉最低。此外，77%的學生能報讀刻度數值，但僅有接近 50%的學生能指認指針旋轉過程中產生旋轉角。

經使用單因子 ANOVA（以情境為重複量數）分析學生在不同角情境總得分率之差異，Mauchly 檢定值為 .95，χ^2 (5, N = 171) = 8.28，p = .142，表示資料無違反球面性假設。角情境效果分析結果發現：學生在角情境的得分呈顯著差異，F(3, 510) = 103.49，p < .001，η^2 = .38。經事後比較結果顯示：學生在角量測與路徑的得分相近，兩者皆優於其他情境；在傾斜與旋轉的表現相當，但兩者皆低於其他情境之得分。

表 3

正式評量各類角情境試題、題項、問題類型與計分

情境	題號	試題	得分情形及百分比			大題得分率		情境得分率	
			無	部分	滿分	*M*	*SD*	*M*	*SD*
傾斜	Q1.	斜坡	40%	–	60%	0.60	0.49	0.36	0.25
	Q3-1.	摺疊梯	58%	–	42%	0.23	0.29		
	Q3-2.	為什麼	70%	25%	5%				
	Q8a.	大頭針	34%	–	66%	0.41	0.34		
	Q8b.	為什麼	48%	39%	13%				
路徑	Q5-1a.	是否同意	8%	–	92%	0.61	0.25	0.61	0.25
	Q5-1b.	為什麼	25%	42%	33%				
	Q5-2a.	是否同意	11%	–	89%				
	Q5-2b.	為什麼	32%	36%	32%				
旋轉	Q11a.	指針旋轉	50%	–	50%	0.36	0.39	0.36	0.25
	Q11b.	怎麼知道	51%	35%	14%				
	Q12-1.	報讀刻度	23%	–	77%	0.77	0.42		
	Q12-2a.	單指針秤	57%	–	43%	0.31	0.38		
	Q12-2b.	為什麼	57%	31%	12%				
	Q13-1.	開盒蓋	45%	–	55%	0.34	0.33		
	Q13-2.	說明理由	46%	48%	6%				
	Q14a.	指甲剪	56%	–	44%	0.28	0.35		
	Q14b.	為什麼	63%	26%	11%				
角量測	Q2.	辨識直角	2%	44%	54%	0.73	0.32	0.66	0.20
	Q4.	角大小比較	32%	–	68%	0.68	0.47		
	Q6-1.	圖形內角比較	8%	–	92%	0.85	0.22		
	Q6-2a.	是否同意	4%	–	96%				
	Q6-2b.	為什麼	14%	–	61%				
	Q7a.	向右移位後的角比較	29%	–	71%	0.58	0.43		
	Q7b.	為什麼	38%	15%	47%				
	Q9a.	向左移位後的角比較	32%	–	68%	0.54	0.43		
	Q9b.	為什麼	43%	15%	42%				
	Q10.	角度估測	52%	20%	28%	0.38	0.43		
	Q15.	繪製角	18%	19%	63%	0.73	0.39		

二、學生辨識角的理由說明類型與表現

學生辨識角的理由類型、正確性、次數與百分比，如表 4 所示。從表 4 可見理由類型包含五類，各類總百分比依高低排序為：不知道（27%）、其它（20%）、角形（19%）、定義不全（18%）、定義（16%）。五類組能辨識正確的總百分比，以定義最高（13%），次而角形（11%）、定義不全（11%）及其它（10%），此四組之差距為 0−3%；不知道（6%）組最低，而且此組與定義組的差距為 7%。相對地，在辨識錯誤的總百分比，以定義（3%）最低，次而定義不全（7%）、角形（8%）與其他（10%），此四組之差距為 1−7%；不知道（21%）組的錯誤百分比最高，而且此組與定義組的差距達 18%。

綜觀表 4，五組在傾斜（2 題）辨識角正確的人次百分比為 7−20%，雖然不知道組回答正確的總百分比最低，但有 9−13%的人次能說明正確。相對地，五組在旋轉（3 題）能辨識正確之人次百分比，分別為：角形 6−13%；定義 10−20%；定義不全 3−19%；其他 6−15%；不知道 1−5%。整體而言，五組學生於旋轉情境回答正確的百分比略低於傾斜情境，尤可見之於不知道組。

表 4

五類理由組在各情境辨識角的回答分類之次數與百分比

理由類別	辨識結果	傾斜				旋轉						總計	
		折疊梯		大頭針		單針秤		開盒蓋		指甲剪			
		f	%	*f*	%	*f*	%	*f*	%	*f*	%	*f*	%
角形	正確	13	7%	35	20%	11	6%	20	12%	23	13%	102	11%
	錯誤	26	15%	9	5%	14	9%	11	6%	10	6%	70	8%
	小計											172	19%
定義	正確	14	9%	14	9%	34	20%	18	10%	32	18%	112	13%
	錯誤	15	9%	3	2%	3	2%	3	2%	1	1%	25	3%
	小計											137	16%
定義不全	正確	12	7%	26	15%	20	12%	32	19%	5	3%	95	11%
	錯誤	12	7%	7	4%	26	15%	10	6%	5	3%	60	7%
	小計											155	18%
其他	正確	15	9%	24	14%	11	6%	26	15%	11	6%	87	10%
	錯誤	16	9%	6	4%	26	15%	23	13%	5	3%	76	10%
	小計											163	20%
不知道	正確	22	13%	16	9%	3	2%	1	1%	8	5%	50	6%
	錯誤	26	15%	31	18%	23	13%	27	16%	71	42%	178	21%
	小計											228	27%
總人次		171	100%	171	100%	171	100%	171	100%	171	100%	855	100%

三、教師知識分析

教師知識的訪談結果如下。

（一）教師在圖形角概念教學上，活動內容相似但程序安排略有差異。依活動與介紹角定義的先後安排，分為兩大類：1.先探索，再介紹定義。有 6 位教師採此類，其中 4 位教師表示：先讓學生觸摸教具及生活物件，並討論角在哪裡，感知角是一個轉彎的地方；其他 2 位教師表示：讓學生描繪三角板的角，觀察並說出角形是由什麼組成，繼而介紹定義及特徵，再從教室裡指認角、使用吸管製作角、觸摸與比較角的大小。2.先介紹定義，再製作與指認角。有 1 位教師採此類，此 D 教師描述其結合角形與語意介紹定義之說明：

> 我會用兩條邊夾一個角來說明，用「夾」的這個字讓小朋友知道—兩條邊中間那個地方就有角，這樣讓他們知道「邊」就是那兩條直線，頂點就在兩條直線相交的地方—尖尖的地方，他們也會知道角就是兩條邊中間所夾的地方。……此外，我會在黑板上畫出三角形和角，使用[習作]附件去找角。

D 教師重視先認識角的數學定義與構成要素，並使用為基準以辨識生活情境有那些物件符合角定義。

（二）在旋轉角概念教學上，所有教師皆強調先探索（或身體動作體驗）再介紹定義與旋轉方向。有 5 位教師表示：先讓學生在鐘面操作與觀察指針旋轉過程、描繪指針旋轉前後的位置、找出角，再介紹定義及旋轉程度，繼而學生再觀察物件旋轉（時鐘或摩天輪）及所產生的旋轉角與旋轉方向。其他 2 位教師認為除了觀察時針旋轉以外，讓學生體驗身體與手臂旋轉，感知物件旋轉時的移動，再介紹定義與觀察物件旋轉過程所形成的角。

（三）教師對任教班級學生理解角概念的評估。1.圖形角：整體而言，約 50−80%以上的學生能理解。其中，1 位教師認為於初步操作學習時，約有 50%的學生可理解，再經教學後，多數學生可以理解；另有 2 位教師表示約 60−70%及 4 位教師認為 80%以上的學生能理解。2.旋轉角：教師們表示理解旋轉角概念較困難，需多提供操作與說明以助學生理解。有 3 位教師認為經初步教學後仍有部分學生（約 1/3~1/2）理解不足，再經操作與說明，則理解的人數可提升至 85%以上；另有 1 位認為約 60−70%、2 位認為約 80−85%學生可理解。此外，有 1 位教師未明確指出百分比。

（四）教師評估學生從各類情境辨識角的難易程度排序及理由，包含三類。1.路徑、張開、斜坡、旋轉。有 1 位教師認為：從路徑和張開可見角形的兩條邊，但學生不易從斜坡察覺地面水平線與傾斜的坡面交會，較難指認角，而且，單指針旋轉情境只呈現單一指針，學生需想像轉動的範圍，難度最高。2.張開、路徑、旋轉、斜坡。有 4 位教師認為：學生熟悉扇子與剪刀張開的情境，較容易辨識；從路徑可看到兩條邊交會的角形，容易辨識；旋轉則有點難度，但學生可以從鐘面指針的旋轉而判斷旋轉過程產生角；然而學生不易辨識斜坡，尤當圖示未呈現表徵地平面的圖示時，指認角最困難。3.張開、路徑、斜坡、旋轉。

有 2 位教師認為：張開的情境最具體，學生最容易辨識；路徑像生活中的地圖，容易指認角；傾斜和旋轉各有其難度，不同的學生感覺困難的情況不同。當傾斜圖示無具體呈現水平線，則學生辨識角有難度；單指針旋轉具動態性質且教科書沒有此類情境，學生不容易自行想像起始邊，辨識最困難。例如：C 教師說明：

> 斜坡與地平面交會包含平面和直線，這有點像 3D 立體，小朋友會看不出來，他們可能覺得好像有，可是講不出來，因為它是一個平面對[交會]一個平面，或一個直線對[交會]一個平面，變成像 3D 立體，有些小朋友對[了解]傾斜是有困難的，小朋友較不會想到地平面；有些小朋友可能還好。

在評估學生解決下列問題的難易度—角大小與角邊長關係(a)、辨識直角(b)、估測角度(c)，由易而難排序及理由，包含兩類。1. b、a、c。有 6 位教師認為：學生在二年級學習鉛垂與水平現象，且於三年級學習直角與含有直角的基本圖形，所以 b 最容易；在解決 a 題，少數四年級生容易受視覺影響而誤判，難度為次高；解決 c 題，涉及使用直角 90°為基準、角度的等分切割（將 90°切割成 2 等分為 45°；估測 135°則需了解 45°與 90°角的關係，並合成 90°與 45°角），程序複雜也最困難。此外，有 3 位教師認為學生容易判斷比直角大或小的角。2. a、b、c。有 1 位教師認為：四年級生已能了解角的大小不受角的邊長影響，因此 a 最簡單；於辨識直角時，學生可能因角的開口方向變化而辨識錯誤，b 的難度為次高；c 估測角度最困難，理由與第一類教師相似。

（五）在評估學生能否應用學習磅秤與觀察指針轉動的經驗，辨識單指針轉動形成旋轉角，教師觀點包含兩類：1.能應用與辨識：有 3 位教師持此觀點。2.若無提供教學，則辨識困難：有 4 位教師認為學生先前觀察磅秤報讀重量乃學習重量測量，無涉及旋轉角。教師若於旋轉角教學中，導引學生觀察與注意秤面指針的旋轉，並將它與時鐘的指針旋轉過程相比較，則學生能應用；否則，學生不容易自發性將磅秤的指針旋轉過程與旋轉角概念連結。

歸納上述，受訪教師們的角教學重視觀察日常物件、操作、指認角與討論，認為學生掌握圖形角概念較旋轉角容易，但多提供操作、討論與教學說明，則可達 70−85%以上的學生能理解旋轉角概念。半數以上教師認為學生需經教學，才能將先前觀察秤面指針旋轉與報讀刻度的經驗與旋轉角概念連結。教師傾向認為學生對角形可見與熟悉的情境（例如：剪刀張開），容易辨識角，但相較於從路徑與張開辨識角，辨識傾斜與單指針旋轉的角難度較高。

伍、討論、結論與建議

一、討論

本研究調查四年級學生的角概念、辨識生活情境中的角與解決問題的表現，以及教師對學生角知識的認知與教學觀點。結果發現：（一）學生解決不同角情境問題的表現呈顯著差異，支持研究假設──學生的解題表現因角情境問題不同而有差異。學生在角量測與路徑的得分率接近，兩者皆優於傾斜與旋轉的表現；同時，學生在傾斜與旋轉的得分率也相當。（二）學生辨識角的理由說明包含五類：不知道（27%）、其它（20%）、角形（19%）、定義不全（18%）及定義（16%）。五類組能成功辨識角的整體百分比之高低排序為：定義（13%）、角形（11%）與定義不全（11%）、其它（10%）、不知道（6%）。（三）教師於教授圖形角與旋轉角時，雖然教學活動與介紹定義的先後安排略有差異，但皆重視觀察、操作、援引生活情境為例隅，藉描繪與製作活動導引學生認識角及其定義。教師們指出：從單邊角情境指認角的難度高於雙邊角；學生容易辨識直角，但在使用直角為參照以估測角度則有困難。約 40%（3/7）的老師評估學生能應用報讀磅秤的經驗指認針旋轉產生旋轉角；約 60%（4/7）的老師認為需提供教學，學生才能應用與指認。（四）檢視學生解題表現與教師知識的呼應情形，可發現：教師了解學生的解題表現受角性質、情境及教學影響，而且認為──相較於張開與路徑，從傾斜與旋轉情境辨識角難度較高；相較於辨識直角、判斷角大小與角邊長無關，估測角度的難度較高。綜合教師知識分析結果，教師對學生理解圖形角與旋轉角概念的評估，前者接近學生的實際表現，後者則呈高估現象。依據研究結果，後文對學生的角知識、教師知識與教學觀，提出討論，並對角教材與教學及後續研究提出建議。

（一）角情境對解題的影響

本研究發現學生在角量測與路徑的表現最優良，但在旋轉問題的得分率低落，此結果類似數學能力檢測結果（黃幸美，2021）。雖然學生在傾斜與旋轉的總得分率平均數相同，但剔除旋轉情境的報讀刻度題項（Q12-1），比較傾斜與旋轉各題的得分率，學生在旋轉的表現略遜於傾斜，此現象呼應柯慶輝與梁淑坤（2001）及鍾方怡（2019）的研究結果。學生的解題表現因角情境不同而產生差異的可能因素，說明如下。

1. 理解靜態與動態性質的角定義，所需抽象化幾何思考的複雜性不同

在角量測及路徑情境問題，角形顯而易見，學生可直接根據角的物理特徵辨識角與比較大小。相對地，在旋轉問題（打開及指針旋轉），學生需認識旋轉中心、起始邊與終邊，應用旋轉角的動態轉動概念，將盒蓋與盒子交會的轉軸、指針固定於秤面的點，視如旋轉中心並判斷旋轉過程產生旋轉角。上述從生活所經驗的角情境進行分類，找出特徵相似性，並藉反思、比較與類比等心理操作，為理解旋轉角概念的重要運思（Mitchelmore & White, 2000），應用此理解於辨識角需統合多元的幾何運思，其難度也比辨識圖形角高。此外，情

境圖示是否符合兩邊交會於一點的角形，也可能影響學生的辨識表現。Mitchelmore 與 White（2000）及柯慶輝與梁淑坤（2001）發現學生容易注意物件打開的情境存有角（例如：張開的剪刀），但本研究的打開盒蓋及指甲剪問題，僅約 44−55%的學生辨識成功。學生在上述張開問題表現不佳，可能導因於學生未能想像從「合著到打開」形成旋轉角，或將「盒蓋與盒身邊線」、「指甲剪與磨甲片」分別視如兩線交會而形成角。

2. 當角情境呈現的角構成要素不足時，學生需運用心理意象建構與辨識角

在單邊角情境，學生需運用心理意象建構隱而未見的邊，思考歷程較複雜（Mitchelmore, 1998）。例如：本研究的傾斜與單指針旋轉問題，學生皆需自行建構角的一邊，或記憶指針起始的位置、發現其與終邊位置的差異，辨識角的難度也較高（Host et al., 2015）。此外，學生傾向關注角的物理特徵與依賴直觀，缺乏將所觀察的圖或物件特徵與數學知識連結，當角形特徵未具體可見時，也可能導致辨識失敗（Duval, 2006）。

3. 學習經驗可能影響學生的解題表現

從本研究結果可見學生主動將角情境與數學角概念連結的能力不足，因此，課程與教學對增進學生的角概念認知，意義重大。針對說明題項，本研究發現：在路徑及角量測情境得分者約 60%及以上；在傾斜與旋轉情境，無得分者為 46−70%。固然使用文字陳述數學想法具有挑戰性（臺北市政府教育局，2014），但學生說明理由能力不足之現象，尤見之於傾斜與旋轉問題。此外，77%的學生能報讀磅秤單指針所指的刻度，但能自發性將指針旋轉與旋轉角概念連結者僅有 50%的學生。呈如 4 位受訪教師的評估說明──若無提供單指針旋轉的討論教學，學生自發性連結應用與辨識的能力不足。上述學生的困難與表現落差問題，一方面寓意著──若學生未能自發性將角知識與情境作連結，或對角概念理解不足，對於需應用知識辨識角的情境，表現低落。另一方面，教材提供旋轉角的情境多為隱含雙邊角特性，學生少有單邊角情境的學習機會，察覺情境相似性並應用數學知識的表現因而較低弱。

在角量測方面，本研究發現學生此情境的得分率最高，約有 56%的學生能了解角的大小不受開口方向、角邊長（Q7）與粗細（Q9）影響。黃金泉（2003）發現：四年級生能瞭解──角邊的長短、粗細與角大小無關者，分別為 34%與 56.5%；賴文正（2005）發現：五年級生能瞭解上述概念者，分別為 58.3%與 72.9%。比較本研究與上述文獻，本研究學生在角邊長短變化的判斷能力，接近五年級生表現；在角邊粗細變化的判斷表現則接近四年級生。此寓意著──角教材經歷課程標準與綱要之轉換，以及教學強調觀察、操作與製作，四年級生在角大小與邊長關係的判斷呈有進步。另一方面，本研究結果發現仍有約 40%學生判斷失敗。呈如 6 位受訪教師認為部分學生仍受角邊長短的視覺影響而誤判。在估測方面，從表 3 可見學生認識直角（54%）且能至少完成部分的指認（44%），此結果呼應鍾靜（2010）的探討。相對地，在估測 45°角的得分者僅為 48%；在繪製 135°角的得分者則約為 82%。學生在兩題的估測表現不同，可能導因於估測解題所需的歷程差異。估測 45°角時，學生需使用 90°為參照單位，並將 90°等分為兩個 45°角；繪製 135°角時，則使用 90°為參照單位

並將 90°與 45°合成。學生在應用直角解決角度估測問題上，處理角度分解問題的難度是否高於角度合成問題，有待進一步探討。

（二）學生的角概念理解與理由說明

定義組在傾斜和旋轉問題能使用角定義，明確說明辨識理由，惟人數僅占 16%；約 40%的學生有使用角定義說明的趨向，但陳述不完整（18%）、含糊陳述部分的角構成要素（20%）；約 1/5 的學生依賴視覺觀察與角形，無使用定義說明。而且，尚有 27%的學生（不知道組）未能說明如何辨識角。此顯示：已接受角概念教學的四年級學生，仍有多數學生未能充分掌握定義或將概念內化，使用文字陳述理由。

比較辨識角的表現，定義組辨識成功的百分比最高（13%）、錯誤者最低（3%），其他四組辨識成功的百分比接近（10−11%），但皆略低於定義組。此寓意：當學生能自發性地使用所理解的角定義檢視情境特徵、指認角的特性，此種認知理解具有堅韌性，助益辨識成功，降低失誤率。此外，角形、定義不全及其他組角形組傾向依賴角的物理特徵辨識角，雖有部分學生能指認成功，但角位置辨識錯誤的百分比皆高於定義與定義不全組。視覺觀察物件形體的外貌與特徵判斷，固然為幾何思考發展的基礎（Battista, 2007; van Hiele, 1986），但解決幾何問題時，僅倚重形體的物理特徵而忽略連結數學的內在屬性與定義概念，容易受外在的表面特徵干擾、困囿思考而導致辨識錯誤。類似地，定義不全及其他組雖使用部分角定義語詞說明，但對於概念內容一知半解，在辨識正確性的助益也有限。從不知道組學生辨識成功率最低（6%）、錯誤率最高（21%），可推知當學生缺乏說明辨識理由的能力時，其雖能有少許的正確辨識表現，但終因概念理解不足，辨識錯誤的可能性也較高，尤可見之於旋轉情境問題。

（三）教師知識

本研究發現受訪教師於引導學生認識不同性質的角概念，皆相當重視觀察物件與生活中的角情境、觸摸、描繪與製作活動，將上述活動分布於介紹角定義與特徵之前與後，例如：86%（6/7）的教師優先安排探索、發現角形特徵，再介紹角定義，指認課室中的角為教學的重要活動；在旋轉角的教學，所有教師皆然。由此可見，多數受訪教師的角教學觀符合幾何教育學者的觀點（Battista, 2007; van Hiele, 1986），也呼應課綱的教學建議。然而，本研究一位受訪教師對於靜態的雙邊角教學，優先介紹角構成要素與定義，然後提供知覺探索與討論活動，從訪談內容可發現其重視學生指認角的構成要素及以兩邊交會的樣貌辨識角，此種教學安排與幾何教育學者的觀點不同。此現象一少數教師重視角形與定義教學的優先性，也呼應 Sbaragli 與 Santi（2011）所描述的部分教師的教學觀。雖然學生認識角起始於注意角形樣貌，強調角的物理特徵（例如：角邊）有助學生建立對角的直觀與記憶構成要素，但欲深化理解幾何的角概念與類比推理，從探索生活中的角情境、引導討論及比較特徵相似性，進而歸納角定義，方為有意義學習的途徑（Casas-García & Luengo-González, 2013）。

從評估學生的角概念理解情形，教師評估理解圖形角的比例高於旋轉角，經對照學生在圖形角性質問題的得分情形，除了理由說明題項以外，6 位教師（6/7）評估約為 60−80%以上可理解，接近學生的解題表現，僅有 1 位略微低估。在旋轉角方面，所有教師對學生能力呈有高估現象。造成高估的原因，可能由於教師平時觀察學生的學習以教材問題為主，而且對理解不足的學生提供補救教學，以達到 80%的學生能學會教材（教育部，2000）。同時，檢視教師評估不同角情境辨識角的難易程度排序，僅有 1 位教師完全符合本研究四年級生在不同情境之得分率排序（路徑、張開、斜坡、旋轉）；其他 6 位教師則僅部分排序符合。由此可見，教師對於學生面對生活中的傾斜現象，以及張開情境非完全符合兩線交會於一點的角情境辨識，難易程度評估略微不符實徵結果。造成此結果之原因，可能由於本研究包含單邊角問題，其非教材內容且難度較雙邊角問題高，當教師缺乏提供學生此類情境的學習機會，觀察學生的辨識表現匱乏，導致評估結果未符應學生表現。

從教師訪談分析，教師們皆認為角度估測的難度最高，此現象尤見之於學生估測 45°角的表現，但非繪製 135°角，因此教師知識部分呼應學生的估測表現。值得一提的是，本研究的估測問題僅包含兩大題，對學生估測能力訊息的提供有限，未來的研究宜加增不同題型與題數，有助深入分析。

此外，本研究從學生與教師兩主體分別探討角的教與學，研究結果一方面顯示學生對角的概念理解與從生活情境中辨識角的表現，另一方面呈現教師對角的教與學觀點、對學生解決不同角問題的難易程度評估，然而師生兩主體之間的關聯為何，猶待後續進一步探討。而且，欲深入了解教師對於數學的角教學內容知識的認知，建議後續研究設計測量教師的角知識之工具並實測，本研究結果結合教師的角知識實測量化資料，裨益洞悉教學者所建構的角教學內容知識及對學生角概念之認知。

二、結論與建議

學生解決角問題的表現因情境及其所隱含的角性質不同而呈差異，當問題情境具有雙邊角特徵時，學生的辨識表現優於單邊角問題。理解旋轉角定義及辨識動態情境中的角，對學生解題具有挑戰性，尤可見之於非屬於教材內容的情境。上述的現象亦與學生辨識角及說明理由的分析結果，相互呼應。本研究結果也發現：多數受訪教師的教學觀符合幾何教育學者及課綱的教學建議，了解學生理解旋轉角與辨識單邊角的困難，對於學生理解靜態雙邊角的評估，接近學生的實際表現，但在評估旋轉角概念上，則呈高估現象。而且，教師傾向認為對學生辨識非教材內容的傾斜與單針旋轉情境角具有難度，對難易程度的排序未完全符合學生的表現。然而，本研究的教師晤談樣本僅為七位個案，非全為受試學生的數學老師，亦無實際教學觀察資料，此也影響本研究對於不同教學觀的教師對學生學習成就的關係之說明受限制。此外，本研究以角概念為主題，使用晤談方法收集教師對角的教與學觀點，但缺乏實測教師的角概念認知之量化資料，因此，研究結果所呈現的教與學觀點未能推論教師的角概念認知情形。

教師了解學生的數學知識與解題困難，才能察覺學生想法，進而援引為課室討論與教學的問題，建構導向學生概念理解的教學（Dreher et al., 2021）。本研究的個案教師了解學生學習旋轉角概念的挑戰，Bartolini Bussi 與 Boero（1998）及 Duval（2006）建議教師使用語言、圖示表徵與提問等導引，讓學生探索所觀察的現象、指出情境中的形狀特徵及其與數學概念可類比之處，從注意情境（物件）特徵與幾何概念作對應、連結及某種程度的轉換表徵，藉此激發出對幾何特性的察覺，為幫助學生從歸納實踐中的知識進入幾何思考與數學知識學習的橋樑。本研究發現部分學生能察覺傾斜與單針旋轉情境中存有角、能從對單邊角情境辨識角，因此，此類情境值得教師導引學生探索與討論。鼓勵學生使用語言指認不同情境所隱含的靜態角與旋轉角屬性（Mitchelmore & White, 2010），例如：觀察傾斜的物件與地面交會形成角；秤面指針旋轉與時鐘指針旋轉的相似性等，並提供學生富含空間知覺的活動經驗，包含結合辨認方向（方位）做身體移動與肢體轉動、製作角，以及觀察角邊於轉動前、後的位置差異（Host et al., 2015）等，結合知覺感官、操作與語言說明的教學，對於導引依賴角形觀察及對角概念一知半解的學生（例如：定義不全、其他及不知道組），理解角概念與辨識正確率，尤具重要性。

誌謝

本研究為國科會補助專案研究計畫（MOST 105-2511-S-845-002-MY3）之部分研究成果，於此對國科會之經費補助謹表致謝。同時，感謝協助施測與受訪的國小教師，以及參與研究的國小學生。本文並感謝匿名審查的委員所提供之建議，使論文得已更臻理想。

參考文獻

周筱亭、黃敏晃（主編）（2003）。**國小數學教材分析-體積和角度**。國立教育研究院籌備處。[Zhou, X.-T., & Huang, M.-H. (Eds.). (2003). *Analysis of primary school mathematics textbooks-volume and angles.* Preparation Office of National Academy for Educational Research. (in Chinese)]

林陳涌、任宗浩、李哲迪、林碧珍、張美玉、曹博盛、楊文金（2017）。**國際數學與科學教育成就趨勢調查 2011 國家報告**（修訂版）。國立臺灣師範大學科學教育中心。[Lin, C.-Y., Ren, T.-H., Lee, C.-D., Lin, P.-J., Chang, M.-Y., Tsao, P.-S., & Yang, W.-J. (2017). *Trends in international mathematics and science study 2011 national report* (Rev. ed.). National Taiwan Normal University Science Education Center. (in Chinese)]

柯慶輝、梁淑坤（2001）。透過具體角情境探討國小三年級學生之解題表現。**科學教育研究與發展季刊，25**，49–80。[Ka, C.-H., & Leung, S.-K. (2001). Investigating third grade children's problem solving performance using physical angle situations. *Research and Development in Science Education Quarterly, 25*, 49–80. (in Chinese)]

國家教育研究院（2020）。**十二年國民基本教育課程綱要國民中小學暨普通型高級中等學校－數學領域課程手冊**。作者。[National Academy for Educational Research. (2020). *Curriculum guidelines of 12-year basic education for elementary, junior high schools and general senior high schools–Mathematics domain's curriculum handbook*. Author. (in Chinese)] https://reurl.cc/93mjed

教育部（2000）。**國民中小學九年一貫課程暫行綱要－數學學習領域**。作者。[Ministry of Education. (2000). *The provisional curriculum guidelines of grade 1-9 for elementary and junior high school education–Mathematics learning domain*. Author. (in Chinese)]

教育部（2010）。**國民中小學九年一貫課程綱要－數學學習領域**（三版）。作者。[Ministry of Education. (2010). *Curriculum guidelines of grade 1-9 for elementary and junior high school education–Mathematics learning domain* (3rd ed.). Author. (in Chinese)]

教育部（2018）。**十二年國民基本教育課程綱要國民中小學暨普通型高級中等學校－數學領域**。作者。[Ministry of Education. (2018). *Curriculum guidelines of 12-year basic education for elementary, junior high schools and general senior high schools–Mathematics*. Author. (in Chinese)] https://cirn.moe.edu.tw/Upload/file/27338/72246.pdf

黃幸美（2016）。學童估測長度、面積與體積的表現與策略使用之探討。**教育科學研究期刊，61**（3），131–162。[Huang, H.-M. E. (2016). Investigation of the performance and use of strategy among elementary school children in estimating measurements of length, area, and volume. *Journal of Research in Education Sciences, 61*(3), 131–162. (in Chinese)] https://doi.org/10.6209/JORIES.2016.61(3).05

黃幸美（2021）。學生的空間測量能力及教科書的面積與體積教材之探討。**教科書研究，14**（1），57–96。[Huang, H.-M. E. (2021). Study of students' spatial measurement competence and textbook units of area and volume measurements. *Journal of Textbook Research, 14*(1), 57–96. (in Chinese)] https://doi.org/10.6481/JTR.202104_14(1).03

黃金泉（2003）。**國小四年級學生角的概念之研究**（未出版之碩士論文）。國立屏東大學。[Huang, C.-C. (2003). *Research on the concept of corner for fourth-grade elementary school students* (Unpublished master's thesis). National Pingtung University. (in Chinese)]

臺北市政府教育局（2014）。**學生數學解題思維探究—數學建構反應題解題分析**（上冊）。作者。[Department of Education Taipei City Government. (2014). *An exploration of students' mathematical problem-solving thinking - Analysis of mathematical construction response questions* (Volume 1). Author. (in Chinese)]

劉好（1997）。角的課程設計理念。載於臺灣省國民學校教師研習會（主編）。**國民小學數學科新課程概說（中年級）：協助兒童認知發展的數學課程**（頁 202–214）。臺灣省國民學校教師研習會。[LIU, H. (1997). Angular course design concept. In Taiwan Province National School Teachers Seminar (Ed.), *An overview of the new mathematics curriculum for elementary schools (middle grade): Mathematics curriculum to assist children's cognitive development* (pp.202–214). Taiwan Province National School Teachers Seminar. (in Chinese)]

賴文正（2005）。**國小五年級學生角概念表現之研究**（未出版之碩士論文）。國立臺中教育大學。[LAI, W.-C. (2005). *The study of fifth-grade students' performance in angle concept* (Unpublished master's thesis). National Taichung University of Education. (in Chinese)]

鍾方怡（2019）。**國小四年級學童分類具體角情境之研究**（未出版之碩士論文）。國立清華大學。[Chung, F.-I. (2019). *A study of fourth grade students on classifying physical angle situations* (Unpublished master's thesis). National Tsing Hua University. (in Chinese)]

鍾靜（主編）（2010）。**問題導向學習與數學教師專業成長**。國立台北教育大學。[Chung, C. (Ed.). (2010). *Problem-based learning and mathematics teachers' professional growth.* National Taipei University of Education. (in Chinese)]

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389–407. https://doi.org/10.1177/0022487108324554

Bartolini Bussi, M. G., & Boero, P. (1998). Teaching and learning geometry in contexts. In C. Mammana, & V. Villani (Eds.), *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century: An ICMI study* (pp. 52–62). Kluwer Academic Publishers.

Battista, M. T. (2007). The development of geometric and spatial thinking. In F. K. Lester, Jr. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 843–908). Information Age Publishing.

Casas-García, L. M., & Luengo-González, R. (2013). The study of the pupil's cognitive structure: The concept of angle. *European Journal of Psychology Education, 28*, 373–398. https://doi.org/10.1007/s10212-012-0119-4

Cope, P., Smith, H., & Simmons, M. (1992). Misconceptions concerning rotation and angle in LOGO. *Journal of Computer Assisted Learning, 8*(1), 16–24. https://doi.org/10.1111/j.1365-2729.1992.tb00381.x

Devichi, C., & Munier, V. (2013). About the concept of angle in elementary school: Misconceptions and teaching sequences. *The Journal of Mathematical Behavior*, *32*(1), 1–19. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2012.10.001

Dreher, A., Lindmeier, A., Feltes, P., Wang, T. Y., & Hsieh, F. J. (2021). Do cultural norms influence how teacher noticing is studied in different cultural contexts? A focus on expert norms of responding to students' mathematical thinking. *ZDM–Mathematics Education, 53*(1), 165–179. https://doi.org/10.1007/s11858-020-01197-z

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational studies in Mathematics, 61*(1–2), 103–131. https://doi.org/10.1007/s10649-006-0400-z

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Kluwer.

Hill, H. C., Ball, D. L., & Schilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in mathematics Education, 39*(4), 372–400. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.39.4.0372

Hill, H. C., Blunk, M. L., Charalambous, C. Y., Lewis, J. M., Phelps, G. C., Sleep, L., & Ball, D. L. (2008). Mathematical knowledge for teaching and the mathematical quality of instruction: An exploratory study. *Cognition and Instruction, 26*(4), 430–511. https://doi.org/10.1080/07370000802177235

Hill, H. C., Rowan, B., & Ball, D. L. (2005). Effects of teachers' mathematical knowledge for teaching on student achievement. *American Educational Research Journal, 42*(2), 371–406. https://doi.org/10.3102/00028312042002371

Host, E., Baynham, E., & McMaster, H. (2015). Using digital technology to see angles from different angles: Part2: Openings and turns. *Australian Primary Mathematics Classroom, 20*(2), 3–9. https://search.informit.org/doi/10.3316/informit.330310811909842

Huang, H.-M. E. (2017). Curriculum interventions for area measurement instruction to enhance children's conceptual understanding. *International Journal of Science and Mathematics Education, 15*(7), 1323–1341. https://link.springer.com/article/10.1007/s10763-016-9745-7

Huang, H.-M. E., Tu, S. M., & Hsieh, C. C. (2018). Students' angle-related knowledge used for recognizing angles and solving problems. In F. J. Hsieh (Ed.), *Proceedings of the 8th ICMI-East Asia Regional Conference on Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 435–444). National Taiwan Normal University.

Kubiszyn, T., & Borich, G. D. (2024). *Educational testing and measurement* (12th ed.). John Wiley & Sons.

Leatham, K. R., Peterson, B. E., Stockero, S. L., & Van Zoest, L. R. (2015). Conceptualizing mathematically significant pedagogical opportunities to build on student thinking. *Journal for Research in Mathematics Education, 46*(1), 88–124. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.46.1.0088

Mitchelmore, M. C. (1997). Children's informal knowledge of physical angle situations. *Learning and Instruction, 7*(1), 1–19. https://doi.org/10.1016/S0959-4752(96)00007-2

Mitchelmore, M. C. (1998). Young students' concepts of turning and angle. *Cognition and instruction, 16*(3), 265–284. https://doi.org/10.1207/s1532690xci1603_2

Mitchelmore, M. C., & White, P. (1998). Development of angle concepts: A framework for research. *Mathematics Education Research Journal, 10*(3), 4–27. https://doi.org/10.1007/BF03217055

Mitchelmore, M. C., & White, P. (2000). Development of angle concepts by progressive abstraction and generalisation. *Educational Studies in Mathematics, 41*, 209–238. https://doi.org/10.1023/A:1003927811079

Owens, K., & Highfield, K. (2015). Visuospatial reasoning in contexts with digital technology. In K. Owens (Ed.), *Visuospatial reasoning: An ecocultural perspective for space, geometry and measurement education* (pp. 275–289). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-02463-9_9

Prescott, A., Mitchelmore, M. C., & White, P. (2002). *Student difficulties in abstracting angle concepts from physical activities with concrete materials* (ED472950). ERIC. https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED472950.pdf

Sbaragli, S., & Santi, G. (2011). Teacher's choices as the cause of misconceptions in the learning of the concept of angle. *International Journal for Studies in Mathematics Education, 4*(2), 117–157.

Stavy, R., & Tirosh, D. (1996). Intuitive rules in science and mathematics: The case of 'more of A−more of B'. *International Journal of Science Education, 18*(6), 653–667. https://doi.org/10.1080/0950069960180602

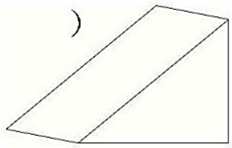
van Hiele, P. M. (1986). *Structure and insight: A theory of mathematics education*. Academic Press.

White, P., & Mitchelmore, M. C. (2010). Teaching for abstraction: A model. *Mathematical Thinking and Learning, 12*(3), 205–226. https://doi.org/10.1080/10986061003717476

Wilson, P. S., & Adams, V. M. (1992). A dynamic way to teach angle and angle measure. *The Arithmetic Teachers, 39*(5), 6–13. https://doi.org/10.5951/AT.39.5.0006

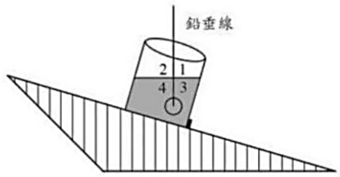
附錄 1：角概念評量

1. 下圖是地面上的一個斜坡。這個斜坡與地面之間有沒有形成角？(　　　)
如果有, 請你把斜坡和地面形成角的地方，將它圈起來。



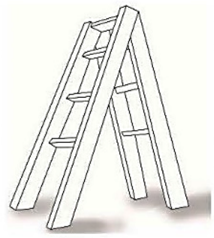
2. 下圖是張老師將水杯置於斜坡上，掛鐵球的線與水面相交形成四個角。你認為下列的角是直角的，請在（ ）內打✓。

①角 1(　　); ②角 2 (　　); ③角 3 (　　); ④角 4 (　　)



3. 下圖是一部打開的折疊梯和地面。你觀察折疊梯和地面有沒有形成角？（　　　）
如果有, 請你把折疊梯和地面形成角的地方, 將它圈起來。

為什麼你認為所圈起來的地方是角?



4.(　　　)下列哪一個答案中，角的大小是從小排到最大? 請選出一個正確的答案。

甲　乙　丙　丁

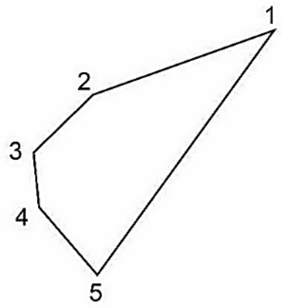
①乙、甲、丙、丁; ②乙、丙、甲、丁; ③丁、甲、丙、乙; ④丁、丙、甲、乙

5-1. 右方的地圖是小梅從家裡到學校與公園的路徑圖。
小芳說:「小梅上學的路上，轉 3 個彎，就可以走到學校。」你同意嗎? （　　　）
為什麼?

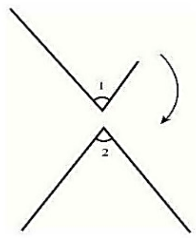
5-2. 阿洋說:「小梅上學路上需要轉彎的地方，就是路徑圖上形成角的地方。」
你同意嗎? （　　　）
為什麼?

6-1. 下圖為五邊形，哪一個角最小? (　　　)

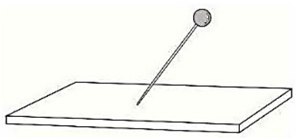
6-2. 阿飛說：「角 5 比角 2 大，因為它的邊長比較長。」
你同意嗎? (　　　)
為什麼?



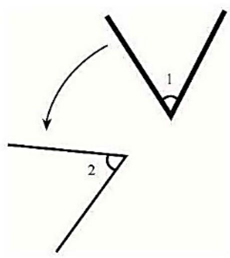
7. 下圖是角 1 和角 2。老師將角 1 向右移動位置, 移動以後的圖稱為角 2。
角 1 和角 2 哪一個比較大？ (　　　)
為什麼？



8. 小珍將一支大頭針插在保麗龍板平面上。從下面的圖，大頭針與保麗龍板平面之間　有沒有形成角？(　　　)
如果有，請你在大頭針與保麗龍板平面形成角的地方，將它圈起來。
為什麼你認為所圈起來的地方是角？



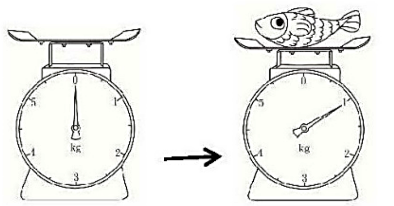
9. 下圖是角 1 和角 2。老師將角 1 向左移動位置, 移動以後的圖稱為角 2。
角 1 和角 2 哪一個比較大？ (　　　)
為什麼？



10. 下圖是壽星帽的平面圖。請你估估看，這帽子上方所形成的角大約是多少度?
(　　　)度　(不使用量角器)

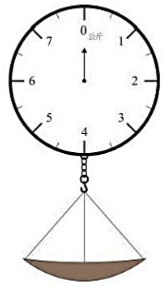
11. 媽媽秤魚的重量。秤面的指針從"0"公斤移動到指向"1"公斤。秤的指針從刻度"0" 移動到 "1" 的過程中，有沒有形成角?(　　　)

你怎麼知道的?



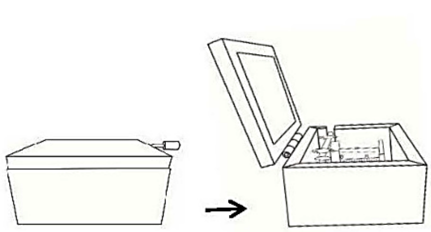
12-1. 右圖是一個吊秤。當指針向順時針方向旋轉半圈以後，指針所指的刻度是多少?(　　　)

12-2. 指針向順時針方向旋轉半圈的過程，有沒有產生角?(　　　)
為什麼?

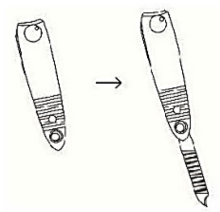


13. 這是一個木箱音樂盒。你觀察木箱蓋子從蓋著到打開，蓋子被打開的過程 中，有沒有形成角?(　　　)

請說明理由:



14. 你觀察磨指甲片與指甲剪從完全疊合到打開，在磨指甲片打開的過程中(如下圖)，有沒有形成角? (　　　)
如果有,請將磨指甲片因打開而形成的角,圈起來。
為什麼你認為所圈起來的是角?



15. 請你畫出一個大約是 135 度的角。(不使用量角器)

附錄 2：角概念評量試題分析

附表 1

正式評量各類角情境試題之難度與鑑別度

情境	題號	試題	難度	鑑別度
傾斜	Q1.	斜坡	0.61	0.33
	Q3-1.	摺疊梯	0.48	0.44
	Q3-2.	為什麼	0.15	0.25
	Q8a.	大頭針	0.64	0.58
	Q8b.	為什麼	0.30	0.48
路徑	Q5-1a.	是否同意	0.81	0.23
	Q5-1b.	為什麼	0.48	0.30
	Q5-2a.	是否同意	0.85	0.12
	Q5-2b.	為什麼	0.41	0.36
旋轉	Q11a.	指針旋轉	0.52	0.67
	Q11b.	怎麼知道	0.35	0.51
	Q12-1.	報讀刻度	0.79	0.28
	Q12-2a.	單指針秤	0.43	0.63
	Q12-2b.	為什麼	0.28	0.46
	Q13-1.	開盒蓋	0.55	0.44
	Q13-2.	說明理由	0.29	0.30
	Q14a.	指甲剪	0.50	0.34
	Q14b.	為什麼	0.22	0.32
角量測	Q2.	辨識直角	0.74	0.30
	Q4.	角大小比較	0.64	0.12
	Q6-1.	圖形內角比較	0.90	0.12
	Q6-2a.	是否同意	0.95	0.05
	Q6-2b.	為什麼	0.68	0.33
	Q7a.	向右移位後的角比較	0.66	0.54
	Q7b.	為什麼	0.47	0.82
	Q9a.	向左移位後的角比較	0.59	0.58
	Q9b.	為什麼	0.43	0.76
	Q10.	角度估測	0.31	0.28
	Q15.	繪製角	0.22	0.32

許慧玉、姚辰豫、張芸夢、Sigal Klein、Roza Leikin（2024）。
國中八年級學生在數學創造力問題表現之分析。
臺灣數學教育期刊，11（2），59–80。
doi: 10.6278/tjme.202410_11(2).003

國中八年級學生在數學創造力問題表現之分析

許慧玉 [1]　姚辰豫 [2]　張芸夢 [3]　Sigal Klein [4]　Roza Leikin [4]

[1] 國立清華大學數理教育研究所
[2] 國立清華大學教育心理與諮商學系
[3] 新竹縣立湖口高級中學
[4] Department of Mathematics Education, RANGE Center－University of Haifa

本研究主要目的是以調查研究法瞭解臺灣學生數學創造力的表現。研究以 Leikin 所發展的測驗工具瞭解臺灣學生創造力的表現，並以數學成就測驗 SAT-M 將學生區分為高、中、低三群，探究數學成就是否影響數學創造力表現，最後，探究數學創造力與一般創造力是否存在關聯性。研究樣本為新竹地區三所國中共 313 位八年級學生。研究結果包括：（1）八年級學生在四題數學創造力問題流暢性、靈活性、獨創性、和創造力面向的表現均呈現顯著差異。其中，距離問題在流暢性、靈活性、獨創性和創造力表現最佳。而果醬問題則在流暢性、靈活性、獨創性和創造力表現最差。進一步將四題數學創造力問題區分為幾何和代數，分析顯示學生在流暢性、靈活性、獨創性、創造力，幾何均顯著高於代數。（2）不同數學成就的學生在流暢性、靈活性、獨創性、創造力等部分皆達顯著性差異，此現象顯示學生的數學成就影響其數學創造力表現。（3）八年級學生的數學創造力與一般創造力表現呈現顯著低相關。若以數學成就作為調節變項，排除此變項的影響，再進行皮爾森偏相關性分析，結果顯示：學生的數學創造力與一般創造力表現則未達顯著性相關。此研究結果顯示數學創造力的發展獨立於一般創造力之外。文章最後，本文提出未來數學創造力研究和教學實務的討論與建議。

關鍵字：多元解題任務、流暢性、數學創造力、獨創性、靈活性

通訊作者：姚辰豫，e-mail：john21997034@gmail.com
收稿：2024 年 4 月 8 日；
接受刊登：2024 年 10 月 11 日。

Hsu, H. Y., Yao, C. Y., Chang, Y. M., Klein, S., & Leikin, R. (2024).
Taiwanese 8th grade students performance on mathematical creativity problems.
Taiwan Journal of Mathematics Education, *11*(2), 59–80.
doi: 10.6278/tjme.202410_11(2).003

Taiwanese 8th Grade Students Performance on Mathematical Creativity Problems

Hui-Yu Hsu [1] Chen-Yu Yao [2] Yun-Meng Chang [3] Sigal Klein [4] Roza Leikin [4]

[1] Graduate Institute of Mathematics and Science Education, National Tsing Hua University
[2] Department of Educational Psychology and Counseling, National Tsing Hua University
[3] Hsinchu County Hukou High School
[4] Department of Mathematics Education, RANGE Center－University of Haifa

In this study, we aimed to examine the mathematical creativity of Taiwanese 8th-grade students using a survey instrument developed by Leikin. The students were categorized into high-, middle-, and low-achievement groups based on the SAT-M test to assess whether mathematical achievement influences performance on mathematical creativity problems. We also explored the relationship between mathematical creativity and general creativity. With a sample of 313 8th-grade students from three middle schools, the analysis revealed the following findings: First, students' performance on the four mathematical creativity problems—assessed in terms of fluency, flexibility, originality, and overall creativity—showed significant differences. Students performed best on the Distance problem and worst on the Jam problem across all creativity dimensions. When the creativity problems were further grouped into geometry and algebra, students performed significantly better on geometry problems than on algebra problems in terms of fluency, flexibility, originality, and creativity. Second, significant differences in fluency, flexibility, originality, and creativity were found among students in the high-, middle-, and low-achievement groups, indicating a consistent relationship between mathematical achievement and mathematical creativity. Third, there was a significant but low correlation between mathematical creativity and general creativity. However, partial correlation analysis, using mathematical achievement as a moderator variable, showed no significant correlation, suggesting that the two variables are independent of each other. The study concludes with discussions and implications for future research and instructional practices.

Keyword: multiple solution tasks, fluency, mathematics creativity, originality, flexibility

Corresponding author：Chen-Yu Yao，e-mail：john21997034@gmail.com
Received：8 April 2024;
Accepted：11 October 2024.

壹、緒論

創造力是國家進步、創新的根本。不同領域學者均將創造力當成重要研究議題，寄望能更瞭解創造力的本質，並有效發展學生創造力思維。如：心理學與教育領域學者試圖發展學生創造力思考的根本理論、認知特徵以及對應的教學策略。Leikin與Pitta-Pantazi（2013）也指出，相較於其他研究主題（如：智力），創造力的實證研究相對的少，尤其是數學創造力（Mathematical creativity）為主的教師教學與學生學習研究成果。對此，Sternberg與Lubart（1996）疾呼應有更多學者投入創造力相關議題的研究，以瞭解創造力的構念、創造力的發展、及創造力與其他構念之間的關連性及交互作用。不同領域關注創造力研究面向也不盡相同。如心理學關注創造力思維的心智表徵和歷程（Sternberg & Lubart, 1996），並根據創造力的認知特徵來架構評量量表（彭淑玲等人，2015；劉宣谷，2015；Haylock, 1987）。對數學教育來說，近一、二十年來，已經有越來越多學者關注於此研究議題，數學創造力的教學與學生認知特徵已經成為數學教育研究主要研究範疇之一（Kattou et al., 2013; Leikin & Pitta-Pantazi, 2013）。

Silver（1997）指出過去與現代對於數學創造力的看法具差異性：過往認為數學創造力是指個人聰慧、隨機、無法預期的特殊表現。此觀點顯示數學創造力與一般性創造力（domain-general creativity）並無差異，數學創造力被視為個人的一項天賦，非藉由後天教育而養成。而新的研究觀點則是認為數學創造力應該架基在數學學科領域範圍內，強調學科知識的連結以及創意思維意向的培養，此則與特定領域創造力（domain-specific creativity）的觀點不謀而合。因此，數學創造力是可被教的，且教學重點應該放在培養學生主動創意思考的能力。更重要的是，數學創造力的教學應普及化到不同能力學生，並非僅是針對特殊天賦的學生而已。據此，Silver（1997）進一步提出數學探究導向教學（inquiry-oriented mathematics instruction），並強調其能夠激發學生的數學創造力，尤其是多元數學解題和數學擬題的教學策略。所謂的數學探究導向教學其意旨師生之間共同參與數學問題的形成和多元解題的各階段歷程。

臺灣的教育環境和文化背景對數學教學具有其獨特的影響。國中階段的數學教學經常被描述為偏向教師中心的教學模式（Hsu et al., 2023），以及由考試導向的教學方式所主導（Yang et al., 2022），這可能限制了學生數學創造力的發展。然而，臺灣課程標準從82年開始便提倡多元解題教學，期望透過教師精心設計的問題，引導學生進行不同解法的探索（教育部，1993）。特別是在近年的課程改革中，108課綱明確強調培養學生的創新應變能力與數學素養，鼓勵學習者主動選擇適當的學習策略，並強化其系統性思考與問題解決的能力（教育部，2018）。這些政策的推行與實施，反映出臺灣教育對創造力培育的重視。但是，實際教學中教師中心的模式與考試壓力仍然普遍存在，這可能影響了課程改革的初衷。因此，在這樣複雜的教學脈絡下，臺灣學生數學創造力的表現及其發展受到哪些因素影響，仍然值得深入探討與研究。

本研究主要目的是探討臺灣國中八年級學生的數學創造力，藉由 Leikin 研究團隊（Leikin, 2009, 2013; Levav-Waynberg & Leikin, 2012）的多元解題任務瞭解創造力表現。數學多元解題的定義為同一數學任務下，解題策略涉及不同表徵數學概念、特定領域中數學物件的不同性質（定義或定理）或不同領域中數學物件的不同性質。其中，依據 Leikin（2009, 2013）發展的評量工具，本研究將檢視臺灣八年級學生在創造力子面向的表現，包括流暢性、靈活性和獨創性。

另外，由於數學創造力與數學成就之間的關係也一直是文獻的探討重點（Bicer et al., 2021; Hamid & Kamarudin, 2021）。如 Bicer 等人（2021）針對數學成就和創造力的關係以 1965 年到 2018 年的實徵研究進行系統性後設分析。分析發現數學成就和一般創造力呈現中度顯著相關，而數學成就與數學創造力的顯著相關性更高。因此，數學創造力與數學成就的關連性也列為本研究目標之一。甚者，研究上一般性創造力和特定領域創造力的關連性倍具爭議，尤其是一般性的創造力與數學創造力之間的關係仍未有清楚定論。如 Kaufman 與 Baer（2004）由學生自我評量結果指出，唯一與一般性創造力無顯著關係的學科是數學領域。因此，本研究將進一步探究臺灣國中生的一般創造力和數學創造力表現之間的關連性。據此，本研究問題包括：

一、八年級學生在數學創造力測驗表現為何？

二、八年級不同數學成就的學生，其數學創造力表現是否有差異？

三、八年級學生的數學創造力和一般創造力表現相關性為何？

貳、文獻探討

一、創造力

創造力定義非常多元，不同學者與不同領域對於創造力有不同的見解。Mann（2006）就指出當代創造力的定義超過 100 種。高等教育將創造力視為一種綜合能力，如原創想法的產生、以結果為導向的方法、解決問題的能力、思維的原創性、對新經驗的開放性以及對不確定性的容忍度（Matraeva et al., 2020）。重點是培養學生在現實複雜脈絡下，具備彈性及創新思維的技能。而基礎教育則關注環境條件如何有助於或侷限學生創造力潛力的發展，其強調外在因素與個人創造力之間複雜的相互作用（Khotinets & Shishova, 2023）。

Mumford 等人（1991）則認為創造力應該包含四個重要的前提。第一、創造力的問題解決應像其他問題解決一樣，必須是以知識和訊息為基礎的。第二、一個人是無法只藉由現存的知識來創造出新的想法。第三、知識必須重新結合和重新組織以產生新的知識，此是用來建構新穎的想法。第四、這些新的想法必須被評估和調整成可見的規劃，用來引導創新計畫的相關工作。這樣的工作通常需要一段時間。Baughman 與 Mumford（1995）則認為類比推理策略是有效執行概念整合歷程的創造力重要策略。Mumford 等人（2013）進一

步認為創造力的根本是針對複雜、新穎、未定義問題之下，能提出高品質、原創的、優雅的解法。因此，他們定義創造力為涉及複雜認知歷程的問題解決，而其講求有效、高品質的執行力。Mumford 等人（2013）對創造力的定義可以解釋早期各種不同創造力的研究範疇（如：資賦優異學生創造力表現的特徵）。創造力的研究也傾向去辨識出哪些能力是個人能在問題解決上表現出創造力的基礎。

研究者一直對一般性創造力和特定領域創造力有不同的觀點。一般性創造力認為創造力是獨立於特定領域之外的上層能力；而特定領域創造力則強調創造力與專業領域的密切關係。Silvia 等人（2009）就認為創造性的子構念是決定創造力是一般性創造力還是特定領域創造力的重要關鍵。Baer（2012）則提出創造力是特定領域的。因此一般個人特質或能力（如：智力）對創造性的表現影響力是很小的。另一方面，Chen 等人（2006）則是由實徵資料證實了一般創造力的存在。Plucker 與 Beghetto（2004）則提出創造力的一般性和具體性的雙重性，強調了創造力與過程之間的關係。研究也嘗試瞭解數學創造力與一般創造力的關係是否受到其他混淆變項的影響，並嘗試以不同統計分析方法來瞭解兩者之間的關連性，如：偏相關分析（Bicer et al., 2021）。這種觀點表明，雖然創造力可能具有特定領域的成分，但研究表明與創造力相關的一般和特定認知過程的混合。

而在神經科學領域，創造力的神經機制的研究引起了人們的廣泛關注。Boccia 等人（2015）利用神經影像技術來識別與創造力相關的神經網絡，揭示了創造力的多樣性以及與不同創意領域相關的特定大腦區域。這項研究強調了一般和特定創造性任務背後的複雜神經過程。此外，Beaty 等人（2016）研究了創造性認知中的大腦網路動態，檢視了與一般（例如發散性思考）和特定（例如音樂即興創作）創造性過程相關的證據。這項研究探討了支持各領域創造力的神經認知機制，強調一般認知過程和特定創造性任務之間的相互作用。

由上述文獻探討可以看出創造力定義及關注面向的多元化，且一般創造力與特定領域創造力之間研究結果的歧異，但問題解決及獨創性是所有文獻的交集。下面文獻進一步探討數學創造力相關文獻。

二、數學創造力

因為創造力定義的多元化，數學創造力的定義也深受影響，呈現多元發展的現象。大方向來說，數學創造力的定義是延伸一般創造力的概念而來，其指在數學學習中能夠提出新的數學想法、技術或策略，以解決數學問題的能力。Vygotsky（1939）認為數學創造力是發展新的數學知識的重要機制之一，它主要涉及符號、規則或模式的生成。Spraker（1960）將數學創造力定義為對數學問題產生原始和適用的解決方案的能力。Romey（1970）認為數學創造力是數學思想、技術或新方法的結合。Laycock（1970）提出數學創造力是指從不同角度分析問題並選擇適當方法處理不尋常的數學情況的能力。Ervynck（2002）認為數學創造力是對有用的數學概念的綜合，或從不同的數學角度發現未知的關係，還認為它對數學知識的發展起著重要作用。Chamberlin 與 Moon（2005）將學生的數學創造力定義為產生

新穎實用的解決方案，並使用數學方法解決虛擬或現實世界的應用問題的能力。儘管不同的學者對於數學創造力的定義和內容有所不同，但都認為數學創造力是一種複合型能力，包括了創造新的數學知識、靈活解決數學問題等多個方面。

從產物的特性來看，Kwon 等人（2006）指出數學創造力的兩個主要組成部分：創造新知識的能力和靈活解決問題的能力，研究表明解決開放式問題對提高學生的創造性思維能力很有幫助。Chiu（2009）將數學創造力與學生解決非常規問題和處理結構不合理問題的能力聯繫起來。Leikin（2013）認為，創造力和收斂性思維之間的聯繫體現在洞察力因素上，因為它是基於洞察力來產生解決數學問題的可能性。創造力與發散性思維之間的理論聯繫體現在模型的多重性部分，它是基於以多種方式解決數學問題的明確要求。因此，以往的研究基於創造力的實用性，將其與心理測量方法相結合（Levav-Waynberg & Leikin, 2012）。

此外，Torrance（1966）提出創造力必須具備四個要素：流暢性、靈活性、獨創性和闡述性，Hollands（1972）用創造力的概念重新定義了數學創造力中這四個要素的含義。流暢性是指在短時間內產生許多數學想法的能力，思維的流暢性有助於提高處理數學問題。靈活性指的是使用不同數學方法的能力，思維的靈活性有助於使用不同數學策略進行解題。獨創性指的是提出獨特數學方法的能力，發現不容易找到的解決方案。闡述性指的是延伸或調整所得到數學結果的能力。但是依據 Torrance 發展出來的創造力測驗可能會因量化緣故而窄化創造力的面向（Sternberg & Lubart, 1991），因此 Silver（1997）進一步建議通過解決問題來發展數學創造力。要發展數學創造力，必須促進三個組成部分：流暢性、靈活性和獨創性。流暢性是通過提出多種數學思想、用多種解決方案解決數學問題（如果存在的話）以及探索數學中的各種情況來發展。靈活性是通過在已經產生了至少一個解決方案的情況下，推進產生新的數學解決方案來發展的。獨創性是通過探索一個數學問題的多種解決方案並產生一個全新的答案來發展的，這意味著當一個人在已知的解決方案之外成功產生一個新的解決方案時，獨創性就可以得到發展。

從創造過程的來看，Hadamard（1945）與 Poincaré（1914）強調了數學的創造過程和創造性思維所涉及的認知能力，他們在討論數學中的創造性過程時採用了格式塔模型（gestalt model），該模型認為創造性過程的四個階段都存在於數學的問題解決過程中。創造者首先經歷「準備」階段，他們對數學問題進行全面的分析和討論，並從過去的經驗中尋找與問題相關的知識。如果他們過去的經驗沒有提供問題的正確答案，他們就會進入「醞釀」階段，若問題的答案或證明方法出乎意料地突然出現，則是進入「頓悟」階段，最後是將頓悟的結果嚴格加以證明，使其過程精確化，此階段為「整理」階段。

針對數學創造力的實徵研究，Kaufman 與 Baer（2004）從 241 位學生的自我評估報告中，探討一般性創造力與特定領域創造力，包括數學創造力的關連性。研究分析發現一般創造力與特殊領域創造力是有相關性的。當學生認為自己具備一般創造力時，他們通常也會認為自己在特定的領域也具備創造力。但有趣的是 Kaufman 與 Baer（2004）發現唯一與一般創造力無顯著關連性的學科是數學。Meier 等人（2023）則發現數學專家在數學創造力任務的表現高於其他人，此研究結果顯示數學領域知識對數學創造力的影響。Leikin 與

Sriraman（2022）由實徵文獻資料的回顧，點出目前數學創造力在數學和數學教育已經開始蓬勃發展。他們回顧過去 10 年來有關數學創造力的研究，發現有 49 篇實徵研究的文章。回顧文章中指出有 18 個實徵研究探討數學創造力和其他特徵（如：數學資優、數學專家）之間的關係。大約一半的實徵研究重點放在教學、試題與創造力之間的關係。6 篇文章則是關注教師對於創造力能力的概念及教學能力。在 ZDM 數學創造力專刊中，也介紹了新的創造力的理論。如：Sriraman（2022）證實不確定性是數學家發明數學的重要根本。Haavold 與 Sriraman（2022）也發現數學創造力重要的根本能力「洞察力」有兩種不同的類別：有意識分析思考後結果的洞察力（insight as consequence of conscious analytic thinking）和困境中無意識歷程結果的洞察力（insight as result of unconscious processes linked to an impasse）。

臺灣數學創造力研究，早期多聚焦於數學創造力的概念、測量與發展。近年來，研究者開始探討數學創造力與其他因素的關係，例如數學成就、一般創造力、教學策略等，學者們從不同面向探討臺灣學生的數學創造力表現。陳嘉皇（2005）指出，數學遊戲可以促進學生的數學創造力。數學遊戲可以讓學生在愉快的氛圍中學習數學，激發學生的數學興趣與好奇心，並培養學生的數學思維能力。陳李綢（2006）發展國小數學創造力診斷與認知歷程工具，採用問卷與訪談的方式，認為數學創造力需要透過多元的測量方式進行評估。吳昭容與陳如珍（2008）透過擬題看三年級學童的數學創造力，數學創造力是學童數學學習的重要指標，教師應重視學童數學創造力的培養。彭淑玲等人（2015）回顧了數學創造力測量工具的發展歷程。早期學者多以一般創造力測驗衡量數學創造力，但由於數學創造力具有其獨特性，因此後來學者開始發展專門的數學創造力測驗。目前數學創造力測量工具的發展仍面臨一些挑戰，例如缺乏具備效度與信度的測驗工具，以及難以兼顧不同數學領域與創造力特質的測量。劉宣谷（2015）針對臺灣數學教育期刊的論文進行文獻回顧，發現臺灣學生的數學創造力表現普遍不高。研究顯示，影響數學創造力的因素包括個體因素與環境因素。個體因素包括智力、創造力、學習動機等；環境因素包括教學方法、家庭環境等。

對數學創造力的定義可以從許多面向去探討，無論是透過何種方法進行測量，重要的是培養數學創造力需要為學生提供合適的教學工具和學習環境，讓學生在較長的時間內進行深入而靈活的數學思考，發展出一題多解的能力才是關鍵。本研究與過去相關文獻有所不同。相較於過去以一般創造力測驗來衡量數學創造力，本研究選擇使用了 Leikin 研究團隊開發的專門測量數學創造力的測驗，這使得我們能夠更準確地評估學生在數學領域的創造力表現。此外，本研究將數學成就作為調節變項，以瞭解數學創造力的表現與數學成就之間的關連性，這將有助於更深入地了解數學創造力的特質及其在不同數學領域中的表現。

參、研究方法

一、研究工具

本研究使用的研究工具有兩個，包括創造力測驗和數學成就測驗。

（一）創造力測驗

本研究使用的創造力測驗包括一般創造力與數學創造力測驗，是由 Leikin 研究團隊依據 Torrance（1966）創造力理論及 Silver（1997）的多元解題觀點所發展（Leikin, 2009, 2013; Levav-Waynberg & Leikin, 2012）。因此，一般創造力與數學創造力具備理論建構效度。一般創造力和數學創造力測驗要求學生提出各種不同的解題策略，研究者再針對學生的解提策略進行評估。就信度方面，首先研究者從數學課程內容出發，確認學生具備數學創造力測驗多元解題的先備知識。其次，兩份測驗均進行了預試，確認學生瞭解測驗目的，知道如何提出各種不同的解題策略。預試對象為新竹地區八年級國中生 100 人，以確認兩份測驗實施的可行性和瞭解學生進行解題所需時間。研究者並根據實際學生預試回答，調整測驗題目的中文敘述。數學創造力測驗 Cronbach’s Alpha 為 0.75，顯示具有可接受的內部一致性，能評估學生的數學創造力的表現。由於一般創造力測驗只有一題，無法進行信度分析，因此我們使用了專家效度來評估該測驗的可靠性，為確保一般創造力測驗的內容有效性，我們邀請了三位專家進行評估。其中，包括兩位大學數學教育領域教授和一位具多年中學數學階段教學實務經驗的教育工作者。專家們根據測驗項目的相關性、重要性和清晰度進行了評估。專家反饋顯示，測驗項目符合預期的內容要求，但也提出了一些改進建議。我們根據專家的建議對測驗項目進行了適當的調整，以提高測驗的內容有效性。專家效度的評估結果證實了測驗在測量一般創造力方面的有效性。

數學創造力包含四個題目；而一般創造力包含一個題目。其中數學創造力的兩個題目是幾何（矩形問題和距離問題）；另兩題為代數問題（果醬問題和票卷問題）。數學創造力包含兩題幾何和兩題代數主要是想進一步瞭解是否不同數學內容會影響八年級學生數學創造力的表現。以下為數學創造力代數問題（果醬）範例：

> Anat 製作果醬，她使用大果醬罐運送至商店。她分配 80 公升的果醬在相同的罐子中後，決定節省 4 個罐子並平均分配那 4 個罐子的果醬在剩下的罐子裡。她知道每罐果醬的量會比原先增加 $\frac{1}{4}$，請問一開始她準備了多少果醬罐？盡可能使用很多不同的方式解決這個問題。

數學創造力的其餘三題中，矩形問題主要是跟矩形周長和面積相關的問題；距離問題是關於兩點之間距離判斷的可能性；票卷問題則是票卷價格和人數的應用問題。測驗中的數學創造力題目皆可從不同數學面向來形成解題策略。如：上述果醬問題此題本身只有一

個正確解答，但學生可以用非常多種不同的代數表徵將情境列式，亦可以畫示意圖或依照邏輯推理敘述出想法找出答案。

一般創造力問題設計與數學創造力同構。意旨一般創造力題目提供一個虛擬開放情境，詢問學生在該情境中，達成目標並解決問題的多元想法。其學生多元答題表現可以流暢性、靈活性、獨創性和創造力等面向分別來檢測。

（二）數學成就測驗

數學成就測驗則是採用縮減版的 SAT-M 測驗（Scholastic Assessment Test-Mathematics）來評量學生的數學學科表現（Leikin & Lev, 2013; Paz-Baruch et al., 2014）。SAT-M 可以用來瞭解學生對於學校教學的基本數學概念的理解，縮減版的 SAT-M 共有 35 題數學問題（題目範例如圖 1）。測驗信度檢測則包含確認學生是否具備簡短版 SAT-M 數學解題的先備知識，並實際進行預試。預試對象包括新竹地區八年級 100 位國中生。預試目的是確認學生能瞭解題目敘述和解題所需時間。研究者並根據預試學生的回答，進行試題中文敘述的微調。該測驗 Cronbach’s Alpha 為 0.68，數據顯示具有尚可的內部一致性，能評估學生的數學成就測驗表現。

圖 1
SAT-M 試題範例

11.　定義 $n! = n(n-1)(n-2)(n-3)...3\cdot 2\cdot 1$。計算 $\dfrac{(6!)(4!)}{(5!)(3!)}=$

(1) $\dfrac{8}{5}$　(2) 24　(3) $\dfrac{5}{4}$　(4) 10　(5) 1152

二、評分方式

（一）創造力測驗

Leikin（2013）從解題多樣性和洞察力的重要性來提出數學創造力的評量架構。Leikin 認為目前文獻常用的各子向度直接加總的評分方式雖然可從總分瞭解學生數學創造力的高低。但此評分方式無法瞭解創造力思維的特殊性（如：獨創性）。為了解決這些問題，Leikin 提出包含流暢性、靈活性、獨創性和創造力的新的評量架構。

1. 流暢性

流暢性（fluency）是指在解決問題時產生的適當解法的數量，因為它反映了解決問題的速度以及不同解決方案之間的切換。即使求解者犯了小錯誤，仍有可能導致正確的解決方案。在多元解題中的流暢性是解決方案數量，而在數學情境中的想法還必須符合該領域的規則和定義，並且數學上是正確的，每個解法代表 1 分並將其加總得到流暢性分數。

2. 靈活性

靈活性（flexibility）的評估主要考量學生使用不同的數學策略或性質解決問題的能力。評分方式需要將解題方法分類，以評估學生在解題時展現的靈活性。如果兩個解決方案使用基於不同表示、性質（定理、定義或輔助構造）或數學分支的解決策略，則它們屬於不同的解決方案。在同一解題類別中，第一個解法可以獲得 10 分。如果在該類別中出現第二個解法，且該解法與第一種解法有明顯的但較小的區別，則可以獲得 1 分。若學生使用不同的代數方法解決同一問題，但第二個或之後的解法與前面的解法幾乎相同，則獲得 0.1 分。將每個解法轉換成分數後相加，即可獲得該創造性問題靈活性的得分。此給分方式可以凸顯學生靈活轉換數學思維的比重。

3. 獨創性

獨創性（originality）考量相對和絕對兩個面向。相對評估是針對相似教育背景的學生群體解題策略的傳統性進行量測。據此，其計算方式是在該群體中產生特定解決方案的學生百分比（P），比較個人解題策略與參考群體的解題策略。絕對評估則基於解題策略涉及的洞察力程度進行量測。主要是凸顯非經由課程學習而得的獨創解題策略的重要性。意旨即使在參考學生群體中只有一名學生產生了該解題策略，洞察力的創新性反映了此學生具備收斂推理的重要能力。和靈活性相同，獨創性的評估採用十進制系統，得分標準如下：

（1）若 $P < 15\%$ 或該解法使用了根據數學洞察力（mathematical insight）的非常規（non-routine）解法，則該解題策略得分為 10 分。

（2）若 $15\% \le P < 40\%$ 或該解法是應用非常規情況的常規解決方案，則該解題策略得分為 1 分。

（3）若 $P \ge 40\%$ 或該解法是根據代數基礎的常規解法，則該解題策略獨創性得分為 0.1 分。

依據上述三個得分標準，每個解題策略均能轉換成分數，並加總得到獨創性的總分。而十進制的計分方式，可以凸顯靈活性和獨創性的解題思維，並瞭解學生的解題歷程。如：靈活性總分為 21.3 分時，可知該解題策略包含 2 個不同類型的解法，還有 1 個與前面解法相似但有區別的解法，以及 3 個與前面幾乎相同的解法。同樣地，若獨創性總分為 21.3 分，可知該解決策略有 2 個低於 15%的學生使用或根據洞察力的非常規解法，還有 1 個 15%至 40%的學生使用或應用非常規情況的常規解法，以及 3 個超過 40%的學生使用或根據基礎數學的常規解法。

4. 創造力

Leikin 定義創造力（creativity）為解題策略分析的靈活性和獨創性的乘積，以彰顯最具有創意的解題策略。對於特定的解法，創造力可以通過靈活性（Flx）和獨創性（Or）的得分來計算 $Cr_i = Flx_i \times Or_i$ ，其中最高分數（ $Cr_k = 10 \times 10 = 100$ ）對應於具有最大靈活性和最高獨創性的解法（Leikin, 2013）。此定義可以避免將原有解題策略想法當成創造力的情況。因

當某解法具有獨創性但與先前執行過的解法相似時，它的 Flx 得分可能是 1 或 0.1，而 Or 得分仍然是 10，這樣 Cr 得分就會是$10\times1=10$或$10\times0.1=1$。同樣地，重複且缺乏獨創性的解法得分只會是 0.1 或 0.01，顯示該解題策略與其他策略之間存在相似性，或者該解題策略只是一些傳統常規解決方案的應用。多元解題任務的數學創造力總分是每個解題策略的創造力得分之和，即 $Cr=\sum_{i=1}^{n}Flx_i\times Or_i$ 。表 1 為創造力的評分方式。

表 1
創造力評估模式

創造力指標	每個解題策略的分數	總分
流暢性（Flu）	1	$Flu = n$
靈活性（Flx）	對於第一個解法：$Flx_1 = 10$ 不同策略的解法：$Flx_i = 10$ 相同策略但表徵不同：$Flx_i = 1$ 相同策略相同表徵：$Flx_i = 0.1$	$Flx=\sum_{i=1}^{n}Flx_i$
獨創性（Or）	不到 15%　的參與者所產生的解題策略：$Or_i = 10$ 15%至 40%：$Or_i = 1$ 40%以上：$Or_i = 0.1$	$Or=\sum_{i=1}^{n}Or_i$
創造力（Cr）	$Cr_i = Flx_i \times Or_i$	$Cr=\sum_{i=1}^{n}Flx_i\times Or_i$

註：本架構引自“Evaluating mathematical creativity: The interplay between multiplicity and insight,” by R. Leikin, 2013, *Psychological Test and Assessment Modeling, 55*(4), p. 394。

（二）數學成就測驗

本研究中所使用的縮減版 SAT-M 測驗總共有 35 題，學生答對一題得分 1 分，答錯得 0 分。總分最高分為 35 分。

三、研究樣本與資料分析

本研究以新竹縣市地區三所國中（H 國中、C 國中、S 國中）的八年級學生為研究對象，研究採用立意抽樣的方式進行取樣，選取不同學生程度的學校。其中，H 國中位於新竹縣較為郊區；C 國中和 S 國中位於新竹市市區。以 109 年會考各校 5A 比例作為學生程度的指標，H 國中 5A 比例為 7.9%，C 國中為 15.7%，S 國中為 18.5%。此會考成績分析顯示 H 國中學生程度較低；而 C 與 S 國中學生程度較高。

研究確認八年級學生均已學習過數學創造力四個題目所需的相關數學知識。創造力測驗與數學成就測驗施測時間共兩節課，以確保學生有充足的時間完成兩個測驗。研究實際施測人數為 335 人，扣除無效樣本（如未能完成兩個測驗），最終有效樣本為 313 人。313 位八年級學生依據數學成就測驗 SAT-M 區分為高數學成就、中數學成就、和低數學成就。

三組學生各佔全部學生的 33%。高數學成就組在 SAT-M 得分範圍為 25−34 分；中數學成就範圍為 17−24 分；低數學成就範圍為 2−16 分。

研究者除了分析八年級學生不同數學成就群組學生的數學創造力在流暢性、靈活性、獨創性和創造力的表現之外，同時也檢測一般創造力和數學創造力在這四個指標的表現與相關性，研究採用單因子變異數分析、Bonferroni 事後檢定、相關分析、及偏相關分析等統計分析方法來回答三個研究問題。

肆、研究結果

一、八年級學生在數學創造力測驗的表現

依據研究問題，首先我們分析八年級學生在四題創造力任務各個面向的表現，結果如表 2 所示。表 2 顯示無論流暢性、靈活性、獨創性和創造力，不同數學創造力題目皆有顯著差異（流暢性：$F(3, 936) = 61.42, p < .001, \eta^2 = .16$；靈活性：$F(3, 936) = 56.87, p < .001, \eta^2 = .15$；獨創性：$F(3, 936) = 15.14, p < .001, \eta^2 = .05$；創造力：$F(3, 936) = 13.16, p < .001, \eta^2 = .04$）。在事後檢定結果顯示，流暢性方面距離問題顯著高於票卷問題（ $p_{bonf} < .001$），票卷問題顯著高於矩形問題（ $p_{bonf} = .001$），矩形問題顯著高於果醬問題（ $p_{bonf} < .001$）；靈活性方面距離問題高於票卷問題但未達顯著差異（ $p_{bonf} = .750$），票卷問題顯著高於矩形問題（ $p_{bonf} < .001$），矩形問題顯著高於果醬問題（ $p_{bonf} < .001$）；獨創性方面距離問題高於票卷問題但未達顯著差異（ $p_{bonf} = .261$），票卷問題高於矩形問題但未達顯著差異（ $p_{bonf} = .950$），矩形問題顯著高於果醬問題（ $p_{bonf} < .001$）；創造力方面距離問題高於票卷問題但未達顯著差異（ $p_{bonf} = .564$），票卷問題高於矩形問題但未達顯著差異（ $p_{bonf} = .966$），矩形問題顯著高於果醬問題（ $p_{bonf} < .001$）；在流暢性、靈活性、獨創性、和創造力面向，距離問題的表現均為最好（流暢性平均 =1.39；靈活性平均 =11.56；獨創性平均 =5.28；創造力平均 =44.10），而果醬的表現均為最差（流暢性平均 =0.71；靈活性平均 =6.73；獨創性平均 =2.70；創造力平均 =23.54）。分析結果顯示學生在進行不同數學任務的創造力表現有顯著差異。

進一步嘗試將四題數學創造力題目區分成幾何類型（矩形和距離題目）和代數類型（果醬和票卷問題）進行分析。如表 3 所示，在流暢性、靈活性、獨創性和創造力都是幾何類型（流暢性平均 = 1.19；靈活性平均 = 10.56；獨創性平均 = 4.93；創造力平均 = 44.02）顯著優於代數類型（流暢性平均 =0.94；靈活性平均 =9.08；獨創性平均 =3.66；創造力平均 = 31.33）。統計檢定的分析結果如下：流暢性：$F(1, 312) = 49.24, p < .001, \eta^2 = .14$；靈活性：$F(1, 312) = 23.76, p < .001, \eta^2 = .07$；獨創性：$F(1, 312) = 19.62, p < .001, \eta^2 = .06$；創造力：$F(1, 312) = 22.44, p < .001, \eta^2 = .07$。結果表明，在進行代數的運算時，八年級學生卻會侷限數學創造力各面向的表現。而面對幾何問題時，學生能有較多創新思維來解決題目。

表 2

四題數學創造力問題的統計分析

面向	平均分數（標準差）				F 值
	矩形	距離	果醬	票卷	
流暢性	0.99 （0.71）	1.39 （1.08）	0.71 （0.63）	1.16 （0.62）	61.42***
	p_{bonf} 距離 >*** 票卷 >** 矩形 >*** 果醬				
靈活性	9.55 （6.31）	11.56 （8.09）	6.73 （5.43）	11.43 （5.84）	56.87***
	p_{bonf} 距離 > 票卷 >*** 矩形 >*** 果醬				
獨創性	4.59 （6.16）	5.28 （6.20）	2.70 （4.80）	4.61 （5.36）	15.14***
	p_{bonf} 距離 > 票卷 > 矩形 >*** 果醬				
創造力	43.94 （56.19）	44.10 （53.60）	23.54 （41.45）	39.12 （55.77）	13.16***
	p_{bonf} 距離 > 票卷 > 矩形 >*** 果醬				

*p < .05. **p < .01. ***p < .001.

表 3

幾何和代數創造力題目統計分析

面向	平均分數（標準差）		F 值
	幾何	代數	
流暢性	1.19 （0.75）	0.94 （0.50）	49.24***
靈活性	10.56 （6.05）	9.08 （4.50）	23.78***
獨創性	4.93 （4.81）	3.66 （3.95）	19.62***
創造力	44.02 （42.11）	31.33 （37.68）	22.44***

*p < .05. **p < .01. ***p < .001.

二、不同數學成就學生在數學創造力表現之差異比較

研究進一步分析高成就組、中成就組和低成就組的數學創造力表現。如表 4、表 5 所示，在流暢性上，題目類型和數學成就分組有交互作用，簡單主要效果檢定結果顯示，在幾何類型（$F(2, 310) = 65.54, p < .001, \eta^2 = .30$）和代數類型（$F(2, 310) = 44.51, p < .001, \eta^2 = .22$）數學成就分組都有顯著差異。在靈活性上，題目類型和數學成就分組有交互作用，簡單主要效果檢定結果顯示，在幾何類型（$F(2, 310) = 68.30, p < .001, \eta^2 = .31$）和代數類型（$F(2, 310) = 41.65, p < .001, \eta^2 = .21$）數學成就分組都有顯著差異。在獨創性（$F(2, 310) = 38.21, p < .001, \eta^2 = .13$）和創造力（$F(2, 310) = 33.88, p < .001, \eta^2 = .11$）在數學成就分組都

有顯著差異。結果顯示三組學生在流暢性、靈活性、獨創性、創造力均有顯著差異。其代表數學成就分組與數學創造力表現的一致性。八年級學生數學成就越高；數學創造力表現也越好。

表 4
高、中、低數學成就學生在數學創造力測驗各面向描述統計結果

面向	類型	平均分數（標準差）					
		低分組		中分組		高分組	
流暢性	幾何	0.68	（0.58）	1.31	（0.66）	1.65	（0.66）
	代數	0.65	（0.41）	0.97	（0.40）	1.22	（0.51）
靈活性	幾何	6.37	（5.09）	11.50	（5.07）	14.29	（5.00）
	代數	6.50	（4.11）	9.61	（3.79）	11.43	（4.09）
獨創性	幾何	2.76	（3.45）	5.37	（5.26）	6.93	（4.70）
	代數	1.93	（2.36）	3.87	（3.41）	5.36	（4.95）
創造力	幾何	25.72	（33.02）	47.22	（44.37）	61.22	（41.18）
	代數	16.10	（24.25）	34.00	（33.06）	45.64	（47.02）

表 5
高、中、低數學成就學生在數學創造力測驗各面向統計檢定結果

面向	類型	數學成就分組		題目類型		交互作用	
		F 值	η^2	*F* 值	η^2	*F* 值	η^2
流暢性	幾何 代數	81.29***	0.25	56.37***	0.04	12.15***	0.02
靈活性	幾何 代數	81.77***	0.25	27.14***	0.02	9.31***	0.01
獨創性	幾何 代數	38.21***	0.13	20.09***	0.02	0.68	0.00
創造力	幾何 代數	33.88***	0.11	22.69***	0.03	0.43	0.00

$^{*}p < .05$. $^{**}p < .01$. $^{***}p < .001$.

進一步進行事後檢定數學成就分組，如表 6 所示，分析結果發現，學生在流暢性、靈活性、獨創性和創造力方面，這些指標則因數學成就組別和數學類型而有所不同。在流暢性方面，雖然三組都是幾何類型高於代數類型，但只有中分組和高分組有顯著差異（低：$p_{bonf} = 1.000$，中：$p_{bonf} < .001$，高：$p_{bonf} < .001$）。在靈活性方面，低分組代數類型比幾何類型好，而中、高分組則是幾何類型顯著高於代數類型（低：$p_{bonf} = 1.000$，中：$p_{bonf} = .006$，高：$p_{bonf} < .001$）。在獨創性方面，只有高分組幾何類型顯著高於代數類型（低：$p_{bonf} = 1.000$，中：$p_{bonf} = .060$，高：$p_{bonf} = .033$）。在創造力方面，雖然三組都是幾何類型高於代數類型，

但只有中分組和高分組有顯著差異（低：$p_{bonf} = .117$，中：$p_{bonf} = .037$，高：$p_{bonf} = .007$）。由此可知，在低分組別創造力幾何類型和代數類型流暢性、靈活性、獨創性、創造力是沒有顯著差異的；反觀在高分組，幾何類型和代數類型在流暢性、靈活性、獨創性、創造力有顯著差異的。可以顯示在進行創造力的測驗，低分組學生對於代數類型和幾何類型的創造力表現沒有差異，而高分組有差異。

表 6

事後檢定−SAT-M 分組

事後檢定	低分組	中分組	高分組
流暢性	幾何 > 代數	幾何 $>^{***}$ 代數	幾何 $>^{***}$ 代數
靈活性	代數 > 幾何	幾何 $>^{**}$ 代數	幾何 $>^{***}$ 代數
獨創性	幾何 > 代數	幾何 > 代數	幾何 $>^{*}$ 代數
創造力	幾何 > 代數	幾何 $>^{*}$ 代數	幾何 $>^{**}$ 代數

$^{*}p < .05$. $^{**}p < .01$. $^{***}p < .001$.

而在事後檢定不同數學題目類型方面，如表 7 所示，在流暢性方面，幾何類型和代數類型都是高分組顯著優於中分組（幾何類型：$p_{bonf} < .001$，代數類型：$p_{bonf} = .027$），中分組顯著優於低分組（幾何類型：$p_{bonf} < .001$，代數類型：$p_{bonf} < .001$）；在靈活性方面，高分組和中分組幾何類型有顯著差異，代數類型沒有顯著差異（幾何類型：$p_{bonf} < .001$，代數類型：$p_{bonf} = .076$），而幾何類型和代數類型中分組都顯著優於低分組（幾何類型：$p_{bonf} < .001$，代數類型：$p_{bonf} < .001$）；在獨創性方面，幾何類型和代數類型高分組和中分組沒有顯著差異（幾何類型：$p_{bonf} = .114$，代數類型：$p_{bonf} = .159$），而中分組和低分組有顯著差異（幾何類型：$p_{bonf} < .001$，代數類型：$p_{bonf} = .010$）；在創造力方面，幾何類型和代數類型高分組和中分組沒有顯著差異（幾何類型：$p_{bonf} = .132$，代數類型：$p_{bonf} = .438$），而中分組和低分組有顯著差異（幾何類型：$p_{bonf} < .001$，代數類型：$p_{bonf} = .009$）。這些結果表明，學生的數學成就水平對不同類型的數學問題的處理能力有影響，同時，高成就組的學生在數學創造力方面表現更好。

表 7

事後檢定−數學題目類型

事後檢定	低分組	中分組
流暢性	高 $>^{***}$ 中 $>^{***}$ 低	高 $>^{*}$ 中 $>^{***}$ 低
靈活性	高 $>^{***}$ 中 $>^{***}$ 低	高 > 中 $>^{***}$ 低
獨創性	高 > 中 $>^{***}$ 低	高 > 中 $>^{*}$ 低
創造力	高 > 中 $>^{***}$ 低	高 > 中 $>^{**}$ 低

$^{*}p < .05$. $^{**}p < .01$. $^{***}p < .001$.

三、八年級學生數學創造力和一般創造力表現之相關性分析

本研究進一步分析八年級學生在數學創造力和一般創造力的表現。研究分析數學創造力和一般創造力的相關，以及它們是否受到數學成就測驗 SAT-M 表現的影響。統計結果如表 8，分析結果為數學創造力和一般創造力之間在流暢性的皮爾森相關係數為 0.34（$p < .001$）；在靈活性的皮爾森相關係數為 0.26（$p < .001$）；在獨創性的皮爾森相關係數為 0.19（$p < .001$）；在創造力的皮爾森相關係數為 0.15（$p = .008$）。顯示數學創造力和一般創造力流暢性為中度顯著相關，而靈活性、獨創性、創造力為低度顯著相關（Cohen, 1998）。

然而，當將數學成就測驗 SAT-M 當成調節變項，進行偏相關分析後，統計結果如表 8，顯示數學創造力和一般創造力的相關係數均降低。流暢性的皮爾森相關係數為 0.24（$p < .001$）；在靈活性的皮爾森相關係數為 0.17（$p < .001$）；在獨創性的皮爾森相關係數為 0.10（$p = .068$）；在創造力的皮爾森相關係數為 0.06（$p = .310$）。雖然一般創造力和數學創造力在流暢性和靈活性達到顯著的低度相關（Cohen, 1998），但獨創性和創造力卻是未達顯著相關。分析結果指出在控制數學成就測驗 SAT-M 之下，八年級學生一般創造力表現和數學創造力是無關連性存在的。

表 8
數學創造力與一般創造力相關係數表

皮爾森相關係數	數學創造力與一般創造力	數學成就測驗 SAT-M 調節後
流暢性	0.335^{***}	0.236^{***}
靈活性	0.261^{***}	0.172^{***}
獨創性	0.193^{***}	0.103
創造力	0.150^{*}	0.058

$^{*}p < .05$. $^{**}p < .01$. $^{***}p < .001$.

伍、討論與建議

本研究主要目標是探究臺灣八年級學生數學創造力的表現。研究採用 Leikin 團隊發展的創造力測驗進行施測。依據三個提出的研究問題以及立意取樣的學生樣本，分析結果為，第一、從分析四題數學創造力的結果顯示，無論是流暢性、靈活性、獨創性和創造力，學生在不同數學問題表現均達顯著差異。其表示八年級學生數學創造力表現是由試題內容所決定的。細看各題表現，距離問題在流暢性、靈活性、獨創性和創造力的表現最佳。而果醬問題在流暢性、靈活性、獨創性和創造力的表現最差。進一步將數學創造力問題區分為幾何和代數類型分析，發現學生在流暢性、靈活性、獨創性和創造力，幾何的表現均顯著高於代數。雖然本研究只有比較兩題幾何問題和兩題代數問題，此結果顯示八年級學生樣

本在幾何問題上比較有創造思考能力。第二、比較高數學成就、中數學成就、低數學成就三群學生表現，發現三組學生在數學創造力的各個面向均達顯著差異。此分析結果顯示數學成就測驗表現與數學創造力表現一致。數學成就測驗高的，創造力的各面向表現就好。而代數和幾何的比較，高數學成就學生均達顯著差異；中數學成就學生除了獨創性之外，其餘均達顯著差異。低分組學生在流暢性、靈活性、獨創性和創造力均未有顯著差異。第三，學生的數學創造力與一般創造力流暢性為中度顯著相關，而靈活性、獨創性、創造力為低度顯著相關。若將數學成就測驗 SAT-M 當成調節變項，進行偏相關分析後，則學生的數學創造力與一般創造力未達顯著相關。此分析結果指出在排除數學成就之後，八年級學生數學創造力表現與一般創造力表現並無關係存在。

雖未有系統性的跨國比較，我們嘗試將本研究結果與以色列已經發表的結果進行初步比較。比較的根據是果醬問題（Leikin & Kloss, 2011）。研究對象同樣是八年級的情況下，初步比較發現以色列在流暢性分數平均為 0.82 分，略高於臺灣的 0.71 分。靈活性分數平均為 7.39 分，亦略高於臺灣的 6.74 分。但獨創性分數其平均為 1.59 分，略低於臺灣的 2.72 分。而最後創造力分數，臺灣為 23.79 顯著高於以色列平均的 15.89 分。此初步分析顯示臺灣學生的獨創性表現可能優於以色列。但流暢性和靈活性仍有努力的空間。Leikin 與 Lev（2013）認為果醬問題具備看出學生多元解法的數學問題，因為其問題本身涉及國小階段的非代數解題思維和國中階段的代數解題思維。他們進一步分析發現果醬問題可以用來區分一般資賦優異和數學學習優異的解題表現差異，尤其是靈活性面向。而果醬問題乃是臺灣八年級學生在靈活性、獨創性和創造力表現最差的數學問題。因此，雖然初步比較臺灣數學創造力似乎高於以色列，臺灣學生在此類型的數學創造力仍有發展的空間。

從分析本研究臺灣八年級學生樣本在流暢性、靈活性、獨創性和創造力，可得學生具備轉換數學思維找到不同解題策略的能力，且學生數學思維的創新性似乎高於以色列。就臺灣數學課程觀點來看，以「創造」、「創意」、「創新」等詞搜尋十二年國民基本教育課程綱要—數學領域課程手冊（國家教育研究院，2020），搜尋結果得到 12 筆。與數學創造力最為有關的敘述如下：

> 同時期的國民中學數學課程標準則在民國 57 年制訂之後，歷經民國 61 年、72 年、74 年、83 年多次的修訂，其教學目標從數、量、形的基礎內容，逐漸延伸到重視學生的思考、推理與創造能力，並顧及情意面的學習興趣及數學素養。（頁 3）

臺灣數學課程綱要內容點出培養學生思考、推理與創造能力的重要性。但課程綱要並未清楚論述數學創造力的意義與數學課程內容之間的關係。進一步確認課程手冊，發現數學領域課程手冊只有在少部份提到創造力培養的具體作法。如：D-1-1 簡單分類的備註說到「本條目活動中呈現之說明圖表皆出自學生的創意，並非正式表格」（國家教育研究院，2020，頁 68）。其餘課程內容似乎並未能清楚論述數學創造力課程設計的具體做法，及創造力與不同數學內容之間的關連性。若數學創造力是臺灣數學課程發展的方向之一，如何在

課程綱要總述數學創造力的發展方向以及其與各課程內容之間的關連性，以及可能的教學範例，似乎是可以再行探討及努力的方向之一。

Charalambous 等人（2010）在比較臺灣、愛爾蘭、賽普魯斯三個國家國小四年級教科書時，點出臺灣在設計教學範例時，會呈現不同學生思考數學的解題策略，尤其是不同數學思維的解題策略。由此分析結果可以看出臺灣教科書在多元解題上所做的努力。教科書的設計提供臺灣學生從不同數學面向來思考問題，進行解題。現場教師也可能因為教科書多元解題的設計而影響實際與學生的教學活動，進而發展了學生數學創造思維能力。數學課程安排、教科書設計、教學活動及教師與學生的互動如何影響學生數學創造力的發展仍有待後續研究的深入探究。尤其，Silver（1997）認為探究數學導向的教學能夠激發數學創造力，在臺灣國中階段偏向於教師中心的教學模式與考試導向之下，對學生數學創造力的發展與限制實有其研究的重要性。臺灣教育環境和文化特質如何分別影響學生數學的流暢性、靈活性、獨創性和創造力的面向發展，仍需更多研究的投入。另外，Charalambous 等人（2010）的研究是比較國小教科書，臺灣國中教科書如何提供學生多元解題，也有待後續系統性的分析研究。

本研究結果顯示數學成就測驗與數學創造力分群的一致性。本研究的八年級學生樣本數學成就越高，數學創造力的表現越好。Kattou 等人（2013）由國小學生解題表現，提出數學成就與數學創造力呈現正相關。他們進而提出，數學創造力是數學能力的一個子構念。Leikin 與 Lev（2013）亦分析學生的能力水準和他們的數學創造力之間的關係。他們將與創造力相關的問題納入其中，並且檢測了不同能力水準的學生在數學創造力方面的差異以及數學教學對這些學生的影響。在同一篇論文中認為創造性環境也可以被討論，因為學生之間的差異是與其任務相關的。而數學能力通常被認為與數學知識量有關，他們認為數學知識對於數學推理的流暢及靈活是必要的，但在該研究指出，創造力和獨創性擁有高度相關，此發現與 Leikin（2009）的觀點一致，即創造力主要取決於獨創性。檢視不同數學內容發展數學創造力的活動設計、教學策略和學習方法，仍有待更多的研究投入。

確認創造力是一般性能力還是特定領域能力一直是創造力的研究重點之一。本研究結果顯示數學創造力與一般創造力在控制數學成就之下，並無顯著相關。此研究結果與 Kaufman 與 Baer（2004）和 Meier 等人（2023）的研究一致。均強調數學創造力與領域知識的重要關連性。神經科學領域已經證實創造力的多樣性以及與不同創意領域相關的特定大腦區域。數學創造力與一般創造力的大腦區域運作機制的不同性、相同性與互補性，仍須後續研究繼續深入探討。

文獻探討可知創造力的研究已經超過半世紀。數學創造力的研究在近一二十年，對於數學創造力構念、理論、評量架構、不同學習階層學生表現、與其他數學構念關連性（如：一般智力、學習優異）等均已經有豐碩的研究成果。從培養學生創造力能力角度來看，學者提供了數學創造力教學和學習方向的關鍵思維。從臺灣數學課程綱要、教科書設計和教學現場來看，臺灣學生數學創造力的培養似乎還有努力的空間。尤其是數學靈活性思維的轉換能力以及發現新的數學解法的獨創性。

另外，本研究分析結果是架基於 Leikin 所發展的四題數學創造力問題和一題一般創造力問題。從多元解題觀點來探究數學創造力表現可能因為數學問題設計的不同而有所影響，採取不同數學主題（如：統計）問題設計以及其對臺灣學生數學創造力的影響，仍有待後續研究分析討論。

誌謝

本研究執行之經費來源為國科會（計畫編號：110-2511-H-007-002-MY3）。文章內容為作者之個人論述，不代表國科會之意見表達。

參考文獻

吳昭容、陳如珍（2008，10 月 4 日）。**從擬題看三年級學童的數學創造力**（口頭發表論文）。台灣心理學會第 47 屆年會，台北，臺灣。[Wu, C.-J., & Chen, R.-J. (2008, October 4). *Exploring the mathematical creativity of third graders through problem posing* (Paper presentation). 47th Annual Meeting of the Taiwan Psychological Association, Taipei, Taiwan. (in Chinses)]

國家教育研究院（2020）。**十二年國民基本教育課程綱要國民中小學暨普通型高級中等學校－數學領域課程手冊**。作者。[National Academy for Educational Research. (2024). *Curriculum guidelines of 12-year basic education for elementary, junior high schools and general senior high schools–Mathematics domain's curriculum handbook*. Author. (in Chinese)] https://reurl.cc/pvEdyQ

教育部（1993）。**國民中小學課程標準**。作者。[Ministry of Education. (1993). *National primary and secondary school curriculum standards*. Author. (in Chinses)]

教育部（2018）。**十二年國民基本教育課程綱要國民中小學暨普通型高級中等學校－數學領域**。作者。[Ministry of Education. (2018). *Curriculum guidelines of 12-year basic education for elementary, junior high schools and general senior high schools–mathematics*. Author. (in Chinese)] https://cirn.moe.edu.tw/Upload/file/27338/72246.pdf

陳李綢（2006）。國小數學創造力診斷與認知歷程工具研發。**教育心理學報，38**（1），1–17。[Chen, L.-C. (2006). Developing test tools to analyze and diagnose mathematical creativity in elementary students. *Bulletin of Educational Psychology, 38*(1), 1–17. (in Chinese)] https://doi.org/10.6251/BEP.20060503

陳嘉皇（2005）。數學遊戲及其在課堂上的應用。**臺灣數學教師電子期刊，1**，22–29。[Chen, C.-H. (2005). Mathematics games and their application in the classroom. T*aiwan Journal of Mathematics Teachers, 1*, 22–29. (in Chinses)] https://doi.org/10.6610/ETJMT.20050301.04

彭淑玲、陳學志、黃博聖（2015）。當數學遇上創造力：數學創造力測量工具的發展。**創造學刊**，**6**（1），83–107。[Peng, S.-L., Chen, H.-C., & Huang, P.-S. (2015). When mathematics encounters creativity: The development of a measuring tool for mathematical creativity. *Journal of Chinese Creativity, 6*(1), 83–107. (in Chinese)]

劉宣谷（2015）。數學創造力的文獻回顧與探究。**臺灣數學教育期刊**，**2**（1），23–40。[Liu, H.-K. (2015). Survey and discussion of mathematical creativity. *Taiwan Journal of Mathematics Education, 2*(1), 23–40. (in Chinese)] https://doi.org/10.6278/tjme.2050313.002

Baer, J. (2012). Domain specificity and the limits of creativity theory. *The Journal of Creative Behavior, 46*(1), 16–29. https://doi.org/10.1002/jocb.002

Baughman, W. A., & Mumford, M. D. (1995). Process-analytic models of creative capacities: Operations influencing the combination-and-reorganization process. *Creativity Research Journal, 8*(1), 37–62. https://doi.org/10.1207/s15326934crj0801_4

Beaty, R. E., Benedek, M., Silvia, P. J., & Schacter, D. L. (2016). Creative cognition and brain network dynamics. *Trends in Cognitive Sciences, 20*(2), 87–95. https://doi.org/10.1016/j.tics.2015.10.004

Bicer, A., Chamberlin, S., & Perihan, C. (2021). A meta-analysis of the relationship between mathematics achievement and creativity. *The Journal of Creative Behavior, 55*(3), 569–590. https://doi.org/10.1002/jocb.474

Boccia, M., Piccardi, L., Palermo, L., Nori, R., & Palmiero, M. (2015). Where do bright ideas occur in our brain? Meta-analytic evidence from neuroimaging studies of domain-specific creativity. *Frontiers in Psychology, 6*, 1195. https://doi.org/10.3389/fpsyg.2015.01195

Chamberlin, S. A., & Moon, S. M. (2005). Model-eliciting activities as a tool to develop and identify creatively gifted mathematicians. *Journal of Secondary Gifted Education, 17*(1), 37–47. https://doi.org/10.4219/jsge-2005-393

Charalambous, C. Y., Delaney, S., Hsu, H. Y., & Mesa, V. (2010). A comparative analysis of the addition and subtraction of fractions in textbooks from three countries. *Mathematical Thinking and Learning, 12*(2), 117–151. https://doi.org/10.1080/10986060903460070

Chen, C., Himsel, A., Kasof, J., Greenberger, E., & Dmitrieva, J. (2006). Boundless creativity: Evidence for the domain generality of individual differences in creativity. *The Journal of Creative Behavior, 40*(3), 179–199. https://doi.org/10.1002/j.2162-6057.2006.tb01272.x

Chiu, M. S. (2009). Approaches to the teaching of creative and non-creative mathematical problems. *International Journal of Science and Mathematics Education, 7*(1), 55–79. https://doi.org/10.1007/s10763-007-9112-9

Cohen, J. (1988). *Statistical power analysis for the behavioral sciences* (2nd ed.). Routledge. https://doi.org/10.4324/9780203771587

Ervynck, G. (2002). Mathematical creativity. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 42–53). Springer. https://doi.org/10.1007/0-306-47203-1_3 (Original work published 1991)

Haavold, P. Ø., & Sriraman, B. (2022). Creativity in problem solving: Integrating two different views of insight. *ZDM–Mathematics Education, 54*(1), 83–96. https://doi.org/10.1007/s11858-021-01304-8

Hadamard, J. (1945). *The psychology of invention in the mathematical field.* Princeton University Press. https://worrydream.com/refs/Hadamard_1945_-_The_psychology_of_invention_in_the_mathematical_field.pdf

Hamid, N. H. A., & Kamarudin, N. (2021). Assessing students' mathematics achievement and mathematical creativity using mathematical creative approach: A quasi-experimental research. *Asian Journal of University Education, 17*(2), 100–112. https://doi.org/10.24191/ajue.v17i2.13399

Haylock, D. W. (1987). A framework for assessing mathematical creativity in schoolchildren. *Educational Studies in Mathematics, 18*(1), 59–74. https://doi.org/10.1007/BF00367914

Hollands, R. (1972). Educational technology: Aims and objectives in teaching mathematics (Cont.). *Mathematics in School, 1*(6), 22–23.

Hsu, H. Y., Yao, C. Y., & Lu, B. (2023). Examination of Taiwanese mathematics teacher questioning. *International Journal of Science and Mathematics Education, 21*(5), 1473–1493. https://doi.org/10.1007/s10763-022-10313-2

Kattou, M., Kontoyianni, K., Pitta-Pantazi, D., & Christou, C. (2013). Connecting mathematical creativity to mathematical ability. *ZDM–Mathematics Education, 45*(2), 167–181. https://doi.org/10.1007/s11858-012-0467-1

Kaufman, J. C., & Baer, J. (2004). Sure, I'm creative—But not in mathematics!: Self-reported creativity in diverse domains. *Empirical Studies of the Arts, 22*(2), 143–155. https://doi.org/10.2190/26HQ-VHE8-GTLN-BJJM

Khotinets, V. Y., & Shishova, E. O. (2023). Cultural and educational environment in the development of younger schoolchildren's creative potential. *Frontiers in Psychology, 14*, 1178535. https://doi.org/10.3389/fpsyg.2023.1178535

Kwon, O. N., Park, J. H., & Park, J. S. (2006). Cultivating divergent thinking in mathematics through an open-ended approach. *Asia Pacific Education Review, 7*(1), 51–61. https://doi.org/10.1007/BF03036784

Laycock, M. (1970). Creative mathematics at Nueva. *The Arithmetic Teacher, 17*(4), 325–328. https://doi.org/10.5951/AT.17.4.0325

Leikin, R. (2009). Exploring mathematical creativity using multiple solution tasks. In R. Leikin, A. Berman, & B. Koichu (Eds.), *Creativity in mathematics and the education of gifted students* (pp. 129–145). Brill. https://doi.org/10.1163/9789087909352_010

Leikin, R. (2013). Evaluating mathematical creativity: The interplay between multiplicity and insight. *Psychological Test and Assessment Modeling, 55*(4), 385–400.

Leikin, R., & Kloss, Y. (2011). Mathematical creativity of 8th and 10th grade students. In M. Pytlak, T. Rowland, & E. Swoboda (Eds.), *Proceedings of the 7th congress of the European society for research in mathematics education* (pp. 1084–1093), University of Rzeszñw, Poland. https://hal.science/hal-02158191/file/CERME7.pdf

Leikin, R., & Lev, M. (2013). Mathematical creativity in generally gifted and mathematically excelling adolescents: What makes the difference?. *ZDM–Mathematics Education, 45*(2), 183–197. https://doi.org/10.1007/s11858-012-0460-8

Leikin, R., & Pitta-Pantazi, D. (2013). Creativity and mathematics education: The state of the art. *ZDM–Mathematics Education, 45*(2), 159–166. https://doi.org/10.1007/s11858-012-0459-1

Leikin, R., & Sriraman, B. (2022). Empirical research on creativity in mathematics (education): From the wastelands of psychology to the current state of the art. *ZDM–Mathematics Education, 54*(1), 1–17. https://doi.org/10.1007/s11858-022-01340-y

Levav-Waynberg, A., & Leikin, R. (2012). The role of multiple solution tasks in developing knowledge and creativity in geometry. *The Journal of Mathematical Behavior, 31*(1), 73–90. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2011.11.001

Mann, E. L. (2006). Creativity: The essence of mathematics. *Journal for the Education of the Gifted, 30*(2), 236–260. https://doi.org/10.4219/jeg-2006-264

Matraeva, A. D., Rybakova, M. V., Vinichenko, M. V., Oseev, A. A., & Ljapunova, N. V. (2020). Development of creativity of students in higher educational institutions: Assessment of students and experts. *Universal Journal of Educational Research, 8*(1), 8–16. https://doi.org/10.13189/ujer.2020.080102

Meier, M. A., Gross, F., Vogel, S. E., & Grabner, R. H. (2023). Mathematical expertise: The role of domain-specific knowledge for memory and creativity. *Scientific Reports, 13*, 12500. https://doi.org/10.1038/s41598-023-39309-w

Mumford, M. D., Giorgini, V., Gibson, C., & Mecca, J. (2013). Creative thinking: Processes, strategies and knowledge. In K. Thomas, & J. Chan (Eds.), *Handbook of research on creativity* (pp. 249–264). Edward Elgar Publishing. https://doi.org/10.4337/9780857939814.00029

Mumford, M. D., Mobley, M. I., Reiter-Palmon, R., Uhlman, C. E., & Doares, L. M. (1991). Process analytic models of creative capacities. *Creativity Research Journal, 4*(2), 91–122. https://doi.org/10.1080/10400419109534380

Paz-Baruch, N., Leikin, M., Aharon-Peretz, J., & Leikin, R. (2014). Speed of information processing in generally gifted and excelling-in-mathematics adolescents. *High Ability Studies, 25*(2), 143–167. https://doi.org/10.1080/13598139.2014.971102

Plucker, J. A., & Beghetto, R. A. (2004). Why creativity is domain general, why it looks domain specific, and why the distinction does not matter. In R. J. Sternberg, E. L. Grigorenko, & J. L. Singer (Eds.), *Creativity: From potential to realization* (pp. 153–167). American Psychological Association. https://doi.org/10.1037/10692-009

Poincaré, H. (1914). *Science and method*. Dover Publications.

Romey, W. D. (1970). What is your creativity quotient?. *School Science and Mathematics, 70*(1), 3–8. https://doi.org/10.1111/j.1949-8594.1970.tb08557.x

Silver, E. A. (1997). Fostering creativity through instruction rich in mathematical problem solving and problem posing. *ZDM–Mathematics Education, 29*(3), 75–80. https://doi.org/10.1007/s11858-997-0003-x

Silvia, P. J., Kaufman, J. C., & Pretz, J. E. (2009). Is creativity domain-specific? Latent class models of creative accomplishments and creative self-descriptions. *Psychology of Aesthetics Creativity and the Arts, 3*(3), 139–148. https://doi.org/10.1037/a0014940

Spraker, H. S. (1960). *A study of the comparative emergence of creative intellectual behavior during the process of group and individual study of mathematics* [Unpublished doctoral dissertation]. University of Virginia.

Sriraman, B. (2022). Uncertainty as a catalyst and condition for creativity: The case of mathematics. *ZDM–Mathematics Education, 54*(1), 19–33. https://doi.org/10.1007/s11858-021-01287-6

Sternberg, R. J., & Lubart, T. I. (1991). An investment theory of creativity and its development. *Human development, 34*(1), 1–31. https://doi.org/10.1159/000277029

Sternberg, R. J., & Lubart, T. I. (1996). Investing in creativity. *American psychologist, 51*(7), 677–688. https://doi.org/10.1037/0003-066X.51.7.677

Torrance, E. P. (1966). *Torrance Tests of Creative Thinking: Norms and technical manual.* Personnel Press.

Vigotsky, L. S. (1939). *Thought and speech. Psychiatry, 2*(1), 29–54. https://doi.org/10.1080/00332747.1939.11022225

Yang, K. L., Hsu, H. Y., & Cheng, Y. H. (2022). Opportunities and challenges of mathematics learning in Taiwan: A critical review. *ZDM–Mathematics Education, 54*(3), 569–580. https://doi.org/10.1007/s11858-021-01326-2

劉沛妏、秦爾聰、簡啟東（2024）。
探究導向專業學習模式對數學科初任教師教學策略知識展現之個案研究。
臺灣數學教育期刊，**11**（2），81–106。
doi: 10.6278/tjme.202410_11(2).004

探究導向專業學習模式
對數學科初任教師教學策略知識展現之個案研究

劉沛妏　　秦爾聰　　簡啟東
國立彰化師範大學科學教育研究所

本研究以「探究式－素養導向師資培育模式」理論，發展「探究導向專業學習模式」，並詮釋初任教師之數學教學策略知識展現。根據研究目的，研究者搜集個案教師於【教學觀察】與【教學實作】兩階段，所呈現的數學教學影片、課後討論影片與教師反思日誌，來分析研究個案的探究導向學習架構，及其所呈現的數學教學策略知識。「探究導向學習模式」之核心，在於協助教學者於教學實務現場中，藉由教學觀察發現待解決的研究問題後，透過批判性文獻閱讀與討論，發展可能的解決方案之假設。接著，在協同教學的實作環境中，來驗證假設、反思並調整其教學。研究結果顯示，「探究導向學習模式」對初任教師發展教學佈題與引導策略、瞭解學生的數學學習困難，促進其連結數學概念與數學課程架構均有助益。因此，研究者認為未來可將「探究導向學習模式」推廣至師資培育與教育實習課程，以建構連貫的職前培育與專業發展學習管道。

關鍵字：探究導向、數學教學策略知識、實務導向專業學習模式

通訊作者：秦爾聰，e-mail：abechin@cc.ncue.edu.tw
收稿：2024 年 3 月 18 日；
接受刊登：2024 年 10 月 11 日。

Liu, P. W., Chin, E. T., & Chien, C. T. (2024).
A case study of the influence of inquiry-oriented professional learning models on the teaching strategy Knowledge displayed by a junior high school novice mathematics teacher.
Taiwan Journal of Mathematics Education, *11*(2), 81–106.
doi: 10.6278/tjme.202410_11(2).004

A Case Study of the Influence of Inquiry-Oriented Professional Learning Models on the Teaching Strategy Knowledge Displayed by a Junior High School Novice Mathematics Teacher

Pei-Wan Liu　　Erh-Tsung Chin　　Chi-Tung Chien
Graduate Institute of Science Education, National Changhua University of Education

This study develops an "Inquiry-Oriented Professional Learning Model" and examines how Teaching Strategy Knowledge is displayed by a junior high school novice math teacher participating in this case study. Data was collected and analyzed from classroom teaching videos, in-depth interviews, and the novice teacher's daily reflections during two sessions of "Classroom Observation" and "Teaching Practice". Central to the "Inquiry-Oriented Professional Learning Model" is to help the novice teacher identify the research problems within the mathematics classroom, and formulates research hypotheses by reviewing relevant literature and discussing with other teachers. Subsequently, the novice teacher designs learning activities based on teaching theory to test her hypotheses through co-teaching. The findings indicate that this professional learning model can effectively support the novice teacher in developing her understanding of mathematical teaching, student mathematical thinking, and the connection between mathematical knowledge and the mathematics curriculum. It recommends that the "Inquiry-Oriented Professional Learning Model" might be applied to the internship of student-teacher training programs.

Keyword: inquiry-oriented, teaching strategy knowledge, practice-based professional learning model

Corresponding author：Erh-Tsung Chin，e-mail：abechin@cc.ncue.edu.tw
Received：18 March 2024;
Accepted：11 October 2024.

壹、緒論

教育品質，基於良師！在全球化、資訊化的時代，「教育」已不再單只著重傳授知識、習得技能，而是培養學生自主學習、主動探索、解決問題能力，協助其成為終身學習的 21 世紀公民（教育部，2012；Organization for Economic Cooperation and Development [OECD], 2013）。而教學者自身學習經驗，影響其未來教學取向。擁有主動探索、自主學習經驗的教師，較能培養學生自主學習、主動探索之能力。在「培育」與「致用」兼具的專業學習過程中（教育部，2012），使未來教師透過主動探索、自主學習歷程，來發展其教學專業知能尤為重要。

近年來，實務導向專業學習模式（Practice-Based Learning），漸受教育學者與師資培育機構重視。其使學習者在實地觀摩、見習、試教與教育實習過程中，發現問題、提出假設、形成解決策略，以發展理論與實務並進的專業知能（何蘊琪、張景媛，2019；符碧真，2018；賴光真，2022）。其中，符碧真（2018）提出「探究式－素養導向師資培育模式」雛形，期促進教師發展學科理論知識與實踐智慧結合之功能性素養，即問題解決、團隊合作、溝通表達等共通性能力。然而，現行臺灣師資培育方針，仍理論修習為先、教學見習為後，少提供師資生理論與實務並進的學習方針（何蘊琪、張景媛，2019；賴光真，2022），其相關數學師資培育實徵研究亦少見。此外，初任教師雖已修畢師資培育課程、參與實習並教學經驗，仍常面臨教學實務、班級經營、親師溝通等挫折。而現行師資培育與教師專業發展系統，卻無法支持初任教師所需的教學支持（教育部，2012）。因此，本研究以個案研究為初探，根據「探究式－素養導向師資培育模式」理論，發展探究導向專業學習模式，並詮釋本學習模式對初任教師數學教學策略知識之展現。

貳、文獻探討

根據研究目的，本節探討教師專業發展模式、數學教師的實務知識兩方面文獻，作為本研究發展專業學習模式之理論依據。

一、教師專業發展模式

教師素質是國家競爭力與教育品質的核心，為培育具備教育愛、專業力與執行力的專業教師，師資培育機構致力促進教學者發展其課程設計、教學實務、班級經營與輔導能力（教育部，2012）。現行師資培育與教師專業發展策略，有依照學習者特質、興趣與學習需求等，而個別訂製的個人經驗導向（Experiential and Personal）培育（Kansanen, 2006）；以學校教學實務為核心，強調教師相互支持、彼此合作的學校本位專業（school-based）發展

策略（黃源河，2010）；及由教學現場的實務問題出發，藉由教育理論文獻閱讀，和教學實作演練與調整，來發展教學專業的研究本位學習策略（Research-Based Learning）（符碧真，2018；Kansanen, 2006）。

在個人經驗導向方面，師徒制（Mentoring）重視經驗與實務傳承，師傅與徒弟的個別特質與學習需求，並藉由實務現場的實作與經驗傳承，以協助學習者習得專業技能（黃源河，2010）。現行臺灣的教育實習制度，先透過教育實習工作介紹、至教育現場見習、部分進入實習學校學習，再全時間進入實習學校學習，由淺入深的漸漸了解教育現場，並參與教育現場的教學與行政工作（陳嘉彌，1998）。

在學校本位的學習模式部分，以英國的「學校中心師資培育」（School-Centered Initial Teacher Training）與日本的「課室研究」（Lesson Study）為典型案例。長年來，英國教育機構以中小學為師資培育場域，使師資生參加兩週研習後，即跟著有經驗的教師，在中小學接受一年的教學實務訓練（黃源河，2010）。關於日本所實行的課室研究，則讓教師藉由研發課室計畫、實行課室教學及課前後討論中，協助教學者透過觀察與反思來發展教學專業（Yoshida, 2008）。固然學校本位的學習模式，能協助數學教師發展多元表徵的教學策略，並預期學生的迷思概念與學習成果（Suh & Seshaiyer, 2015），但並非每一所中小學校皆有足夠的專業教師（黃源河，2010），以協助未來教師的培育與學習。

故連結師資培育大學、中小學教育現場資源，形成理論與實務並進的學習方式，是現行師資培育與教師專業發展趨勢。研究本位的師資培育模式，使師資生於批判性文獻閱讀、教學實務探究的訓練過程中，發展課程規劃、教學方法、評量方法與學生學習認知等教師專業知識（符碧真，2018）。

關於學習的開放性方面，Zeichner（1983）指出師資培育則包括行為導向（Behaviorist）、個人導向（Personalistic）、技藝導向（Traditional-Craft）及探究導向（Inquiry-Based）四種方式。其中，探究導向學習方式重視學習者在無法預知的變動環境下，培養其主動反省與批判思考的能力（黃源河，2010）。何謂探究導向學習方式？如同數學家、科學家研究自然萬物般，探究導向學習方式，使學習者由實證經驗為基礎，尋找問題之合理解釋（National Research Council [NRC], 1996）。在探究導向學習中，學習者藉由實務觀察來發現研究問題、調查並分析實務資料、嘗試形成推論並與同儕分享成果之過程，來發展解決問題的策略（McComas, 2014; NRC, 1996; Pedaste et al., 2015）。

「探究式－素養導向師資培育模式」乃是結合「研究本位」與「探究導向」的專業學習模式，其（1）從教學實務現場，尋找有感的研究問題；（2）透過教育與學習理論指引，形成研究假設；（3）研究結果超乎預期時，反思理論知識與教學實務等三大規劃原則（符碧真，2018），使師資生發現待解決的研究問題後，藉由理論文獻的批判性閱讀，與實務現場的教學實作與反思，來發展教學所需的專業知識與素養。然而，該模式仍缺乏數學教師專業學習實徵研究驗證，故本研究報導一位初任教師的專業學習歷程，並驗證探究導向專業學習模式對數學教學策略知識之影響。

二、數學教學知識

師資培育與教師專業發展之目的，是協助教學者增進其專業知識、教師信念與教學技能（Jaworski, 2008; Oliveira & Hannula, 2008），而數學教師所具備之實務知識，對其教學品質尤為重要（NRC, 1996），故許多學者致力於教師知識相關研究。

研究指出內容知識、課程知識、教學法知識、學科教學知識、學習者知識、評量知識和教學情境知識等的重要性（Elbaz, 1983; Grossman, 1994; Tamir, 1988）。其中，Elbaz（1983）提出自我知識、教學情境知識、學科內容知識、教學知識、課程發展知識等實踐知識的五個領域；Grossman（1994）則指出教師知識有內容知識、學習者知識、教學知識、課程知識、教學情境知識與知識本身等六個教師領域；而 Shulman（1986）亦探討教師所需具備的教學知識，並提出學科內容知識（Content Knowledge [CK]）、學科教學知識（Pedagogical Content Knowledge [PCK]）和課程知識（Curricular Knowledge）等通用性教學知識。

在數學教師專業發展方面，密西根大學 Learning Mathematics for Teaching（LMT）研究團隊，分析十五年的數學教學影片，並建構教學用數學知識（Mathematical Knowledge for Teaching [MKT]）理論（Ball & Bass, 2009; Ball et al., 2008; Hill et al., 2008）。教學用數學知識（MKT）有學科主題知識（Subject Matter Knowledge [SMK]）與學科教學知識（PCK）兩部份。其中，學科主題知識有一般內容知識（Common Content Knowledge [CCK]）及特殊內容知識（Specialized Content Knowledge [SCK]）與數學眼界知識（Horizon Content Knowledge [HCK]）三部分；而學科教學知識則分為內容與學生知識（Knowledge of Content and Students [KCS]）、內容與教學知識（Knowledge of Content and Teaching [KCT]）及內容與課程知識（Knowledge of Content and Curriculum [KCC]）。

在科學教育領域部分，Park 與 Oliver（2008）亦建構科學教學的學科教學知識五角形（Pentagon model of PCK for teaching science），包括：科學教學導向（Orientations toward Teaching Science [OTS]）、了解學生的知識（Knowledge of Student Understanding [KSU]）、教學策略與表徵知識（Knowledge of Instructional Strategies And Representation [KISR]）、科學課程的知識（Knowledge of Science Curriculum [KSC]）與科學學習評量知識（Knowledge of Assessment Of Science Learning [KAS]）（Park & Chen, 2012; Park & Oliver, 2008）五面向。

而臺灣數學與科學教育學者，亦根據上述理論發展教師知識問卷（張世忠等人，2012；陳彥廷，2014）、教室觀察系統（卓益安、金鈴，2012）及教師專業標準（李源順等人，2008；鍾靜等人，2012）等。其中，張世忠等人（2012）所建構「國中自然與生活科技領域」教師 PCK 問卷，以科學課程知識、學生理解科學的知識、教學策略知識、評量與科學素養知識四面向，建構 27 題問卷調查題目；陳彥廷（2014）則以課程與目標知識、學科內容知識、教學策略知識、教學表徵知識與學習成效評估知識，來建構「國小教師 MPCK 知覺量表」（共 17 題）；另外，林碧珍（2021）以數學課程知識、分析學生數學認知知識、數學教學策略知識三類，建構「教師教數學的知識類別與細目」。

在「教師教數學的知識類別與細目」方面，林碧珍（2021）根據國中小數學教學研究相關文獻，包括：陳彥廷（2015）、鍾靜與趙曉美（2014）、MKT 知識架構（Ball et al., 2008）、TEDS-M 評量架構（Tatto et al., 2008）及 KQ 知識四重奏（Rowland et al., 2005）等十二篇，來建構數學教學知識的類別與細目。研究者認為林碧珍（2021）所建構架構，雖為分析國民小學教師資格考試內容，但其奠基於國內外的中小學數學教學文獻，故適用於臺灣國中數學教學行為分析。其中，「數學教學策略知識」與教學者對數學教學目標、數學佈題、教學策略與教學表徵呈現有關，與本研究欲探討之議題有關。因此，本研究以林碧珍（2021）所建構的數學教學策略知識編碼（如表 1），來分析初任教師參與計畫期間的教學展現。

表 1
教師教數學的知識類別與細目

類別	細目
數學課程知識	辨識教材的數學概念
	了解教材的先後順序
	了解數學題目的特性
分析學生 數學認知知識	了解某解法的先備知識
	了解解法的數學意義及認知層次
	判斷解法與說法的正確性
	預測學生正確的解法或想法
	分析、偵錯、了解學生的困難或迷思
	預測學生的迷思概念或困難
數學教學策略知識	依據教學目標選用設計布題或教學活動（編碼 T01）
	指認布題或教學活動的教學目標（編碼 T02）
	使用適當的表徵或教具呈現與解釋概念或過程（編碼 T03）
	挑選及安排學生解題的發表順序（編碼 T04）
	依學生的反應提出回饋（如追問、回應想法）（編碼 T05）
	善用學生解法進行下一步教學（編碼 T06）
	設計布題或問話診斷迷思概念（編碼 T07）
	提出學生的認知或迷思概念的教學重點（編碼 T08）
	判斷不同的教學策略或教學想法（編碼 T09）
	依目標或學生認知與困難選用或設計評量試題（編碼 T10）

註：引自〈國民小學教師資格考試「數學能力測驗」之數學教材教法評測知識類別與細目及比重分析〉，林碧珍，2021，**教育實踐與研究，34**（1），頁 60。

參、研究方法

一、研究設計與方法

根據研究目的，本研究參考符碧真（2018）所提出「探究式－素養導向師資培育模式」三項規劃原則發展「探究導向專業發展模式」，並以個案研究方式，由一位數學科專家教師及一位初任教師合作，於中部某公立國民中學，實行為期兩年的專業學習計畫，以協助初任教師發展數學教學策略知識的歷程。研究計畫共分為「課程修習」、「教學觀察」與「教學實作」，實施內容詳述如下：

（一）課程修習

「研究導向」的專業學習方式，重視學理知識與研究方法根基。初任教師分別修習科學（與數學）教育專論、科學（與數學）教育研究方法、數理認知心理學、數理教學研究等課程，來瞭解各種數學教學理論、學生的數學認知發展及教學研究方法，建構數學教育學理基礎。

（二）教學觀察

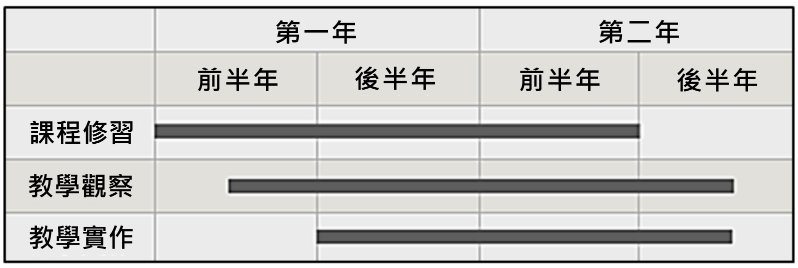
初任教師參與專家教師的數學課（每週兩次，各 1 小時），以觀察專家教師的數學教學方式，與個案班級學生數學科學習情況。每次教學觀察後，兩位個案教師除討論數學教學情況外（每次約 10−30 分鐘），初任教師也撰寫教學反思日誌，以再次思考專家教師之教學引導策略及學生們的數學學習情形。

（三）教學實作

待初任教師發現課室實務的待研究問題後，專家教師鼓勵其閱讀數學教學相關文獻，並嘗試自行設計數學教學活動。初任教師如同行動研究般，結合教學研究與課室實務（王文科、王智弘，2012），於三個個案班級實施數學教學。每次教學實作後，兩位個案教師亦共同討論數學教學情形，而初任教師也將學生學習情形與及教學調整內容，記錄於教學反思日誌。

本研究實施「課程修習」、「教學觀察」與「教學實作」之甘特圖，如圖 1：

圖 1
研究設計甘特圖



二、研究參與者

本研究由一位專家教師（引導者）、一位初任教師（學習者）與兩位研究者組成，其詳述如下：

（一）引導者：專家教師

專家教師是位「特別」的數學老師，非數學系出身但熱愛數學的他，就讀中部某國立大學農業機械系時，即修滿數學系必修課程，並獲得小學與國中教師資格。大學畢業後，專家教師於中部某公立小學、某特殊學校（啟智學校）任教後，轉任國民中學理化科教師，並於十多年前，再次轉任國民中學數學科教師。

專家教師的學習與教學經驗，影響其數學教學策略與方法。就讀國民小學，專家教師為與參與補習同學的學習相同，他不但預習課程內容，也和同學共組讀書會；擔任理化教師期間，專家教師亦發現自行動手做實驗，對學生理解自然科學內容之正面影響。因此，專家教師非常重視學生們的合作學習與動手操作。此外，專家教師攻讀碩士學位期間，深受美國知名科教學者 Norman Lederman 與 Judith Lederman 影響，而長期研究數學探究教學實務。

近十年的合作學習與數學探究教學實務經驗，使專家教師不但成為「教室教學的春天—透過分組合作學習創建學習共同體」專家諮詢委員、「數學中央輔導群，亮點基地計畫」的數學探究教學的推廣教師，亦擔任「中等教育階段數學領域教學研究中心」之合作學習與數學探究教學專家教師。專家教師的數學教學實務與師資培育經驗，使研究團隊邀請其擔任本研究之師資者，來共同建構「探究導向專業學習模式」的實務面。

（二）學習者：初任教師

初任教師指取得正式合格，並具三年（含）教學經驗的合格教師（張弘勳等人，2014）。本研究之初任教師於第一志願高中畢業後，立即順利考上某師範大學數學系；師範大學數學系畢業後，立即成為國民中學的正式教師，並於南部某公立國民中學任教三年。本研究進行期間，初任教師正留職停薪至某師範大學進修，而其進修大學與任教學校距離甚遠，故本研究選擇專家教師任教班級作為研究場域。

初任教師深受其學習與教學經驗影響，她是個深思熟慮、按部就班的好學生。參與本研究計畫前，初任教師多以教師中心教學為主，教學過程中，其發現講述導向教學，無法引發學生學習興趣，且學生多只記憶數學知識、應付考試，故決定參與「探究導向專業學習模式」研究計畫，並期待發展多元的數學教學方式。

（三）研究者：數學教育學者、參與觀察者

本教師專業發展研究計畫團隊，由一位數學教育學者及一位研究參與觀察者組成。其中，數學教育學者負責整個研究方向與規劃、資料收集與分析；而研究者紀錄者，則擔任主要觀察者，負責記錄兩位個案教師的互動過程，並分析研究的實務資料。

三、研究場域

考慮個案教師對學校文化與場域的熟悉度，本研究以專家教師任教的中部某公立國民中學，作為初任教師教學觀察與教學實作之場域，並選定專家教師任教的三個案班級學生，作為初任教師教學研究之實施對象。

（一）個案班級：甲班（「生 01」至「生 33」為甲班學生）

甲班為初任教師教學觀察、教學實作的主要對象。深受專家教師的教學風格與信念影響，甲班學生們不但活潑外向、樂於彼此合作，更會主動安排數學科作業進度，自主安排寒暑假的學習活動。從學習特質來看，該班男學生喜歡主動發問、回答問題，並嘗試挑戰各種不同解題策略；而女學生雖不常舉手回答問題，但她們會自主分群討論、思考並解決問題。

（二）個案班級：乙班（「生 40」至「生 69」為乙班學生）

乙班為初任教師教學實作的對象之一。教學實作前，初任教師只接觸乙班學生二至三次，對學生們的學習狀況較不了解。然而，該班學生與甲班的學習風格相近，且學生們亦個性活潑、喜歡與他人互動，他們常熱烈討論數學問題、發表其數學想法。

（三）個案班級：丙班（「生 70」至「生 100」為丙班學生）

丙班亦為初任教師教學實作的對象。該班學生傾向獨自思考並解決問題，較少與同學討論互動。就發言情況而言，丙班發言者多集中於三、四位高成就學生，其他學生較習慣聽課並自行解決問題。丙班與另外兩班的學習風格差異，提供初任教師多元的學習機會。

四、資料蒐集與分析

本專業發展研究搜集個案教師的教學影片（以 [教學觀察 ooxx] 與 [教學實作 ooxx] 表示）、個案教師的課後討論影片（以 [教學討論 ooxx] 表示）及初任教師所記錄的反思日誌（以 [教師反思 ooxx] 表示）等質性資料，並分析質性資料、尋找專家教師的引導架構（如表 2）來發展「探究導向專業發展模式」。舉例來說：由初任教師觀察專家教師的教學後，提到「這部分的鋪陳我不是很懂，只覺得原本對學生而言是簡單的乘式，多了這樣的說法對他們是不是太複雜了。尤其提到拆項，是為了十字交乘法鋪陳嗎？」[教師反思 1122]，可知初任教師不了解多項式乘法與十字交乘法的關聯性，故無法理解專家教師的探究佈提引導策略（編碼 QC）。當初任教師發現待解決的研究問題後，其開始閱讀數學教材、相關教學文獻、觀察專家教師教學，並嘗試擬出數學佈題技巧之假設（編碼 GC）。

在詮釋探究導向專業學習模式，對初任教師發展教學策略知識方面，研究者根據林碧珍（2021）所建構編碼架構，來分析初任教師的數學教學影片與反思日誌。舉例來說，在【數列與級數】單元中，初任教師想讓學生測量圖形的邊長，來發展多邊形的相似關係（編

碼 T01），故其請學生測量 A 系列紙張的長、寬，並解釋其發現的紙張邊長關係。教學過程中，初任教師聽到學生提出意料之外的想法後，無法依據學生的反應提出回饋或追問（編碼 T05），故只能不知所措地尋求專家教師協助。此教學案例呈現初任教師雖瞭解單元學習目標，但並未選擇合適的探究素材，且無法依照學生回饋繼續教學。

表 2

「探究導向專業發展模式」編碼表

類別	資料來源	編碼號	說明
實務觀察	教學觀察影片	C	初任教師於專家教師的數學課中，觀察專家教師的數學探究教學方法與策略、班級經營策略與學生的數學學習情形。
發現問題	教學觀察影片 教師反思日誌	QC	初任教師觀察專家教師的數學教學後，發現待解決的研究問題（包括：班級經營策略、數學探究教學策略等），並將研究問題與假設紀錄於反思日誌。
提出猜想	教學觀察影片 教師反思日誌	GC	初任教師發現待解決的研究問題後，先閱讀數學學習、教學方法相關文獻，根據文獻內容反思並批判教學實務，並於教學反思日誌提出解決策略的假設。
蒐集資料	教學觀察影片 （循環）	RCC	發現待解決的研究問題後，初任教師於接下來幾堂數學課中，嘗試蒐集學生的數學想法、並找出解決方案。
	協同教學影片 （循環）	RCT	發現待解決的研究問題後，初任教師先設計數學教學活動，並與專家教師協同教學。在協同教學過程中，初任教師透過教學實作或觀察，來發展數學探究教學的教學方法與策略。
形成推論 同儕分享	教學討論影片 教師反思日誌	IA	每堂課教學實作結束後，初任教師與專家教師討論其教學心得，並於反思日誌紀錄其歸納的研究結論。

研究資料分析後，研究者根據教學觀察、教學討論與教師反思日誌三類資料，及數學教育專家（一名）和數學教育博士生（共兩名）對研究資料之交叉檢驗，來建構本研究之信度。在研究效度的部份，研究者撰寫完本文後，將文章分別寄給研究參與者（專家教師與初任教師），並邀請兩位參與者檢閱研究結果詮釋及事件報導的正確性。

肆、研究結果

根據「探究式－素養導向師資培育模式」理論，本研究的初任教師經歷「實務現場的教學觀察」、「教育文獻的批判性閱讀」及「實務現場的教學實作」三個學習階段。專業學習過程中，專家教師引導初任教師發現待解決的研究問題、形成研究假設、檢驗並調整解決策略，以建構理論與實務並進的數學教學知能（符碧真，2018）。

一、教學觀察：發展待解決的研究問題

十二年國民教育重視學生的數學探究與合作解題能力（教育部，2018）。專家教師的學習信念與教學經驗，使其以營造探究導向的學習環境，讓學生發展數學想法、建構數學概念。然而，初任教師的學習經驗中，多以講述為主的教師中心教學模式，故課室觀察初期，他雖認為專家教師的探究教學雖新奇有趣，但與所習慣的教學方式相差甚遠，故也感到眼花撩亂、摸不著頭緒，更無從學起 [1108 教師反思]。因此，初任教師發現待解決研究問題－發展探究導向課程的活動設計、引導策略與課室經營方式。

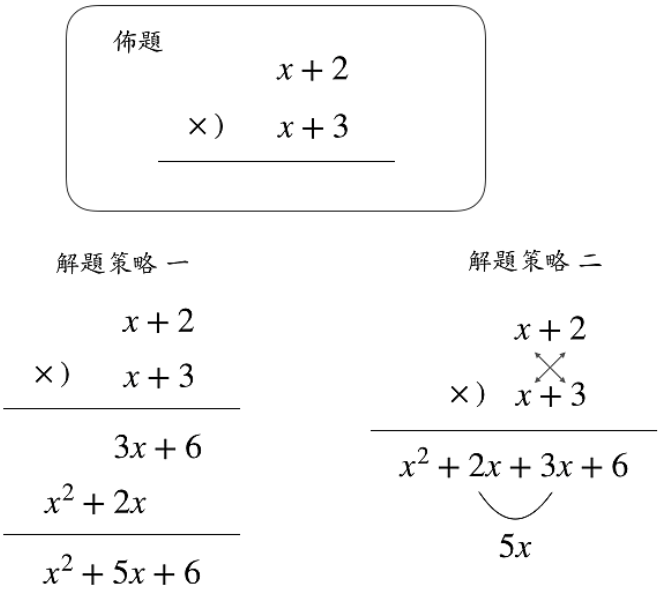
初任教師參與專家教師的數學課，看到學生能主動舉手發言、流暢地和同學分享數學想法，與其原本教學經驗－課本、習作、講義與考卷題目皆由老師講解，而學生在座位聆聽並抄寫不同，故其對專家教師的班級經營方式感到疑惑。幾次的觀察後，初任教師發現專家教師給予學生學習的自主權，包括：讓學生自行選擇分組討論的夥伴、讓數學小老師負責安排習題進度，並鼓勵學生勇於分享數學想法。在教學評量方面，專家教師除例行性地作業檢查外，也會以隨堂檢驗學生學習成果，並依此調整教學內容（編碼 C、QC）[1121 教師反思]。

在探究導向教學策略方面，專家教師不喜歡學生「死」背公式或解法，故常花時間讓他們思考數學計算的原理與概念。舉例來說，在【因式分解】單元中，多數教師傾向直接說明十字交乘法的計算步驟，然而，專家教師則讓學生先發現【十字交乘法】與【多項式乘法】、【拆項提公因式】關聯性，並在「 $(x+2)\times(x+3)$ 」問題中，強調 $5x$ 拆項成 $3x$ 與 $2x$，說：「 x^2+5x+6 是不是就寫成 $(x+2)\times(x+3)$ ？利用拆項再提出公因式，不管提 x 或 2，都可以變成 $x+3$。這個技巧很重要！」[教學觀察 1122]（如圖 2）。然而，此方式與初任教師習慣的教學策略不同，故其對專家教師的引導策略感到疑惑（且好奇），他提到「這部分的鋪陳我不是很懂，只覺得原本對學生而言是簡單的乘式，多了這樣的說法對他們是不是太複雜了。尤其提到拆項，是為了十字交乘法鋪陳嗎？」[教師反思 1122]（編碼 QC、GC）。

為解決此待解決的問題，初任教師閱讀數學教材（課本與教師手冊）、相關教學文獻，並觀察專家教師的接下來的教學。初任教師發現不斷複習【拆項提公因式技巧】，讓學生潛移默化地熟悉此策略，能使其自行建構【十字交乘法解題】策略。此外，初任教師也於反思紀錄中，提到專家教師的數學佈題技巧「（一）將相似題型擺在一起，讓學生思考、比較

並討論；(二)較為複雜的題型時，讓學生先寫出自己做法，再詢問是否有不同的。若沒有，老師則適時提示。」[教師反思 1213]（編碼 QC、GC、RCC）。

圖 2
【利用十字交乘法因式分解】教學活動



初任教師藉由實務現場的教學觀察，不只形成待解決的研究議題，亦根據觀察結果擬出可能的探究教學引導策略與課室經營技巧。

二、文獻閱讀：結合教育理論以制定研究計畫

數個月的教學觀察，雖使初任教師發現待解決的研究問題，包括：如何進行探究導向教學、如何經營自動自發的課室文化、如何讓學生自行建構數學概念與解題策略等，也根據觀察結果擬出可能解決策略（符碧真，2018），然而，單只參與數學教學觀察，難以形塑完整、有架構的探究教學模式。因此，初任教師閱讀數學學習心理學（Skemp, 1987/1995）、數學探究教學（Bybee et. al., 2006; NRC, 1996）等文獻，以了解數學學習與探究教學策略。

三、教學實作：發現待解決的研究問題

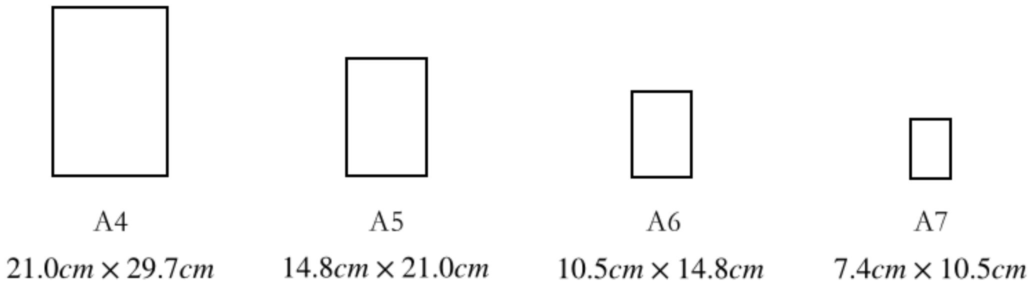
「探究導向專業學習」強調自我探究、發現問題並解決問題之歷程。為使初任教師經歷此歷程，專家教師將教學模式與素材、教學活動設計形式等選擇權，皆交予初任教師自行決定。其只鼓勵鼓勵初任教師先根據單元學習目標，設計 20−30 分鐘的探究活動，並於教學實作來檢驗並調整。此外，專家教師亦藉由協同教學（co-teaching）方式，使自己成為初任教師的後盾，協助其解決教學時的意外事件。

教學實作初期（研究設計第一年的後半年），初任教師並未直接依據 5E 探究學習環（Bybee et. al., 2006），來設計探究導向的數學教學活動。其選定探究活動的素材後，只撰寫教學大綱，並向專家教師說明活動大綱，而專家教師瞭解初任教師的想法後，亦只會提出一兩項可能疑慮，並請初任教師再想想。專家教師曾跟初任教師說明：「聽完你的想法後，我已經有許多較可行的方案，但是我不能跟你說。你必須經歷這一段過程，才能了解探究的意涵是什麼，才能選擇合適的探究題材。」[教學討論 0115]。故教學實作初期，初任教師發現更多待解決的研究問題，包括：如何依據教學目標，選用合適的探究素材、設計教學活動？如何依據學生的反應與解法，提出回應並進行下一步教學？等。

（一）研究問題：如何依據教學目標，來挑選合適的素材並設計探究活動？

在探究素材挑選方面，初任教師剛開始設計教學活動時，尚未掌握素材挑選與佈題要領，故其設計不易引發學生探究的數學問題。舉例來說，在【數列與級數】單元中，初任教師嘗試以 A 系列影印紙的邊長關係，來引發學生的好奇心並參與探索活動（編碼 RCT）[教學實作 1004]。「你們每一組都有 A4、A5、A6、A7 的紙，請用直尺測量紙的長和寬，並想想看每張紙的長和寬有關係？」初任教師發給學生四張紙（如圖 3），並要他們思考紙張邊長的關係（編碼 T01）。

圖 3
【數列與級數】之數學教學活動



待初任教師說明學習任務後，有些學生使用直尺測量、有些學生用摺紙方式，而有些學生將紙張以不同方式擺放，來觀察、探索並思考紙張邊長的關係（編碼 T01）。

大約十分鐘後，一位學生（生 21）突然舉手，並提出初任教師預料之外的想法，說：「最小張的寬為 7.5 公分，接著寬依次為 10.5、15、21，而相減後的差分別為 3、4.5、6，再一次相減可以發現成等差 1.5 的關係。」

聽到突如其來的想法後，初任教師無法馬上解讀學生的數學思維，其感到不知所措（編碼 T05）。此時，參與課室觀察的專家教師，考量該堂課已近下課時間，故先請初任教師告訴學生：「嗯！你們的想法很棒！希望你們回去再找找看，把想法整理出來，下禮拜我們再分享大家的發現。」

專家教師不只參與並適時地協助教學，其亦與初任教師討論所發生的教學事件。在上述案例中，專家教師跟初任教師討論生 21 的發現，也提供兩種教學引導策略。初任教師在

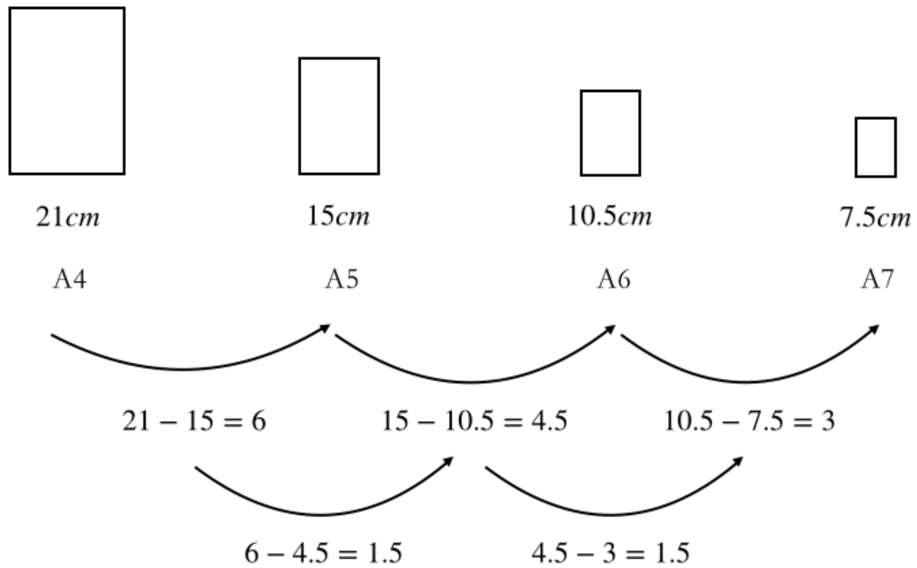
反思紀錄中，提到「可以先請學生回家整理想法，並在下次上課前先搜集學生的發現。」[教師反思 1004]（編碼 QC、GC、RCC）。

一週過後，初任教師邀請學生解釋其研究結果（Bybee et. al., 2006）（編碼 T04）。

「先看比較短的那一邊，最小張是 7.5。」生 21 拿著 A7 紙，繼續說：「按照大小，下一張是 10.5（A6 紙），接下來是 15（A5 紙），然後是 21（A4 紙），它們相差按照小到大，分別差 3、4.5、6。接下來再分下去，它們都差 1.5。」（如圖 4）

固然，學生因量測誤差，而認為 A7 紙的寬為 7.5 公分，但他們卻努力尋找數值關係，並發現 6、4.5 與 3 的等差關係。為鼓勵學生勇於探究並分享其發現，初任教師決定肯定他們，並說：「哇！有沒有很厲害，掌聲鼓勵一下啊！」

圖 4
【數列與級數】之數學想法 A



「還有一位同學，有發現喔！」專家教師賣個關子的停了幾秒，繼續說：「生 17 上禮拜發現這樣喔！」，專家教師代替生 17 將紙張移動至圖 5 的樣式。

「喔！再一張最小張的，就變成超大張的。」生 12 以豁然開朗並大聲回應。

「就變成一個長方形了！」生 06 接著說。

「那，有沒有某種關係？」專家教師順著回應，引導學生思考。

「有喔！」生 11 忽然大聲地說：「兩倍的關係。」

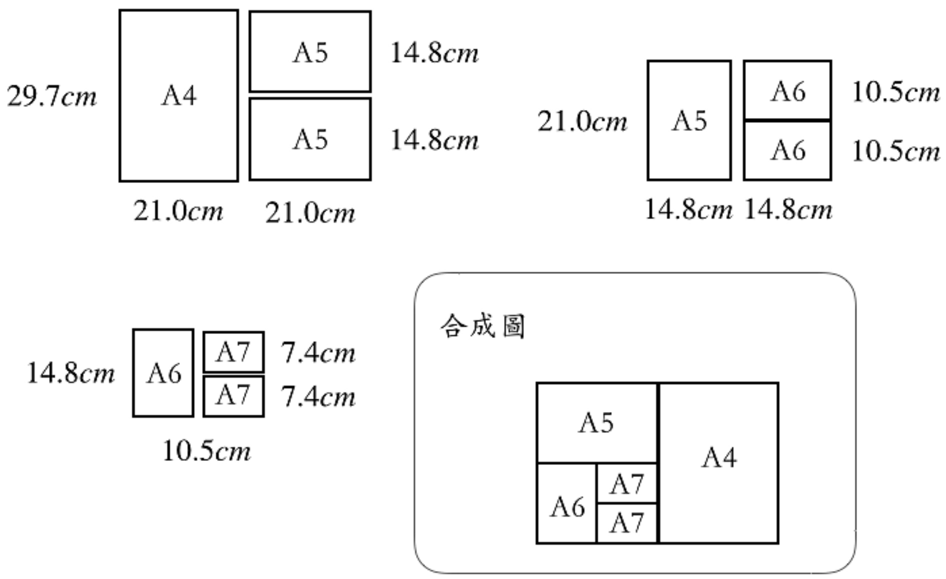
「哪個兩倍？」專家教師繼續提問。

「相互之間是兩倍。」生 06 回答。

「相互之間是兩倍，是面積還是長度？」因上課時間不足，專家教師選擇直接講解 A 系列紙張的面積關係，並請學生回家證明其發現。

圖 5

【數列與級數】之數學想法 B



當天的反思日誌中，初任教師提到：「老師（專家教師）先重新整理這些結果，使學生發現每個紙片面積關係為 2 倍。關於生 19 提到『相似形』，老師請學生找出如何證明確實為相似形。此次最關鍵的發現終於出現，應該能很快找出比例關係，但因時間不足，只能請學生回家思考、證明。我發現老師介入的多寡是重要關鍵，害怕抹煞學生的能力而不出聲，並不一定是好方式，必須觀察學生理解情況、考量時間多寡並適時介入。這一點是我需要再多學習的地方。」（編碼 IA、T01、T02、T05、T06）[教學反思 1009]。

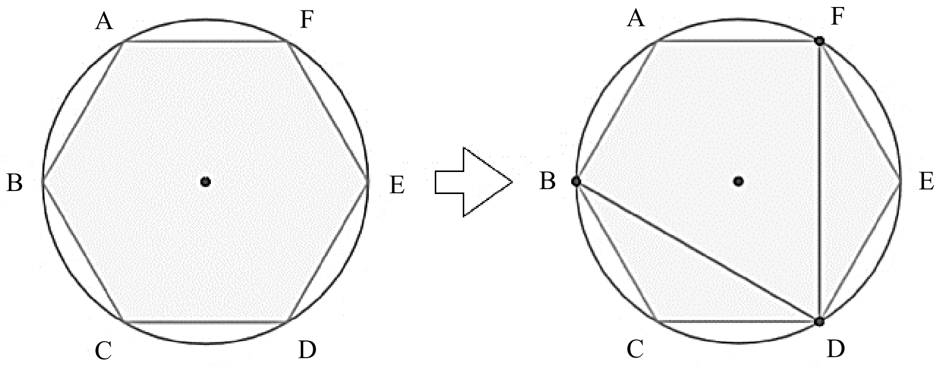
從【數列與級數】案例中，可知初任教師選擇探究素材時，未考量真實生活情形與數學概念的差異性。在真實生活情形中，學生測量 A7 紙的寬為 7.5 公分，與國際標準組織（International Standards Organization [ISO]）所定義的紙張尺寸有差異，而紙張長度與寬度方面，從數據來看，A6 紙的長（14.8cm）為 A7 紙的寬（7.4cm）兩倍、A5 紙的長（21.0cm）為 A6 紙的寬（10.5cm）兩倍，但 A4 紙的長（29.7cm）與 A5 紙的寬（14.8cm）卻因量測誤差，而無法從數據發現兩倍關係。為解決此情形，專家教師呈現生 17 的發現結果，使學生透過觀察來發現紙張的面積關係。

（二）研究問題：如何依據學生反應，來提出回應並進行下一步引導？

關於探究教學引導方面，初任教師未能掌握學生數學想法，故其教學回應較難引導學生發現數學概念。舉例來說，在【圓心角與圓周角】單元中 [教學實作 1102]，初任教師欲使學生發現圓內接四邊形的對角互補性質，其先請學生畫一個圓內接正六邊形，並將頂點一次標示 A、B、C、D、E、F，並分別連接 $\overline{BD}$ 及 $\overline{DF}$（如圖 6）（編碼 T01、T03）。

圖 6

【圓心角與圓周角】之數學活動 A



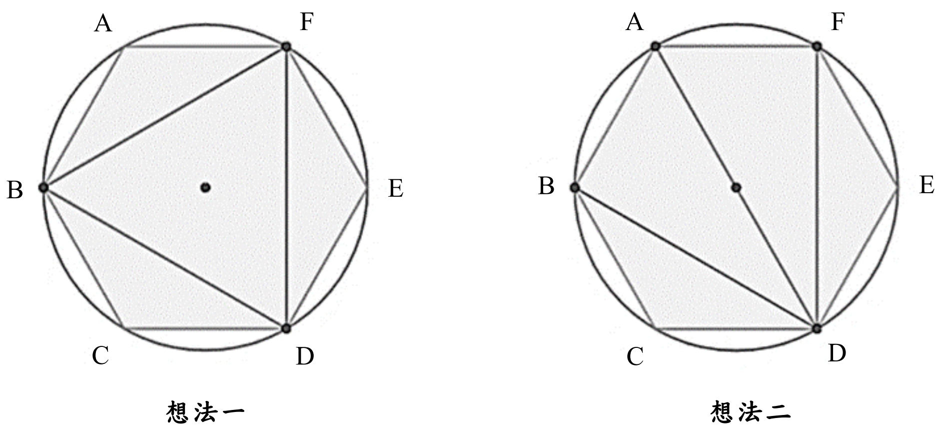
「好，請問四邊形 $ABDF$ 的四個內角，各是幾度？」初任教師問。

「六邊形的 $\angle A$ 是 120°，而且 BF 弧是 240°。」生 06 不但解出 $\angle A$ 的度數，也推演出 BF 的弧度。然而，生 06 的回應過於簡略，故初任教師再次提問，說：「BF 弧是 240°？」

生 06 解釋 BF 弧與 $\angle A$ 的關係，說：「$\angle A$ 為 BF 之優弧的一半、$\angle D$ 為 BF 之劣弧的一半，而且 $\angle ABD$ 和 $\angle AFD$ 相等。」生 06 將 B 及 F 點連接（如圖 7，想法一），並繼續解釋 $\angle ABD$ 和 $\angle AFD$ 相等的原因，說：「如果把點 B 和點 F 連起來，$\angle ABF = \angle AFB$ 及 $\angle DBF = \angle DFB$，因此，$\angle ABD$ 和 $\angle AFD$ 相等且加起來是 180°。180°除以 2，就是 90°。」

圖 7

【圓心角與圓周角】之數學想法



生 06 先將四邊形 $ABDF$ 分割成等腰三角形 ABF 和正三角形 BDF，依此說明 $\angle ABF = \angle AFB$ 及 $\angle DBF = \angle DFB$ 後，接著，根據 $\angle ABD$ 和 $\angle AFD$ 相等，及圓周角與對應弧的關係，來推論 $\angle ABD$ 和 $\angle AFD$ 皆為 90°。

然而，初任教師卻未根據學生的回應，來繼續引導學生發展數學概念。「生 06 利用 $\triangle DEF$ 中，$\angle E$ 是 120°，來推論 $\angle DFE$ 及 $\angle FDE$ 為 30°，而 $\angle AFD$ 就是 90°（參圖 7，

想法一)。」初任教師補充說明後，繼續提問:「請問 $\angle ABD$ 和 $\angle AFD$ 可不可以用圓周角的方式做？」

「把 $\overline{AD}$ 連起來。」生 12 舉手並回答（如圖 7，想法二)。

「然後呢？」初任教師連接線段 $\overline{AD}$ ，並提問。

「 AD 弧是 180 度。」生 12 回應。

「 AD 弧是 180 度，為什麼會知道？」初任教師接著問。

「直徑對切。」生 12 簡潔扼要地解釋。

「直徑對切。對切之後，這邊是 AF 、FE 及 ED 弧，而這邊也三段，AB、BC 及 CD 弧，所以是一半。一半對應的弧為 180°，因此角度是 90°。」初任教師直接說明圓周角與對應弧關係。

「從四邊形 $ABDF$ 的四個角度裡，有沒有人看出什麼東西？」初任教師請學生思考內角關係。

「兩個對角加起來等於 180 度。」生 12 發現 $\angle BAF$ 與 $\angle BDF$ 之和與 $\angle ABD$ 與 $\angle AFD$ 相加，皆為 180 度。

「大家是否發現這件事情？有沒有人可以具體說明，為什麼？」初任教師繼續引導學生思考原因。

然而，初任教師過於抽象提問，使學生們的發言停頓了！幾位較常提出想法的學生皆沈默不語，而初任教師對此反應感到意外，其不知如何繼續引導學生思考（編碼 T05)。

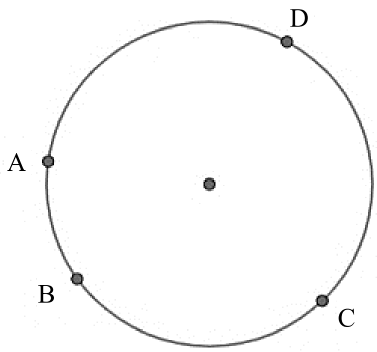
在講台下的專家教師，發現初任教師的教學困擾後，他立刻走上台、指著黑板的圖，說:「老師的意思，是說 $\angle BAF$ 及 $\angle BDF$ 加起來是 180°，$\angle ABD$ 及 $\angle AFD$ 加起來 180°。那四邊形 $ABDF$ 的特色，在哪裡？」(如圖 7)

「頂點都在圓周上。」生 12 立刻回應。

「很好，頂點都在圓周上。」專家教師另畫一圓，並於圓上任意點四點（如圖 8）後，繼續說:「好！請各位另外畫一個圓，自己點四個點，用直覺點。想想看，我點的這四個點、你點的四個點，有沒有什麼數學性質？」

圖 8

【圓心角與圓周角】之數學活動 B



專家教師繼續說：「你可以看到三個圖（圖 7、圖 8 及學生的圖），如果全班就是 32 個圖。從你的圖和黑板上的圖來看，剛才老師證明內容，看得到嗎？」

學生建構數學概念之過程，須從適當的數學問題出發，來收集並分析研究數據，並獲得適當的推論與解釋（NRC, 1996; Pedaste et al., 2015）。在【圓心角與圓周角】單元中，初任教師雖以圓內接正六邊形為特例，期使學生先發現圓內接四邊形的對應角互補關係，但卻因數據資料不足，學生無法從特例推出一般化結果（編碼 T03）。

當天的教學反思日誌中，初任教師針對該情況，提到：

「我請學生在圓上畫出正六邊形，連接 $\overline{BD}$、$\overline{BF}$，並問『四邊形 $BDEF$ 內角各為幾度？』和『藉由這幾個角有何發現？』。學生能快速回答四個內角的角度，但對於衍伸後續的發現，是有難度的！要學生由一組數據推測發現，是有難度的。我不應該太過高估學生的能力。而後，老師（專家教師）提供鷹架，請同學另外再畫一圓、任取四點後，發現關係進而數學化。然而，即使已有前面活動作鋪陳，學生仍然不容易數學化，表示前面鋪陳，並未加強學生對此概念的理解。」[教師反思 1102]（編碼 RCT、IA、T01、T03、T05）

在【圓心角與圓周角】教學中，初任教師不只發現學生的數學想法與學習困難，也根據其教學實作結果，調整其數學佈題次序：

「後來想到較好的佈題：

一、請學生在圓上畫出正六邊形。請問能在正六邊形找到哪幾種四邊形？請學生發表；

二、請學生將各種四邊形的內角，依照表格填入，並找尋共通特徵。請學生討論後發表；

三、請同學另外再畫一圓，圓上任一點 A，如何使 $\angle A$ 為直角？請學生討論後發表；

四、請同學另外再畫一圓，任取四點連出四邊形去發現關係進而數學化。

請學生討論後發表。此外，也可以請同學另外畫一圓任取四點、連出四邊形，各自用量角器去測量四個內角，再請同學分享自己的測量出來的角度，利用表格紀錄統整大家的數據，讓學生發現特徵進而數學化。」[教師反思 1102]（編碼 RCT、IA、T01、T02、T06）。

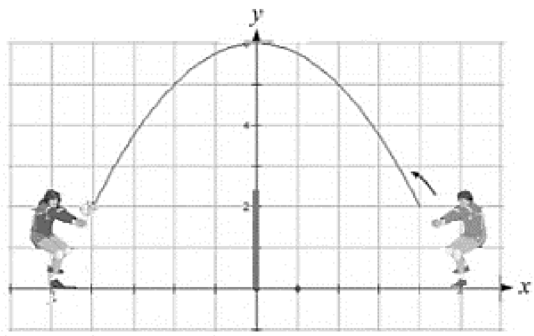
四、教學實作：形成問題解決策略

歷經半年多的文獻閱讀、教學實作與討論後，初任教師雖能指出教師中心與探究導向教學中，教學者角色、教學策略與教學信念等的差異性（編碼 T09），但仍習慣教師中心的教學策略，來經營數學探究教學課室，其提到「明明在老師（專家教師）的課室觀察了一年多，但卻無法像老師那樣揮灑自如，弄得自己在台上很不自然，只能拼命與學生互動，希望至少讓課室有活絡的感覺。」[教師反思 0223]。因此，初任教師與專家教師討論後，決定先根據 5E 探究學習環（Bybee et. al., 2006）來設計數學教學活動，以促進自己掌握探究教學方法與策略（編碼 T09）。研究結果發現結構明確的教學模式（如：5E 探究學習環），對初任教師學習探究教學理論知識有助益，但在教學實務上仍需慢慢養成。

關於探究素材挑選方面，初任教師歷經幾次教學活動設計後，漸能從日常事務觀察、與他人討論過程來發現可用的探究素材。在【二次函數】單元中，初任教師原欲以林書豪

的投籃為探究主題，來引發學生的學習興趣。然而，設計教學活動時，初任教師發現投籃動作與籃筐位置，使該主題可發展的探究內容有限，且涉及學生未學過的數學概念，故其決定果斷放手並選擇其他題材 [教學討論 0121]。最後，初任教師考慮排球兩人對打遠近與最高點限制較小，故其決定調整數學探究活動情境 [教學反思 0202]（編碼 T01、T02、T03）（如表 3）。

表 3
【二次函數】之教學活動設計

初任教師之教學活動情境設計	動動腦
今天體育課要考排球的發球，小珊、小玲與小巴三人皆從位置(0, 0)發球，若三人的發球軌跡分別為 小珊： $y=-(x-3)^2+9$ 小玲： $y=-x^2+4x$ 小巴： $y=-x^2+2x$ 	• 請在附件畫出三人的發球軌跡。 • 請問誰發的球最遠？距離是多少？ • 若小東的發球軌跡為 $y=-x^2+6x-5$，請問他發球距離是多少？ • 畫出小東的發球軌跡，試觀察小東的軌跡與另三人有無關聯。 • 請將小玲、小巴與小東的發球軌跡，寫成 $y=-(x-a)^2+b$ 形式。

此外，初任教師亦漸能藉由適當的提問，來引導學生探究並發現數學關係。在【二次函數】單元中，初任教師給學生三組數據（如圖 9），並請學生於方格紙描點、繪製函數圖形 [教學實作 0308]。

圖 9
【二次函數】之探究數據

表一

x	0	1	2	3	4
y	0	1	4	9	16
	+1	+3	+5	+7	

表二

x	0	1	2	3	4
y	1	2	5	10	17
	+1	+3	+5	+7	

表三

x	0	1	2	3	4
y	0	4	9	16	25

「請觀察這些數據，你們有沒有發現什麼？」初任教師請學生觀察數據的關係。

「表一的 y 值開始是 0，接下來依次加 1、加 3、加 5、加 7；表二的 y 值開始是 1，但接下來也都加 1、加 3、加 5、加 7。」某位生 22 回應說。

「請生 01 把你的圖畫在黑板上。」初任教師請生 01 繪圖後，繼續詢問說：「有沒有人可以跟我講表一，它對應哪個方程式？」

「$y=x^2$。」學生回答。

「那表二呢？」初任教師繼續尋問。

「$y=x^2+1$。」學生回答。

「現在請觀察你們畫的圖，看看發現什麼。」初任教師請學生所畫的圖，並嘗試發現關係性（如圖 10）。

「$y=x^2$ 只要往上一格，就會跟 $y=x^2+1$ 一樣；$y=x^2$ 只要往左一格，就會跟 $y=(x+1)^2$ 一樣。」生 04 嘗試說明其想法。

「三個圖形之間有什麼關聯性？」初任教師延續生 04 的分享，並繼續提問（編碼 T05）。

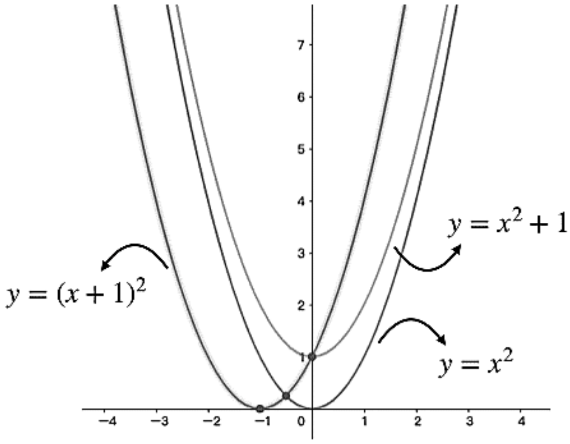
「圖形的角度都一樣，只差在位置不一樣。」生 04 補充說明。

「一個往上移、一個往左邊移啊！」生 11 說明函數平移的想法。

待生 11 說明後，初任教師再次解釋函數平移的概念，並協助學生們理解 $y=x^2$、$y=x^2+1$ 與 $y=(x+1)^2$ 的關係（編碼 T05）。

圖 10

【二次函數】之探究數據繪圖



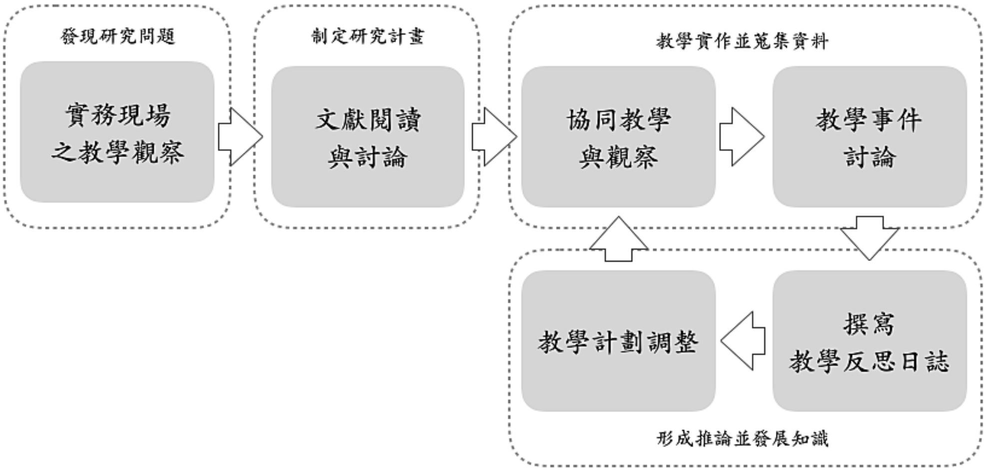
在本教學案例中，初任教師能適當安排教學與發表順序（編碼 T01、T03、T04），使學生了解 $y=x^2$、$y=x^2+1$ 與 $y=(x+1)^2$ 的關係。初任教師從原本的教師中心教學，到能藉由適當的引導提問，幫助學生思考問題、澄清想法進而建構數學概念。

探究導向專業學習模式，使初任教師在課室實務觀察中，發現待解決的研究問題。接著，透過批判性文獻閱讀、協同教學實作與撰寫課室反思日誌，來協助初任教師連結數學教學理論與實務，並發展其數學教學策略知識。

伍、研究建議

傳統師資培育方式，多先使師資生修習教育理論，再讓他們進入現場見習與實習（賴光真，2022），而本研究所發展之教師專業學習模式，則結合教育學理論與現場經驗，使學習者在探究導向的學習環境中，自行建構數學教學的實務知識。而「探究導向專業學習模式」藉由實務現場的教學觀察、教學理論文獻之批判性閱讀、協同教學與觀察、教學事件討論與撰寫教學反思日誌（如圖 11），使初任教師經歷觀察、發現問題、提出猜想、收集資料、形成推論的探究學習歷程，來發展教學理論與實務經驗並進的數學教學策略知識。

圖 11
探究導向專業學習模式



研究第一年，初任教師需增進數學探究教學的實務知識，故其在課室中擔任學習者與觀察者的角色，透過實務現場的教學觀察，發現待解決的研究問題，包括：如何發展探究導向課程設計？如何有效引導學生探究數學問題？及如何經營探究導向數學課室？等。教學觀察期間，專家教師並未直接告訴初任教師教學要領，而是讓他在發現問題後，自行制定研究計畫，並在教學觀察與實作中，搜集研究資料並形成推論。

幾個月的教學觀察後，初任教師開始設計教學活動，並透過與專家教師的協同教學，將教學知識轉化為實務能力。在協同教學中，初任教師擔任學習者的角色，其將課室觀察所建構的知識轉化為實務，透過實作與反思建構數學教學策略知識。而專家教師在協同教學中，仍是引導者與幫助者的角色，其不直接告訴初任教師應調整方案，而只針對教學設計進行提問。在教學實作中，專家教師則擔任救援者的角色，當初任教師無法繼續引導學生探究數學問題時，專家教師將接續其教學，並透過實際的教學示範，讓初任教師自行反思並調整教學。教學實作與反思是教師專業發展的重要元素（Clarke & Peter, 1993）。初任教師從教學觀察中，發現待解決的研究問題後，其透過文獻的批判性閱讀、教學實作與反思，來發展數學教學策略知識。

研究結果顯示，【協同教學】為本學習模式的特色。在教學實作過程中，初任教師對數學佈題與教學技巧尚未熟練，而無法繼續引導學生發展數學概念時，專家教師則接續其教學，藉由實際的教學示範，使初任教師直接觀察，並反思其教學實作情形。在協同教學中，專家教師的引導與幫助角色，能使初任教師更勇於嘗試，並將教學理論轉化為實務知識。

研究指出，初任教師雖已修畢師資培育課程、參與實習並教學經驗，仍常面臨教學實務、班級經營、親師溝通等挫折，而現行師資培育與教師專業發展系統，卻無法支持初任教師所需的教學支持（教育部，2012）。探究導向專業學習模式，使初任教師在實務現場觀察中，發現數學教學待解決的問題，透過批判性文獻閱讀、與專家教師討論等，來形成研究假設與解決問題策略，再藉由實務現場的教學演練、反思與調整，來建構理論與實務並進的專業知能（符碧真，2018）。

依據本研究的結果與發現，研究者認為師資培育大學與中小學教育現場，可透過「探究導向專業學習模式」，建構師資培育至在職專業發展的學習管道。從師資生的教材教法與實習課開始，即鼓勵師資生修習教育理論課程時，也參與教學現場觀察，藉由反思日誌之撰寫，促進師資生反思並連結教學理論與課室實務。教育實習期間，師資生可選擇教學觀察期間，與其相合的專家教師，作為實習指導教師；待成為初任教師後，亦可延續探究導向專業學習模式，使教師於職業生涯得以不斷學習與成長。

故此，本研究認為未來研究者，可將「探究導向專業學習模式」向下延伸至師資培育課程，使師資培育大學與國民中小學合作開課，使師資生修習教育理論課程時，即參與教育現場的教學觀察，於其中發現解決的研究問題，並嘗試結合教育理論與教學實作，來發展數學教學策略知識。

誌謝

感謝「國家科學及技術委員會」經費支持，計畫編號 NSTC112-2410-H-018 -015。

參考文獻

Skemp, R., R.（1995）。**數學學習心理學**（陳澤民，譯）（初版九刷，2007）。九章出版社。（原著出版年 1987 年）[Skemp, R., R. (2007). *The psychology of learning mathematics* (Chen, T.-M., Trans.) (1st ed., 9th printing, 2007). Chiuchang. (Original work published 1987) (In Chinese)]

王文科、王智弘（2012）。**教育研究法**（增訂第十五版）。五南圖書出版公司。[Wang, W.-K., & Wang, Z.-H. (2012). *Methodology of educational research* (15th ed.). Wu-Nan Book. (In Chinese)]

何蘊琪、張景媛（2019）。素養導向師資培育教學：以慈濟大學為例。**臺灣教育評論月刊，8**（8），51–56。[Ho Y.-C., & Chang C.-Y. (2019). Literacy-oriented teaching of teacher education: The case of Tzu-Chi University. *Taiwan Education Review Monthly, 8*(8), 51–56. (In Chinese)]

李源順、林福來、呂玉琴、陳美芳（2008）。小學教師數學教學發展標準之探究：學者的觀點。**科學教育學刊，16**（6），627–650。[Lee, Y.-S., Lin, F.-L., Leu, Y.-C., & Chen, M-F. (2008). The standards for development in elementary mathematics teaching: Perspectives of elementary mathematics educators. *Chinese Journal of Science Education, 16*(6), 627–650. (In Chinese)] https://doi.org/10.6173/CJSE.2008.1606.04

卓益安、金鈐（2012）。高中數學教師教學實作知識之教室觀察系統的建立。**中等教育，63**（3），8–29。[Cho, Y.-A., & Chin, C. (2012). Building classroom observation system of high school mathematics teachers' practiced-based knowledge. *Secondary Education, 63*(3), 8–29. (In Chinese)] https://doi.org/10.6249/SE.2012.63.3.02

林碧珍（2021）。國民小學教師資格考試「數學能力測驗」之數學教材教法評測知識類別與細目及比重分析。**教育實踐與研究，34**（1），45–90。[Lin, P.-J. (2021). Mathematical competency test of the elementary teacher certification examination: Knowledge domains, specifications, and distribution percentage. *Journal of Educational Practice and Research, 34*(1), 45–90. (In Chinese)]

張世忠、蔡孟芳、陳鶴元（2012）。國中科學教師的學科教學知識與科學教學導向之探討。**科學教育學刊，20**（5），413–433。[Jang, S.-J., Tsai, M.-F., & Chen, H.-Y. (2012). Exploring the middle science teachers' pedagogical content knowledge and science teaching orientations. *Chinese Journal of Science Education, 20*(5), 413–433. (In Chinese)] https://doi.org/10.6173/CJSE.2012.2005.02

張弘勳、蔡淑苓、沈繻滀（2014）。學校初任教師導入訓練之研究，**學校行政，89**，121–141。[Chang, H.-H., Tsai, S.-L., & Shen, R.-Y. (2014). The study on schools beginning teacher's orientation training. *School Administration, 89*, 121–141. (In Chinese)] https://doi.org/10.3966/160683002014010089007

教育部（2012）。**中華民國師資培育白皮書：發揚師道、百年樹人**。作者。[Ministry of Education. (2012). *White paper on teacher training in the Republic of China*. Author. (In Chinese)] https://depart.moe.edu.tw/ED2600/cp.aspx?n=37734BA79B67A89A&s=AF04D533FC93AA8D

教育部（2018）。**十二年國民基本教育課程綱要國民中小學暨普通型高級中等學校－數學領域**。作者。[Ministry of Education. (2018). *Curriculum guidelines of 12-year basic education for elementary, junior high schools and general senior high schools–Mathematics*. Author. (in Chinese)] https://cirn.moe.edu.tw/Upload/file/27338/72246.pdf

符碧真（2018）。素養導向國教新課綱的師資培育：國立臺灣大學「探究式－素養導向的師資培育」理想芻議。**教育科學研究期刊，63**（4），59–87。[Fwu, B.-J. (2018). Teacher preparation in response to competence-based curriculum reform for K-12 education: National Taiwan university's proposal of inquiry-based and competence-based teacher education. *Journal of Research in Education Sciences, 63*(4), 59–87. (In Chinese)] https://doi.org/10.6209/JORIES.201812_63(4).0003

陳彥廷（2014）。「國小教師數學教學知識（MPCK）知覺量表」發展之探究。**測驗學刊，61**（1），51–78。[Chen, Y.-T. (2014). Developing a perception instrument of Mathematics Pedagogical Content Knowledge for elementary school teachers. *Psychological Testing, 61*(1), 51–78. (In Chinese)]

陳彥廷（2015）。國小教師數學教學知識之個案研究。**科學教育學刊，23**（3），213–239。[Chen, Y.-T. (2015). Mapping out the integration of mathematics pedagogical content knowledge (MPCK) from two elementary school teachers. *Chinese Journal of Science Education, 23*(3), 213–239. (In Chinese)] https://doi.org/10.6173/CJSE.2015.2303.01

陳嘉彌（1998）。師徒式教育實習：一位實習教師省思之剖析與詮釋。**教育實習輔導季刊，3**（4），41–48。[Chen, J.-M. (1998). Mentoring Practicum: The analysis and interpretation of a pre-service teacher's reflection. *Educational Internship Counseling, 3*(4), 41–48. (In Chinese)]

黃源河（2010）。熔合斷裂：搭起師資培育理論與實務鴻溝的橋樑。**當代教育研究季刊，18**（4），1–40。[Hwang, Y.-R. (2010). Fixing the glitch: Bridging the gap between theory and practice in teacher education. *Contemporary Educational Research Quarterly, 18*(4), 1–40. (In Chinese)] https://doi.org/10.6151/CERQ.2010.1804.01

賴光真（2022）。實務導向師資培育之倡議、困境與解決途徑。**臺灣教育評論月刊，11**（11），36–42。[Lai, K.-J. (2022). Initiatives, dilemmas and solutions for practice-oriented teacher training. *Taiwan Education Review Monthly, 11*(11), 36–42. (In Chinese)] http://www.ater.org.tw/journal/article/11-11/free/01.pdf

鍾靜、張淑怡、陳幸玫、陸昱任、戴坤邦（2012）。國小數學教師專業標準之建構。**科學教育學刊，20**（3），217–239。[Chung, J., Chang, S.-I, Chen, H.-M., Lu, Y.-J., & Tai, K.-P. (2012). The development of professional standards for elementary mathematics teachers. *Chinese Journal of Science Education, 20*(3), 217–239. (In Chinese)] https://doi.org/10.6173/CJSE.2012.2003.04

鍾靜、趙曉美（2014）。國小數學教學實習輔導內涵之探討。**師資培育與教師專業發展期刊，7**（2），21–48。[Chung, J., & Chao, H.-M. (2014). The study of elementary school mathematics teaching mentoring contents. *Journal of Teacher Education and Professional Development. 7*(2), 21–48. (In Chinese)] https://doi.org/10.3966/207136492014120702002

Ball, D. L., & Bass, H. (2009, March 1–4). *With an eye on the mathematical horizon: Knowing mathematics for teaching to learners' mathematical futures* [Paper presentation]. The 43rd Jahrestagung für Didaktik der Mathematik, Oldenburg, Germany. https://www.old.mathematik.tu-dortmund.de/ieem/BzMU/BzMU2009/Beitraege/Hauptvortraege/BALL_Deborah_BASS_Hyman_2009_Horizon.pdf

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps G. (2008). Content knowledge for Teaching: What makes it special?. *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389–407. https://doi.org/10.1177/0022487108324554

Bybee, R. W., Taylor, J. A., Gardner, A., Van Scotter, P., Powell, J. C., Westbrook, A., & Landes, N. (2006). *The BSCS 5E instructional model: Origins, effectiveness, and applications*. BSCS. https://fremonths.org/ourpages/auto/2008/5/11/1210522036057/bscs5efullreport2006.pdf

Clarke, D., & Peter, A. (1993). Modelling teacher change. In B. Atweh, C. Kanes, M. Carss, G. Booker, & Mathematics Education Research Group of Australasia (Eds.), *Contexts in mathematics education*. *Proceedings of the 16th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 167–175). Mathematics Education Research Group of Australasia.

Elbaz, F. (1983). *Teacher thinking: A study of practical knowledge*. Croom Helm.

Grossman, P. L. (1994). Teachers' knowledge. In T. Husen & T. N. Postlethwaite (Eds.), *The international encyclopedia of education* (2nd ed., pp. 6117–6122). Pergamon Press.

Hill, H., Ball, D. L., & Schilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teacher's topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education, 39*(4), 372–400. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.39.4.0372

Jaworski, B. (2008). Mathematics teacher educator learning and development. In B. Jaworski & T. Wood (Eds.), *The handbook of mathematics teacher education: Vol 4. The mathematics teacher educator as a developing professional* (pp. 1–13). Sense Publishers.

Kansanen, P. (2006). Constructing a research-based program in teacher education. In F. K. Oser, F. Achtenhagen, & U. Renold (Eds.), *Competence oriented teacher training: Old research demands and new pathways* (pp. 11–22). Sense Publishers.

McComas, W. F. (2014). *The language of science education*. Sense Publishers. https://doi.org/10.1007/978-94-6209-497-0

National Research Council. (1996). *National science education standards*. National Academies Press. https://www.csun.edu/science/ref/curriculum/reforms/nses/nses-complete.pdf

Oliveira, H., & Hannula, M. S. (2008). Individual prospective mathematics teacher: Studies on their professional growth. In K. Krainer & T. Wood (Eds.), *The handbook of mathematics teacher education: Vol 3. Participants in mathematics teacher education* (pp. 13–34). Sense Publishers.

Organization for Economic Cooperation and Development. (2013), *PISA 2012 assessment and analytical framework: Mathematics, reading, science, problem solving and financial literacy*. OECD Publishing. https://doi.org/10.1787/9789264190511-en

Park, S., & Chen, Y. C. (2012). Mapping out the integration of the components of pedagogical content knowledge (PCK): Example from high school biology classrooms. *Journal of Research in Science Teaching, 49*(7), 922–941. https://doi.org/10.1002/tea.21022

Park, S., & Oliver, J. S. (2008). National Board Certification (NBC) as a catalyst for teachers' learning about teaching: The effects of the NBC process on candidate teachers' PCK development. *Journal of Research in Science Teaching, 45*(7), 812–834. https://doi.org/10.1002/tea.20234

Pedaste, M., Mäeots, M., Siiman, L. A., de Jong, T., van Riesen, S. A. N., Kamp, E. T., Manoli, C. C., Zacharia, Z. C., Tsourlidaki, E. (2015). Phases of inquiry-based learning: Definitions and the inquiry cycle. *Educational Research Review, 14*, 47–61. https://doi.org/10.1016/j.edurev.2015.02.003

Rowland, T., Huckstep, P., & Thwaites, A. (2005). Elementary teachers' mathematics subject knowledge: The knowledge quartet and the case of Naomi. *Journal of Mathematics Teacher Education, 8*(3), 255–281. https://doi.org/10.1007/s10857-005-0853-5

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4–14. https://doi.org/10.3102/0013189X015002004

Suh, J., & Seshaiyer, P. (2015). Examining teachers' understanding of the mathematical learning progression through vertical articulation during Lesson Study. *Journal of Mathematics Teacher Education, 18*(3), 207–229. https://doi.org/10.1007/s10857-014-9282-7

Tamir, P. (1988). Subject matter and related pedagogical knowledge in teacher education. *Teaching and Teacher Education, 4*(2), 99–110. https://doi.org/10.1016/0742-051X(88)90011-X

Tatto, M. T., Schwille, J., Senk, S., Ingvarson, L., Peck, R., & Rowley, G. (2008). *Teacher education and development study in mathematics (TEDS-M): Policy, practice, and readiness to teach primary and secondary mathematics. Conceptual framework*. International Association for the Evaluation of Educational Achievement. https://www.iea.nl/sites/default/files/2019-04/TEDS-M_Framework.pdf

Yoshida, M. (2008). Exploring ideas for a mathematics teacher educator's contribution to lesson study. In D. Tirosh & T. Wood (Eds.), *The handbook of mathematics teacher education: Vol 2. Tools and processes in mathematics teacher education* (pp. 85–106). Sense Publishers.

Zeichner, K. M. (1983). Alternative paradigms of teacher education. *Journal of Teacher Education, 34*(3), 3–9. https://doi.org/10.1177/002248718303400302

《臺灣數學教育期刊》稿約

2013.04.03 編審委員會會議通過
2013.09.27 編審委員會會議修訂通過
2014.09.04 編審委員會會議修訂通過
2017.03.17 編審委員會會議修訂通過
2021.04.09 編審委員會會議修訂通過
2022.04.08 編審委員會會議修訂通過

壹、《臺灣數學教育期刊》(*Taiwan Journal of Mathematics Education*)(以下簡稱本刊)是國立臺灣師範大學數學系及台灣數學教育學會共同發行之期刊,內容以出版數學教育領域相關議題的原創性論文為宗旨。

貳、本刊歡迎符合宗旨的多元型態學術論文,類型如下:

一、實徵論文(research report):透過資料收集與分析來探究理論或檢驗假設。

二、回顧性論文(review article):整合相關之實徵研究,並提出批判性或創發思考的評析。

三、學術瞭望(academy observatory):針對國內外數學教育理論、議題、新知、研究成果、實務發展、改革趨勢,進行說明、分析、評論、反思或建議。

四、書評(book review):以導讀、討論、分析、闡釋,或比較,來介紹並評論數學教育領域新出版的重要書籍。

參、撰寫文別及字數如下:

一、實徵性論文與回顧性論文:可以中文或英文撰寫,中文稿件字數以20,000字、英文10,000字為上限(包含論文全文、中英文摘要、圖表、附註、參考文獻、附錄等),並需經正式審查流程(請參見第捌項之說明)。

二、學術瞭望與書評:以中文5,000字為原則,由編輯室邀稿。不經正式審查,但需通過編輯委員會議。

肆、本刊每年發行兩期,分別於四月、十月出刊,並採電子和紙本方式發行。全年徵稿,隨到隨審。

伍、本刊所刊之文稿須為原創性的學術論文之文稿,即未曾投遞或以全論文形式刊登於其他期刊、研討會彙編或書籍。若文稿在送審後自行撤稿,或出現一稿多投、修正稿回覆逾期、侵犯著作權等違反學術倫理等情況,將依下列規則處理:

一、來稿一經送審,不得撤稿。因特殊理由而提出撤稿申請者,案送主編決定;非特殊理由而自行撤稿者,一年內將不再接受該作者的投稿。

二、若文稿被發現一稿多投、侵犯著作權或違反學術倫理等情況,除文稿隨即被拒絕刊登外,一切責任由作者自負,且本刊於三年內不接受該作者來稿,並視情節嚴重程度求償。

三、作者應於發出文稿修正通知的三週內回傳修正稿及修正回覆說明書，逾期視同撤稿。若有特殊情況請先與本刊聯絡。

陸、未經本刊同意，已發表之文章不得再於他處發表。投遞本刊之學術論文須經編審委員會送請專家學者審查通過後予以刊登，被刊登文章之著作財產權歸國立臺灣師範大學數學系及台灣數學教育學會共同擁有，文責由作者自負。投稿至《臺灣數學教育期刊》之文章，若經編輯委員推薦且經作者同意，可轉稿至《臺灣數學教師》。

柒、中文文稿格式請參考本期刊論文撰寫體例的說明或已發行之文稿，若為英文撰寫之文稿、引用英文文獻以及數學符號、公式等請參考APA第七版出版手冊。投稿時應注意下列事項：

一、填寫投稿資料

(一) 文稿基本資料。

(二) 通訊作者之姓名、服務單位、職稱、通訊地址、聯絡電話和電子郵件地址。一位以上作者時，非通訊作者只需填寫姓名、服務單位和職稱。

(三) 任職機構及單位：請寫正式名稱，分別就每位作者寫明所屬系所或單位。

(四) 頁首短題（running head）：中文以不超過15個字、英文以不超過40個字元為原則。

(五) 作者註（author note）：說明與本篇研究相關的資訊。

二、除文稿正文外，還需包含中英文摘要，相關規定請詳見《臺灣數學教育期刊》論文撰寫體例。

三、若為修正稿，遞交修正的文稿（上述第伍項第三點之資料）上請以色字標示修改處，並需依審查意見逐項說明修改內容或提出答辯。

捌、本刊審查流程分為預審與正式審查兩個階段：

一、預審：不符合本刊宗旨、品質要求，或撰寫體例者，逕行退稿或退回請作者修改後再上傳。

二、正式審查：為雙向匿名審查，除基本資料表外，不得出現任何足以辨識作者身份之資料，包括請先省略誌謝。

玖、文稿透過線上投稿系統（http://tjme.math.ntnu.edu.tw）方式投遞。當文稿被接受，作者需在本刊提供的著作財產權讓與同意書上簽名，以掃描檔或紙本方式寄回。作者應負論文排版完成後的校對之責。被接受刊登之文稿，作者需提供文獻之doi，以及中文參考文獻之英譯資料。被接受刊登的英文文稿，作者需自行負責檢查文稿中的用詞、語法、拼寫、含意和邏輯的正確性，編輯委員僅負責格式上之校對。

壹拾、期刊助理聯絡郵箱：TJME.taiwan@gmail.com

《臺灣數學教育期刊》研究論文撰寫體例

2013.04.03 編審委員會會議通過
2013.09.27 編審委員會會議修訂通過
2014.09.04 編審委員會會議修訂通過
2017.03.17 編審委員會會議修訂通過
2022.04.08 編審委員會會議修訂通過

本期刊原則上依循美國心理學會（American Psychological Association）的撰寫格式，中文文稿請參考下面的說明或本刊已發表的文稿，若為英文撰寫之文稿、引用英文文獻以及數學符號、公式等請參考 APA 第七版出版手冊。文稿請使用 Microsoft Word 98 以上之繁體中文文書軟體處理。除另有規定外，中文字型一律採用新細明體，英文字型一律為 Times New Roman。

壹、撰稿格式

一、**稿件順序：**投稿除需要附上作者基本資料表檔案外，中文稿件內容依序為中文摘要頁（含關鍵字）、英文摘要頁（含關鍵字）、正文（包括圖、表、附註、誌謝、參考文獻）以及附錄（若無必要可省略）；英文稿件之撰寫順序相同，唯中英文摘要頁位置對調。

二、**稿件版面：**以單欄版面橫向印列的A4規格紙張，上下左右各留2.5公分空白，除基本資料表頁外每頁需加註頁碼。文稿字數（包含摘要、正文、圖表、附註、參考文獻、附錄等）中文以20,000字為上限，英文以10,000字為上限。

三、**中文文稿的中文摘要在前，英文摘要在後**：中文摘要頁內容包括論文題目（粗體20級字、置中）、摘要（不分段，限500字以內）、與關鍵字（以五個為上限，並依筆畫順序由少到多排列）。英文摘要頁內容包括 Title（bold, 20 pt, central）、Abstract（不分段，限300字以內）及 Keywords（字詞及順序須與中文關鍵詞相對應）。

四、**英文文稿的英文摘要在前，中文摘要在後：**英文摘要頁內容包括 Title（bold, 20 pt, central），Abstract（不分段，限300字以內）及 Keywords（以五個為上限，並依字母順序排列）；中文摘要頁內容包括論文題目（粗體20級字、置中）、中文摘要（不分段，限500字以內）及中文關鍵詞（字詞及順序須與英文關鍵詞相對應）。

五、**字級與行距：**除各項標題、表之註記與另起一段之引文外，內文不分中英文均為12級字，單行行距。

六、**字型與符號：**除另有規定外，中文字型一律採用新細明體，標點符號及空白字為全形字；英文字型一律為Times New Roman。

貳、正文規格

一、**正文內容：**原則上包括「緒論」、「文獻探討」、「方法」、「結果」、「討論」與「參考文獻」等六部分，「緒論」含研究動機與目的、假設或研究問題等內容。前述格式為原則性規定，作者可依論文性質斟酌改變。

二、**標題的層次、選用次序與字體**：

(一) 標題請用字簡明，勿用句號或冒號。若逢頁尾最後一行，應移至次頁首行。第一級標題為「緒論」、「文獻探討」、「方法」、「結果」、「討論」與「參考文獻」等，各層次標題選用次序為：壹、一、(一)、1、(1)、A 最多以六個層次為原則。

(二) 第一層次標題置中，其餘靠左對齊。第一、二、三、四、五層次標題請使用粗體。第一層次標題使用 16 級字，第二層次標題使用 14 級字，其餘 12 級字。

(三) 第一、二、三層次標題為單行間距，並與前後段距離均為 1 行；第四、五、六層次標題為 12 點最小行高，並與前後段距離均為 0.5 行。

(四) 第五、六層次標題內縮 1.5 字元，而第六層次標題加上底線。

壹、16級字、粗體、置中

一、14級字、粗體、靠左對齊

(一)12級字、粗體、靠左對齊

1. 12級字、粗體、靠左對齊

(1)內縮1.5字元、12級字、粗體、靠左對齊

A.<u>內縮1.5字元、12級字、底線、靠左對齊</u>

三、**英文統計符號：**須用斜體字，例如*F*(1, 53) = 10.03, *t, F, M, SD, N, r, p*等。希臘字母則不要斜體，例如：α, β, ε, η。

四、**資料分析結果的有效位數須全文一致：**恆小於「1」的數值，例如*KR20*, α, *p*等統計數值的個位數字「0」請省略。

五、**誌謝與附註：**

(一) 誌謝應力求簡短扼要，置於正文之後。誌謝二字為 16 級字、粗體、置中。誌謝文另行起、第一行內縮 2 字元、12 級字。

(二) 附註應置於參考文獻之前，每項附註均另起一行，並以阿拉伯數字編號，依順序排列。

參、文獻引用格式

一、注意事項

(一) 引用文獻時，必須有作者姓名（中文作者姓名全列，英文作者僅列姓氏）及論文年份（中文文獻及英文文獻均使用西元年份）。

(二) 相同作者在同一段中重複被引用時，第一次須寫出年代，第二次以後，在不造成混淆的情況下年代可省略。若在不同段落中重複引用時，則仍須完整註明。

(三) 本文中引用之文獻必須在參考文獻中列出。

二、引用部分文獻內容

若引用特定文獻時，資料來自於特定章、節、圖、表、公式，須標明特定出處；如引用整段原文獻資料，須加註頁碼。中文以「頁」表示；西文單頁為“p.”、兩頁以上為“pp.”。

範例：吳昭容（2019，頁9）或（洪萬生，2006，頁167）
(Dubinsky, 1991, p. 102) 或 (Heath, 1956, pp. 251-252)

三、作者人數為一人、二人、三人以上或機構：

(一) 作者人數為一人

中文格式　作者（年代）或（作者，年代）
英文格式　Author (Year) 或 (Author, Year)
範例：劉柏宏（2021）或（劉柏宏，2021）
Heinz (2015) 或 (Heinz, 2015)

(二) 作者人數為二人。每次引用均須列出全部作者，在行文中，以「與」連接；在括號和參考文獻中，中文以頓號「、」，西文以“&”連接。

中文格式　作者 1 與作者 2（年代）或（作者 1、作者 2，年代）
英文格式　Author 1 與 Author 2 (Year) 或 (Author 1 & Author 2, Year)
範例：蔡政樺與秦爾聰（2021）或（蔡政樺、秦爾聰，2021）
Yang 與 Idris (2021) 或 (Yang & Idris, 2021)

(三) 作者人數為三人以上。

1. 僅需要寫出第一位作者，後面再加上「等人」或 「et al.」。
2. 若作者縮減後與其他文獻會產生混淆（第一作者與年代皆相同），請將作者逐一列出至可區辨者。
3. 若僅最後一位作者不同，則每次引用時都要將所有作者列出。

範例 1：呂鳳琳等人（2018）或 （呂鳳琳等人，2018）或 Green 等人(2014)
Sherry et al. (2010) 或 (Sherry et al., 2010)
範例 2：Hong、Hwang、Liu 等人（2014）
Hong、Hwang、Tai 等人（2014）
範例 3：Mullis、Martin、Foy 與 Arora（2012）
Mullis、Martin、Foy 與 Drucker（2012）

(四) 當作者或作者之一為機構。第一次引用應寫出機構全名，並以中括號註明慣用之簡稱，第二次之後即可使用簡稱替代。

範例：行政院國家科學委員會（國科會，2011）或（行政院國家科學委員會 [國科會]，2011）
National Science Council (NSC, 2011) 或 (National Science Council [NSC], 2011)

四、**同一作者不同著作：**在文章中引用同一作者在同一年的多篇著作時，應在年代後加註 a, b, c……以茲區別。

範例：（教育部，2009a，2009b，2009c，2009d）

五、**引用相同姓氏作者：**當兩筆西文文獻之第一作者同姓時，須引用全名，且採「名在前姓在後」方式書寫。

範例：A. J. Bishop（1985）和 E. Bishop（1970）都認為……。

六、**同時引用多筆文獻：**依作者姓名筆畫（英文用字母）排序；若同時有中英文作者，則先列中文作者。不同作者之間用分號分開，相同作者不同年代之文獻用逗號隔開年代。

範例：（陳學志、賴惠德、邱發忠，2010；Lai et al., 2013; Yen & Yang, 2016）

七、**引用翻譯文獻：**採用（原作者，原著出版年代/譯本出版年代）或原作者（原著出版年代/譯本出版年代）的標示方式。

範例：Skemp (1987/1995) 或 (Skemp, 1987/1995)

八、**間接引註：**當引用之觀念或陳述，來自第二手資料時，應將原始資料和第二手資料同時註明。在括號中首先列出原始作者與年代，接續中文以「引自」註明第二手資料之作者與年代，並說明出處頁碼；或直接引出第二手資料之文獻。

範例：（Garner, 1988，引自蘇宜芬、林清山，1992，頁246）
（引自蘇宜芬、林清山，1992，頁246）

九、**直接引述：**引文超過中文 80 字（西文 40 字），則須另起一段，並改為標楷體 10 級字，左右縮排 2 字元，與正文間前後空一行，且在引文前後無需用引號。

範例：

Schoendfeld (1992, p.335) 有一段話可以用來討論：

> 數學從其創生之始就是一種社會活動，在此活動中一群訓練有素的實踐者(數學科學家)從事組型的科學—基於觀察、研究和實驗，有系統地試圖要決定一個公理化或理論化之系統中的規律的性質和原理（此為純數學），或者從實在世界物體中抽象出來之系統的模式(此為應用數學)。數學的工具是抽象、符號表徵、和符號操作。然而學會運用這些工具，其意義乃謂一個人以數學方式思考而非如一個工匠使用工具。以數學的方式思考就是：(1) 形成數學觀點—珍視數學與抽象的歷程，並偏愛其應用，(2) 發展此學科的工具的能力，並應用這些工具以協助我們理解結構—數學的建構意義（mathematical sense-making）。

肆、圖與表格：

一、圖與表格均配合正文出現。圖和表格標題需分為上、下兩行，置左。圖表序在上行，以阿拉伯數字序碼，且需粗體；圖表名在下行，精簡命名，不粗體。

二、若有資料來源，應於圖表下方附加說明，同時可視需要加以註解，圖表中文字可用簡稱，若簡稱尚未約定俗成或未曾在正文中出現，則須於圖表的註解中列出全稱。

三、表格之製作以簡明清楚、方便閱讀為原則，頂端與底端採用粗線（1.5pt）繪製，中間與兩邊不必畫線。

四、每一個圖表的大小以不超過一頁為原則，如超過時，須在續表之表序後加上（續）/ (continued)，但無須重現圖表名，如：表1（續）或 Table 1 (continued).。

五、圖和表格內容若有解釋的必要，可作註記。註記與圖表之左邊界切齊，列在圖、表之下方，每註另起一行，按編號順序排列，句末須句號。

(一) 一個註解：中文稿件以「註：」表示；英文稿件以「*Note.*」表示（*Note.*為斜體）。

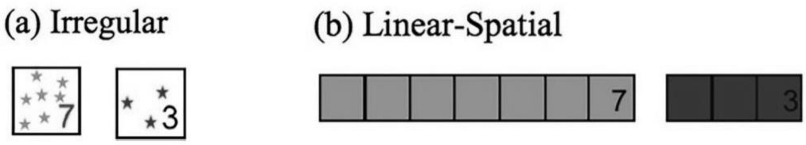
(二) 一個註解以上，註解順序依序為：

1. 一般註解：限定、解釋或提供表、圖的相關資訊（以「註」表示）。
2. 特別註解：特定的某個直欄、橫欄或個別的條目有關（以上標「a、b、c」分段表示）
3. 機率註解：指出顯著性考驗的結果（以「$*p < .05$. $**p < .01$. $***p < .001$.」表示）。

圖例：

圖 2

兩種不同的表徵(a)不規則排列的表徵(b)線性排列的表徵



引自“Materials count: Linear-spatial materials improve young children's addition strategies and accuracy, irregular arrays don't,” by J. Schiffman and E. V. Laski, 2018, *Plos One*, *13*(12), p. 4.

表例：

表2

實驗教學前兩組學生的作文成績比較（獨立*t*考驗）項目

項目	控制組		實驗組		兩組平均差[c]	*t*值
	平均數	標準差	平均數	標準差		
內容[a]	5.25	1.03	3.73	1.08	1.52	4.57***
組織[a]	5.23	.95	3.85	1.07	1.38	4.31***
文法[a]	5.44	1.08	4.17	1.18	1.27	3.53*
語辭[a]	5.39	1.08	4.15	1.13	1.24	3.55**
整體[b]	21.32	3.81	15.90	4.18	5.42	4.28***

註：控制組與實驗組受試者各20名。

[a] 各項目的滿分為10。

[b] 整體分數為四個分項的得分加總。

[c] 兩組平均差＝控制組平均數－實驗組平均數。

*p <.05. **p < .01. ***p < .001.

伍、參考文獻格式

一、注意事項

(一) **排序方式：**正文中引用過之文獻，必須全部列舉在參考文獻內，且不得列出未引用之文獻。中文文獻依作者姓氏筆畫順序排列，外文文獻則依作者姓氏字母順序排列。每個作者第一行由第一格開始寫，第二行中文內縮三個字；英文內縮六個字母。

(二) **標點符號：**中文文獻應使用全形的標點符號，英文文獻則使用半形的標點符號，在半形標點符號後須空一格半形空格書寫。

(三) **英文名稱之大小寫：**期刊篇名與書名除了第一個、冒號之後或專有名詞之第一個字母大寫外，其餘均使用小寫。期刊名稱除了介系詞與連接詞外，每個字的第一個字母大寫。

(四) **中文姓名英譯寫法：**中文姓名的英譯若有”-”（例如：Li-Li Huang），則寫法為Huang, L.-L.；若沒有（例如：Lung Hung Chen），則寫法為Chen, L. H.。此部分請作者在投稿前自行確認原始參考文獻為何種用法。

(五) **多人文章**

1. 作者為一到二十位：須全列出作者姓名，如果為英文文獻，須在最後一位作者前加上「&」。
2. 二十一位（含）以上作者群：僅列出前十九位與最後一位作者姓名，中間以「…」連接。

(六) **接受刊登之稿件**

1. 作者應提供參考文獻之數位物件辨別碼（DOI），格式請使用「https://doi.org/xxxxx」。
2. **中文參考文獻皆須英文化**，附加於該筆中文文獻之後，並置於方頭括號［］內。
3. 若中文參考文獻已有相對應英文翻譯，請以現成的英文意譯為主；沒有相對應英文翻譯時，有些作者姓名在學術界已有慣用拼法，有些名詞（如：數學）也已有通行或正式的拼法，請採用通行或官方拼法，請勿自行音譯。

二、期刊論文

(一) 已發表：

中文格式

作者名（年代）。篇名。**期刊名，卷數**（期數），頁數。[Author, A. A. (Year). Title of article. *Title of Periodical, xx*(xx), xxx–xxx.] https://doi.org/xxxxx

英文格式

Author, A. A. (Year). Title of article. *Title of Periodical, xx*(xx), xxx–xxx. https://doi.org/xxxxx

範例：

蔡文榮、張鈞淇、劉柏宏（2019）。臺灣學術界數學史研究之現況分析與建議：以1992 年至 2017 年學位論文為例。**臺灣數學教育期刊，6**（1），27–51。[Tsai, W.-J., Chang, C.-C., & Liu, P.-H. (2019). Analysis of current state and recommendations for HPM research in Taiwan: The case of theses and dissertations from 1992 to 2017. *Taiwan Journal of Mathematics Education*, *6*(1), 27–51. (in Chinese)] https://doi.org/10.6278/tjme.201904_6(1).003

(二) 已接受，未發表

中文格式

作者名（付梓中）。篇名。**期刊名**。[Author, A. A. (in press). Title of article. *Title of Periodical.*]

英文格式

Author, A. A. (in press). Title of article. *Title of Periodical.*

範例：

張子貴（付梓中）。數學系學生對函數極限的錯誤認知與解題困境。**臺灣數學教育期刊**。[Chang, T.-K. (in press). Math Students' Misunderstandings and Obstacles in Learning Limits of Functions. *Taiwan Journal of Mathematics Education.* (in Chinese)]

三、未出版碩博士論文

中文格式

作者名（年代）。**論文名**（未出版博士/碩士論文）。學校名稱。[Author, A. A. (Year). *Title of article* (Unpublished doctoral dissertation/master's thesis). Name of Institution. (in Chinese)]

英文格式

Author, A. A. (Year). *Title of article* [Unpublished doctoral dissertation/master's thesis]. Name of Institution.

四、**學術研討會論文**

(一) 未出版：

中文格式

作者名（年代，日期）。**篇名**（壁報/口頭發表論文）。研討會名稱，舉辦城市，國家。[Author, A. A. (Year, Month Day). *Title of contribution* (Paper presentation/Poster presentation/Symposium presentation). Conference Name, Location, Country. (in Chinese)] 研討會議程網址

英文格式

Author, A. A. (Year, Month Day). *Title of contribution* [Paper presentation/Poster presentation/Symposium presentation]. Conference Name, Location, Country. https://xxxxx

(二) 有出版：

1. 期刊：與「期刊論文」相同格式，請見第二項。
2. 書：與「編輯書」相同格式，請見第六項。

五、**專書**

中文格式

作者名（出版年）。**書名**。出版社名稱。[Author, A. A. (Year). *Book Title*. Publisher Name. (in Chinese)] https://doi.org/xxxxx

英文格式

Author, A. A. (Year). *Book Title*. Publisher Name. https://doi.org/xxxxx

六、**編輯書：**主編只有一位時用「(Ed.)」，兩位以上用「(Eds.)」。

中文格式

主編名（主編）（出版年）。**書名**。出版社。[Author, A. A. (Ed./Eds.). (Year). *Book title*. Publisher Name. (in Chinese)] https://doi.org/xxxxx

英文格式

Author, A. A. (Ed./Eds.). (Year). *Book title*. Publisher Name. https://doi.org/xxxxx

七、**書籍中的專章：**英文專書主編「名字」縮字放在「姓」之前。

中文格式

作者名（出版年）。章節名稱。載於主編單位/主編名（主編），**書名**（頁 xx–xx）。出版社名稱。[Author, A. A. (Year). Title of chapter. In E. E. Editor (Ed./Eds.), *Book title* (pp. xx–xx). Publisher Name. (in Chinese)] https://doi.org/xxxxx

英文格式

Author, A. A. (Year). Title of chapter. In E. E. Editor (Ed./Eds.), *Book title* (pp. xx–xx). Publisher Name. https://doi.org/xxxxx

八、**翻譯作品**：若為中文譯本，其文獻須列於中文文獻最前面，如有兩筆以上翻譯文獻，依照英文字母排序，但若譯本有將原作者名翻譯為中文者，須使用其中文名，依筆劃，插入中文文獻之內；若沒有則維持原作者名。

中文格式

原作者名/譯名（翻譯本出版年代）。**翻譯書名**（譯者名，譯）。譯本出版社。（原著出版於 xxx 年）[Author, A. A. (Year). *Book title* (Translator, Trans.). Publisher. (Original work published Year) (in Chinese)]

英文格式

Author, A. A. (Year). *Book title* (Translator, Trans.). Publisher. (Original work published Year)

範例1：

Struik, D. J.（2014）。**數學史**（吳定遠，譯）。水牛。（原作出版於 2012 年）[Struik, D. J. (2014). *A Concise History of Mathematics*. (Wu, D.-Y., Trans.). Buffalo Book Company. (Original work published 2012) (in Chinese)]

範例2：

赫爾曼（2009）。**數學恩仇錄**（范偉，譯）。博雅書屋。（原作出版於 2006 年）[Hellman, H. (2009). *Great feuds in mathematics: Ten of the liveliest disputes ever* (Fan, W., Trans.). Goodness Publishing House. (Original work published 2006) (in Chinese)]

九、**研究計畫報告**：若沒有計畫編號或網址，則無須填寫。當機構名稱與出版單位相同時，可省略出版單位。

中文格式

機構名稱或作者名稱（年代）。**篇名**（計畫編號：xxx）。出版單位。[Name of Group. (Year). *Title of report* (Report No. xxx). Publisher name. (in Chinese)] 計畫網址

英文格式

Author/Name of Group. (Year). *Title of report* (Report No. xxx). Publisher name. https://xxxxx

十、**網路資訊**：檢索時間不需列出，除非該網路資料經常變動。括弧內日期為文章登錄於網站上的日期，如無日期可查，中文文獻則在括弧內註明為（無日期），英文文獻註明為 (n.d.)。日期可用形式為（年代）、（年月）、（年月日）、（無日期）。

中文格式

作者/單位名（年月日）。**篇名**。網站名稱。[Author, A. A. (Year, Month Day). *Article title.* Website Name. (in Chinese)] 網址

英文格式

Author, A. A. (Year, Month Day). *Article title.* Website Name. http://xxxxx

範例：

國教署（2020 年 12 月 8 日）。**臺灣參加國際數學與科學教育成就趨勢調查（TIMSS 2019）成果發表**。教育部全球資訊網。[K-12 Education Administration. (2018, December 8). *The report of trends in international mathematics and science study 2019 for Taiwan*. Taiwan Ministry of Education. (in Chinese)] https://www.edu.tw/News_Content.aspx?n=9E7AC85F1954DDA8&s=B822E38553C1D561

《臺灣數學教育期刊》投稿基本資料表

<table>
<tr><td rowspan="2" colspan="2">篇名</td><td colspan="4">(中文)</td></tr>
<tr><td colspan="4">(英文)</td></tr>
<tr><td colspan="2">總字數</td><td colspan="4">稿件全文（含中英文摘要、正文、參考文獻、附錄等）共________字。</td></tr>
<tr><td rowspan="2" colspan="2">關鍵詞(最多五個)</td><td colspan="4">(中文)</td></tr>
<tr><td colspan="4">(英文)</td></tr>
<tr><td colspan="2">頁首短題
(running head)</td><td colspan="4">(請以不超過15個中文字或40個英文字元為原則。)</td></tr>
<tr><td rowspan="9">通訊作者資料</td><td>姓名</td><td colspan="2">(中文)</td><td colspan="2">(英文)</td></tr>
<tr><td>職稱</td><td colspan="4"></td></tr>
<tr><td rowspan="2">服務單位
(或就讀校系)</td><td colspan="4">(中文)</td></tr>
<tr><td colspan="4">(英文)</td></tr>
<tr><td>E-mail</td><td colspan="4"></td></tr>
<tr><td>通訊地址</td><td colspan="4"></td></tr>
<tr><td rowspan="2">電話</td><td colspan="4">辦公室：(　　)　　　　　　　　　分機</td></tr>
<tr><td colspan="4">行動電話：</td></tr>
<tr><td colspan="6">如為共同著作，請詳填以下共同著作人欄位，非共同著作則不需填寫。(以下欄位不敷填寫時請自行增加)</td></tr>
<tr><td colspan="2">共同著作人</td><td>姓名</td><td colspan="2">服務單位(或就讀校系)</td><td>職稱</td></tr>
<tr><td rowspan="2" colspan="2">第一作者
（☐通訊作者）</td><td>(中文)</td><td colspan="2">(中文)</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>(英文)</td><td colspan="2">(英文)</td></tr>
<tr><td rowspan="2" colspan="2">第二作者
（☐通訊作者）</td><td>(中文)</td><td colspan="2">(中文)</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>(英文)</td><td colspan="2">(英文)</td></tr>
<tr><td rowspan="2" colspan="2">第三作者
（☐通訊作者）</td><td>(中文)</td><td colspan="2">(中文)</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>(英文)</td><td colspan="2">(英文)</td></tr>
<tr><td colspan="2">作者註
(可複選)</td><td colspan="4">☐ 本篇論文為碩、博士論文改寫，指導教授為______________。
☐ 本篇論文曾於______________發表。
☐ 本篇論文獲國科會補助，計劃編號：______________。</td></tr>
<tr><td colspan="6">1.茲保證本論文符合研究倫理。
2.茲保證所填基本資料正確，文稿未曾以任何方式出版或發行，且無一稿多投、違反學術倫理，或違反著作權相關法令等事情。
3.茲瞭解並同意貴刊著作權授權規範，並保證有權依此規範進行相關授權。
4.茲保證文稿已經所有作者同意投稿至《臺灣數學教育期刊》。

填表人：______________________　　　　填表日期：______年______月______日</td></tr>
</table>

《臺灣數學教育期刊》著作財產權讓與同意書

茲同意投稿至國立臺灣師範大學數學系與台灣數學教育學會共同發行的《臺灣數學教育期刊》之一文，名稱為：

____

立書人聲明及保證本著作為從未出版之原創性著作，所引用之文字、圖表及照片均符合著作權法及相關學術倫理規範，如果本著作之內容有使用他人以具有著作權之資料，皆已獲得著作權所有者之（書面）同意，並於本著作中註明其來源出處。著作人並擔保本著作未含有毀謗或不法之內容，且絕未侵害他人之智慧財產權，並同意無償授權國立臺灣師範大學數學系與台灣數學教育學會於本著作通過審查後，以論文集、期刊、網路電子資料庫等各種不同方法形式，不限地域、時間、次數及內容利用本著作，並得進行格式之變更，且得將本著作透過各種公開傳輸方式供公眾檢索、瀏覽、下載、傳輸及列印等各項服務。國立臺灣師範大學數學系與台灣數學教育學會並得再授權他人行使上述發行之權利。惟著作人保有下列之權利：

1.本著作相關之商標權及專利權。

2.本著作之全部或部份著作人教學用之重製權。

3.出版後，本著作之全部或部份用於著作人之書中或論文集中之使用權。

4.本著作用於著作人受僱機關內部分送之重製權或推銷用之使用權。

5.本著作及其所含資料之公開口述權。

著作人同意上述任何情形下之重製品應註明著作財產權所屬，以及引自《臺灣數學教育期刊》。

如果本著作為二人以上之共同著作，下列簽署之著作人已通知其他共同著作人本同意書之條款，並經各共同著作人全體同意，且獲得授權代為簽署本同意書。如果本著作係著作人於受僱期間為雇用機構所作，而著作權為讓機構所有，則該機構亦同意上述條款，並在下面簽署。

本著作之著作財產權係屬（請勾選一項）

☐ 著作人所有

☐ 著作人之僱用機構所有

立同意書人（著作人或僱用機構代表人）簽章：______________________

著作人姓名或僱用機構名稱：______________________

（正楷書寫）

中華民國　　年　　月　　日

《臺灣數學教育期刊》編審辦法

2013.04.03 編審委員會會議通過

壹、《臺灣數學教育期刊》（以下簡稱本刊）之審查包括預審、正式審查兩個階段：

一、預審：檢視來稿是否符合本刊稿約之宗旨、論文品質以及進行論文格式之審查；

二、正式審查：審查委員與投稿者採雙向匿名方式進行。主編就審查委員的回覆意見及論文品質決定接受或拒絕文稿，或是需要作者修改後再進行審查或檢核。需要「修正後再審」之稿件，交原審查委員或委由主編委任進行再審。所有文稿最後須經編輯委員會審查通過後，方能刊出。

稿件之最終審查決定以投稿後六個月內完成並通知作者。

貳、審查委員針對稿件之學術原創性、正確性及價值等條件從嚴審查，以確保所刊文稿的品質。審查委員可提供作者具建設性的修改建議，以利文稿的修正及品質提昇，並以下列其中一種的刊登建議回覆：

一、「同意刊登」：論文不需要修改可作原稿刊登。

二、「修正後刊登」：通知作者依審查意見修改或答辯後刊登。

三、「修正後再審」：要求作者依審查意見修改或答辯，修正稿由編輯委員會送原審查委員或委由主編委任進行再審。

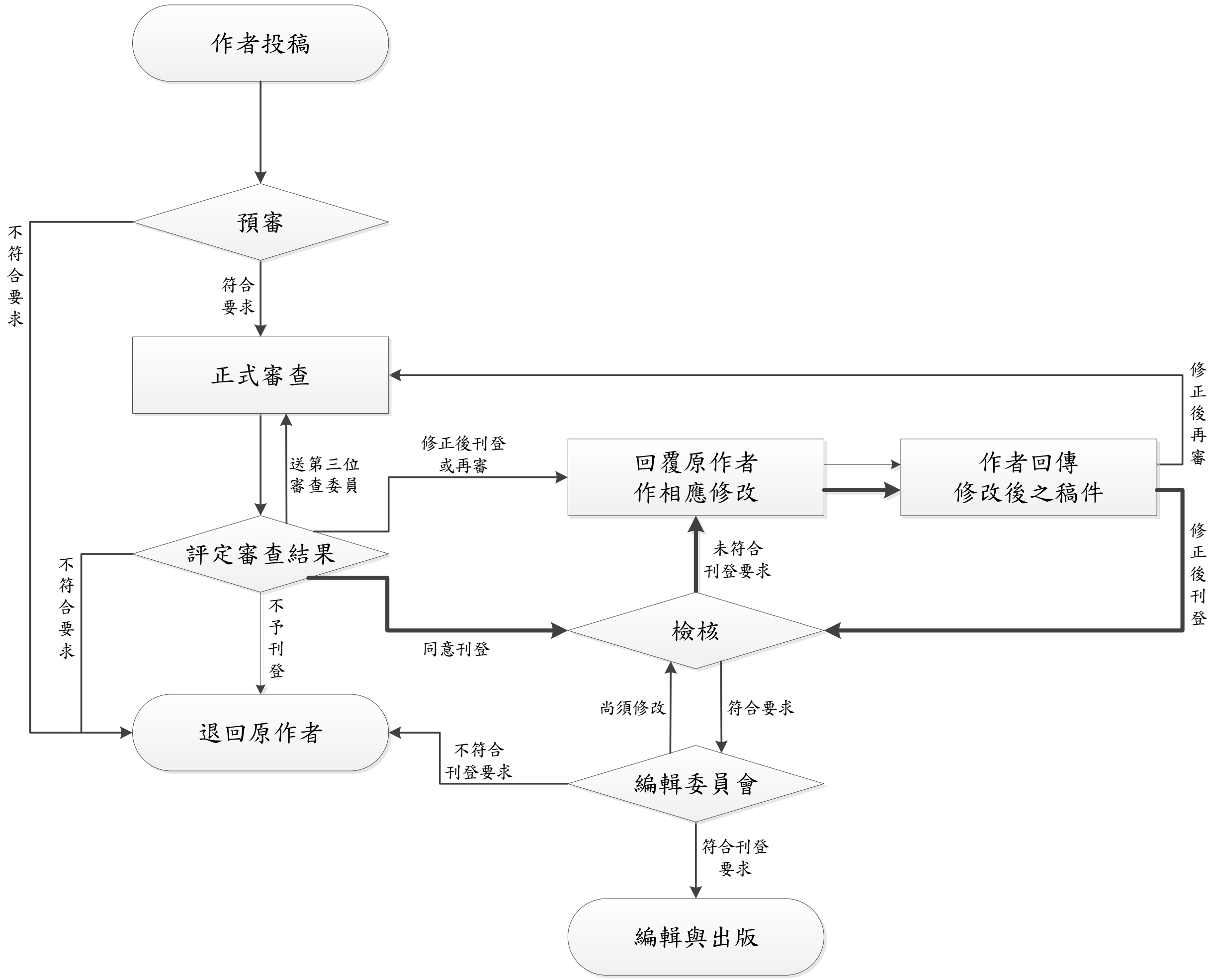
四、「不宜刊登」：通知作者退稿。

稿件審查的時間以三週為限，若超過期限，編輯委員會將去函提醒審查委員儘速審查，若逾六週審查者仍未寄回審查意見，則編輯委員會得再聘請另一位審查者取代之。每位審查者皆為無償審查，但會在每年第二期期刊中列名致謝。

參、本刊主編、副主編或編輯委員如投稿本刊，該委員應迴避推薦審查委員名單、參與審查結果決定之討論或經手處理與個人稿件有關的資料(包括審稿者資料、推薦審查委員名單、審稿意見等)。

肆、本刊預計每年四月和十月出版，稿件刊登順序由主編原則上依文稿性質與投稿時間之先後次序決定之，而第一作者的文稿以一篇為限，超過篇數之稿件留至下期刊登。

伍、本刊稿件之編審流程如下圖所示：


作者投稿
預審
不符合要求
符合要求
正式審查
修正後再審
送第三位審查委員
修正後刊登或再審
回覆原作者作相應修改
作者回傳修改後之稿件
評定審查結果
不符合要求
未符合刊登要求
修正後刊登
不予刊登
同意刊登
檢核
尚須修改
符合要求
退回原作者
不符合刊登要求
編輯委員會
符合刊登要求
編輯與出版

Taiwan Journal of Mathematics Education Vol. 11, No. 2 October, 2024

Publisher	Department of Mathematics, National Taiwan Normal University Taiwan Association for Mathematics Education

Address	No.88 Sec. 4, Ting-Chou Rd., Taipei City, Taiwan, R.O.C. Department of Mathematics, National Taiwan Normal University "*Taiwan Journal of Mathematics Education*"
TEL	886-2-7749-3678
FAX	886-2-2933-2342
E-mail	TJME.taiwan@gmail.com
Website	http://tjme.math.ntnu.edu.tw/contents/contents/contents.asp?id=21